Heuner

Joh. Friedr. Heuner's
Lehrgang
des
Rechenunterrichts
mit
gleichmäßiger Berücksichtigung
des
Kopf- und Zifferrechnens.

☞ Vierzehnte, mit besonderer Rücksicht auf das im deutschen Reiche ☜ giltige Münz=, Maß= und Gewichtssystem umgearbeitete Auflage.

Mittels h. Ministerial=Rescriptes wurde Heuner's Lehrgang des Rechenunterrichts nebst den dazu gehörigen Aufgabenheften für alle bayerischen Schulen zum Gebrauche empfohlen.

Mit zwei Figurentafeln.

Ansbach.
Verlag von Fr. Seybold.
1878.

Druck von C. Brügel und Sohn in Ansbach.

Vorwort zur vierzehnten Auflage.

Nachdem das Buch in den seit sechs Jahren erlebten Auflagen völlig gleichlautend erschienen ist, verläßt es diesesmal fast durchaus umgearbeitet die Presse. Verschiedene Abänderungen, schon früher beabsichtigt, aber hauptsächlich aus Rücksichten und Bedenklichkeiten bisher unterlassen, mußten endlich doch vorgenommen werden, und dabei hat sich denn fast überall mehr oder weniger die Nothwendigkeit einer Umgestaltung ergeben.

Glaube ich auch, hoffen zu dürfen, daß die Veränderungen als Verbesserungen sich erweisen und als solche sich selbst rechtfertigen werden; so kann ich doch über eine derselben, nämlich über die frühe Vorführung der Decimalbruchform, nicht stillschweigend hinweg gehen.

Daß im dritten Cursus an die Stelle der mehrfach benannten ganzen Zahl die einfach benannte Decimalzahl tritt, bedarf zwar, nachdem nun durch besonderen Erlaß die decimale Schreibweise zur Pflicht gemacht ist, keiner Begründung, wohl aber, daß dieselbe auch schon früher, schon im ersten und zweiten Cursus angewendet erscheint.

Die Decimalform soll, um es kurz zu sagen, die Grundform oder Grundanschauung bilden. Der Schüler soll die mehrsortige Zahl nicht nur in Decimalform schreiben, er soll sich dieselbe auch in Decimalform denken oder vorstellen. Und dazu gehört nach meinem Dafürhalten nicht nur, daß die Münz-, Maß- und Gewichtseinheiten mit ihren Unterabtheilungen so bald als möglich anschaulich vorgeführt, sondern auch, daß die Schüler zugleich in die decimale Schreibweise

derselben eingeführt werden, daß also zur Sache sogleich auch ihre Bezeichnung tritt. Dabei dürfte nicht zu unterschätzen sein, daß der Schüler auf diese Weise die jetzt schon ziemlich allgemein angewendete Decimalform frühzeitig kennen lernt, und daß, wenn das Rechnen mit den in Decimalform auszudrückenden mehrsortigen Zahlen als eigentliches Pensum an die Reihe kommt, diese Aufgabe eine erhebliche Vorbereitung bereits gefunden hat, während sie im andern Falle unter günstigen Verhältnissen nur mit vieler Mühe, bei ungünstigen kaum zu bewältigen sein wird.

Zweifelhaft, ob die individuelle Behandlung der leichteren gemeinen Brüche — von den Halben an bis zu den Zwölfteln — am zweckmäßigsten vor der Decimal-, oder vor der gemeinen Bruchrechnung einzureihen sei, habe ich mich endlich aus dem Grunde zu Letzterem entschlossen, weil sie denn doch den eigentlichen Vorkursus zur gemeinen Bruchrechnung bildet, bin jedoch gerne bereit, bei Herausgabe der gleichfalls umgearbeiteten Aufgabenhefte, welche bis nächsten Herbst erscheinen werden, der vielleicht abweichenden Ansicht in der Praxis erfahrener Lehrer Rechnung zu tragen.

Möge dem Buche in seiner jetzigen Gestalt dieselbe freundliche Aufnahme wie in seiner früheren zu Theil werden!

Ansbach, den 10. April 1878.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Erster Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Hundert.

Seite

Zweiter Cursus.

Die Grundrechnungsarten in größeren Zahlen.

Dritter Cursus.

Die Rechnungsarten mit einfach benannten Decimalzahlen.

Vierter Cursus.

Decimalbruchrechnung.

Seite

Fünfter Cursus.

Die gemeinen Brüche.

Sechster Cursus.

Verhältnißrechnungen.

Siebenter Cursus.

Erster Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Hundert.

Vorbemerkung.

Die Zahlen von Eins bis Hundert liegen vor allen übrigen Zahlen der Anschauung offen und werden im Leben am häufigsten angewendet. Darum und weil das Rechnen mit ihnen die Grundlage zu *allem* Rechnen bildet, so *können* und *müssen* sie unter allen Zahlen am gründlichsten behandelt werden. Der Schüler muß von jeder derselben eine möglichst klare und vollständige Kenntniß erhalten. Es ist aber einleuchtend, auch schon vielfach nachgewiesen*), anerkannt und durch die Erfahrung festgestellt, daß die gründliche Kenntniß der Zahl weniger aus der *gleichzeitigen Behandlung ganzer Zahlenreihen*, als vielmehr aus der *allseitigen Betrachtung der einzelnen Zahlen* erwächst. Wir sind deßhalb für die letztere Weise, für die *individuelle* Behandlung der Zahl. Demgemäß durchschreiten wir das Gebiet des ersten Hunderts von Zahl zu Zahl. Am Ende eines Zehners aber findet ein Rückblick, eine Wiederholung statt. Die Uebungen verbreiten sich dann über alle Zahlen desselben, beziehungsweise über den ganzen bis dahin zurückgelegten Zahlenraum.

Um aber das gegen die individuelle Behandlung der Zahl bestehende Bedenken, daß sie *im Anfange* wegen der fast gleichzeitigen Vorführung sämmtlicher Rechengeschäfte eine besondere Lehrgewandtheit erfordere und die Thätigkeit des Lehrers über Gebühr in Anspruch nehme, zu beseitigen, und um diese Methode, der selbst ihre Gegner zugestehen, daß sie den Charakter eines bildenden Unterrichts habe, einen stufenweisen Fortschritt in sich schließe, die Denkthätigkeit der Kinder sehr befördere und allen todten Mechanismus ausschließe, besonders für angehende Lehrer zugänglicher zu machen, so treten wir mit unsern Schülern in das ihnen ohnehin schon einigermaßen be-

*) Zuerst und am gründlichsten von Grube in seinem Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule.

kannte Zahlengebiet von Eins bis Fünf auf einmal ein und benützen dasselbe, um die Anfänger im Rechnen in die verschiedenen Rechenoperationen und die Anfänger im Unterrichten in das dabei einzuschlagende Lehrverfahren durch einen Vorkursus einzuführen. Dann erst betrachten wir jede dieser Zahlen auch allseitig für sich und setzen dieß bei den folgenden fort.

Bei Behandlung der einzelnen Zahlen gehen wir übrigens gerade so zu Werk, wie man sich klare Kenntniß von andern Dingen verschafft. Wir fassen zuerst das Ganze in's Auge, zerlegen es dann in seine Bestandtheile, vereinigen diese wieder und bestimmen dabei sowohl den zwischen dem Neuen und dem bereits Bekannten bestehenden Unterschied, als das zwischen dem Ganzen und seinen Theilen bestehende Verhältniß.

Hierauf folgen Aufgaben verschiedener Art, nämlich Aufgaben, wie sie bereits vorgekommen sind, aber in vermischter Aufeinanderfolge, Aufgaben, worin die gewöhnlich gegebenen Glieder in Frage gestellt erscheinen, und Aufgaben, wodurch die Zahl auf die Lebensverhältnisse angewendet wird.

So schreiten Kenntniß der Zahl, Fertigkeit im Operiren und praktisches Rechnen, in natürlicher Verbindung und sich gegenseitig fördernd, gleichmäßig fort. Der Lehrgang, einfach und konsequent und darum auch von den Schülern unschwer zu erkennen, macht es ihnen möglich, den Lehrstoff selbstthätig zu ergreifen und sich dessen zu bemächtigen. Mit jeder neuen Zahl erweitert sich der Kreis der Vorstellungen des Schülers und mehrt sich sein Besitz. Er fühlt das Wachsthum seiner Kraft. Sein Bewußtsein wird gehoben, seine Lernbegierde gesteigert. Er arbeitet immer mehr aus Lust und Liebe zur Sache. Und dieß, sowie die beständige Abwechslung, welche der Lehrgang in die Thätigkeit der Lernenden bringt, macht, daß sie dieser Beschäftigung nie müde werden.

In Bezug auf das Lehrverfahren sei bemerkt:

1) Bei jeder Uebung werde die Sache auf mannigfache Weise, durch räumlich vorhandene, wie durch zeitlich eintretende Dinge, als: Würfel, Hände, Federn, Münzen, Maße, Gewichte, Klänge, Silben, Schritte u. dgl. m. wiederholt zur Anschauung gebracht. Als stereotypes Anschauungsmittel aber sei, nebst den Fingern, Punkten oder Strichen, das sogenannte russische Rechenbrett empfohlen. Aus mehreren Gründen. Das dekatische Zahlensystem baut sich an ihm anschaulich auf; die Zahlen lassen sich daran sehr leicht und schnell umstellen; der Lehrer hat, wenn er sich neben oder hinter dasselbe stellt, die Schüler beständig vor sich, und deren Augen sind, indem sie sich darauf fixiren, zugleich auf ihn gerichtet. Nur werde dasselbe nicht sogleich mit seinen hundert Kugeln vorgeführt. Der Schüler sehe zuerst nur das Gestell mit den (zehn) leeren Drähten, welche auf beiden Seiten durch den Rahmen gehen, an einem Ende umgebogen und am andern, um sie leicht herausnehmen zu können, mit einer Schraubenmutter versehen sind. Für die Zahl Eins thue man eine Kugel in die oberste Stange, für Zwei 2 Kugeln in die zweite Stange, für Drei 3 Kugeln in die dritte Stange u. s. f. bis Zehn. Ehe man zur Zahl Elf übergeht, nehme man alle Kugeln wieder heraus und bringe in die erste oder oberste Stange 10 derselben und in die nächste darunter eine. Bei Zwölf werde dieser einen Kugel eine zweite beige-

fügt, bei Dreizehn eine dritte u. s. f. — Von den 10 Kugeln sind immer 5 hell und 5 dunkel gefärbt.

2) Die Veranschaulichung der Zahlen und der Zahlenoperationen ist selbstverständlich zunächst Sache des Lehrers, aber nicht ausschließlich und nicht immer. Vielmehr ist der Schüler so bald als möglich anzuhalten, Theil daran zu nehmen. Es ist dieß das beste Mittel, den Schüler aus seinem mehr oder weniger passiven Verhalten in Selbstthätigkeit zu versetzen und ihn zu befähigen, bei irgend einer Ungewißheit in diesem Bereiche durch Versinnlichung der Sache sich selbst zu helfen.

3) In Allem, was der Schüler vermittelst der äußeren Anschauung klar begriffen hat, muß derselbe durch freie Uebung im Kopfe sofort auch fest und sicher werden. Zur deutlichen Einsicht muß Sicherheit und Fertigkeit kommen.

4) Vorstellungen und Begriffe, besonders rein abstrakte, wie die von Zahlen, werden durch einmaliges Auffassen und Einüben noch nicht für immer Eigenthum des Geistes. Werden sie nicht von Zeit zu Zeit wieder aufgefrischt und erneuert, so verbleichen sie nach und nach und verlieren sich endlich völlig. Darum werde fleißig wiederholt, sowohl mit Anschauung als frei im Kopfe. Gelegenheit dazu bietet sich bei jeder neuen Zahl.

5) Eine besondere Sorgfalt verdient das Rechnen mit der angewandten Zahl, die übrigens mit der bloß benannten nicht verwechselt werden darf. Aufgaben wie:

3 Liter + 2 Liter = ?	3 × 2 Aepfel = ?
5 Meter — 2 Meter = ?	$^1/_3$ × 6 Pfennige = ?

sind Aufgaben mit der bloß benannten Zahl, man mag die Gegenstände dabei vor sich haben oder nicht. Was mit den gegebenen Zahlen geschehen soll, ist in diesen Fällen angezeigt. Das Geschäft des Rechners besteht allein darin, die bezeichnete Operation auszuführen.

Anders ist es bei den Aufgaben mit der angewandten Zahl. Dergleichen sind: Eine Bäuerin verkauft zuerst 3 Liter Milch und dann 2; wie viel im Ganzen? Von 5 Meter Zeug wurden 2 Meter verbraucht; wie viel ist noch vorhanden? Für 1 Pfennig erhalte ich 2 Aepfel; wie viel für 3 Pfennige? 3 Stück kosten 6 Pfennige; was kostet 1 Stück? — Hier ist nicht angezeigt, was mit den gegebenen Zahlen gethan werden muß, um die verlangte Antwort zu erhalten. Die mit den Zahlen auszuführenden Operationen sind also in der Aufgabe nicht schon bezeichnet, sondern erst zu entdecken. Und gerade das, nämlich das Auffinden der zum Resultate führenden Operationen, das Auflösen oder Beurtheilen der Aufgabe, ist hier der Schwer- und Angelpunkt der Berechnung. Der Schüler muß klar und deutlich einsehen, daß man für 3 Pfennige 3mal so viel Aepfel bekommt, als für einen, und daß 1 Stück nur den dritten Theil so viel kostet, als 3 Stück. Zu dieser Einsicht gelangt derselbe aber wieder nur durch die Anschauung und zwar am leichtesten und sichersten, wenn man sich dabei der realen Dinge selbst bedient. In allen Fällen, wo sie nicht zu Handen sind, lasse man ihre Stelle durch ähnliche Dinge, wenigstens durch Zeichnungen an der Wandtafel, vertreten.

6) Nie werde in Einem fort so lange gerechnet, bis bei den Kindern eine geistige Abspannung bemerkbar ist. Eine halbe Stunde auf einmal wird für das erste Schuljahr das rechte Zeitmaß sein.

7) Endlich hüte man sich vor dem Fehler, dessen sich besonders eifrige Anfänger gerne schuldig machen: zu eilen, die Schüler vorwärts zu drängen und seine Leistungen nach der Quantität des behandelten Stoffes zu bemessen. Wo das geschieht, da wird nichts recht begriffen und gelernt; da ist kein wohlthätiger Einfluß auf die Entwicklung des kindlichen Geistes; da kommt die rechte Lehr- und Lernfreudigkeit nicht auf, wohl aber gibt es Unmuth und Verdruß genug. Wer in seiner Schule die Freude eines gedeihlichen Fortschrittes, den schönsten Lohn des Lehrers, kennen lernen und genießen will; wer es mit der ihm anvertrauten Jugend und mit sich selbst gut meint: der gehe nicht eilfertig, sondern langsam, aber bestimmt und sicher vorwärts; der weiche von keinem Punkte, bis die Schüler die Sache verstehen und ihrer Herr geworden sind; der muthe den Kleinen nicht zu, Alles sogleich zu begreifen und zu können; der suche, wenn etwas nicht recht gehen will, die Ursache davon zunächst in sich und denke darüber nach, wie es dem Verständnisse der Kinder näher zu legen sei; der sei sich stets bewußt, daß mehr gethan ist, wenn eine Zahl allseitig und gründlich durchgearbeitet und eine praktische Aufgabe klar und verständig gerechnet wird, als wenn zehn derselben einseitig und leichthin durchgenommen werden, und daß, je genauer und sorgfältiger das Eine geschieht, desto leichter und besser es mit dem Andern geht, das darauf folgt.

In Schulen mit einer Altersklasse nehme man sich zwei Jahre Zeit mit diesem Cursus, in Schulen mit mehreren Klassen drei. In jenen gehe das Pensum für das erste Schuljahr nicht über die Zahl 20 hinaus, in diesen nicht über 10. Dabei wird vorausgesetzt, daß die betreffende Abtheilung in den Schulen mit einer Altersklasse wöchentlich vier, in solchen mit mehreren Klassen zwei bis drei Stunden Rechenunterricht erhalte.

Vorkursus
zur allseitigen Behandlung der einzelnen Zahlen.

A. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen und Unterscheiden im Zahlenraume von Eins bis Fünf.

(Durchaus nur anschaulich.)

§. 1. Bilden und Auffassen.

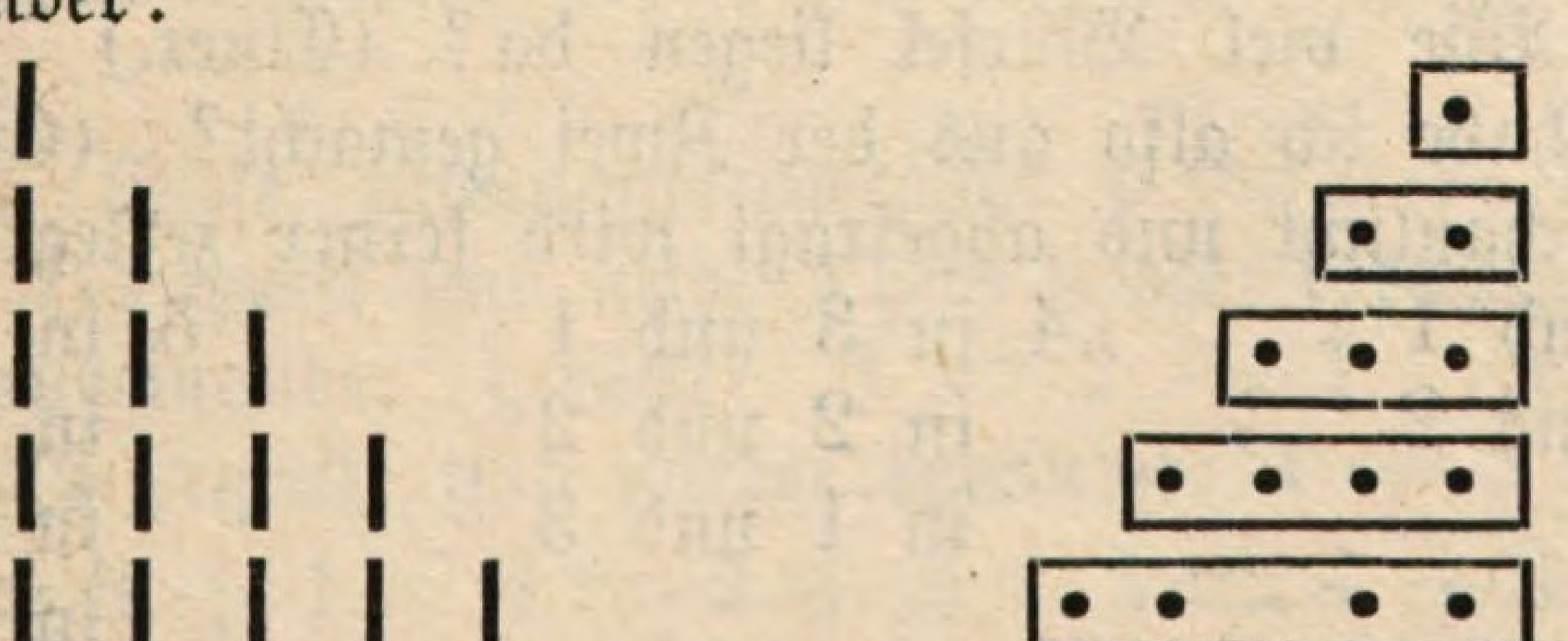
Die ganzen Zahlen in ihrer Reihenfolge entstehen, indem die Eins wiederholt zu sich genommen wird. $1 + 1 = 2$; $(1 + 1) + 1$ oder $2 + 1 = 3$; $(1 + 1 + 1) + 1$ oder $3 + 1 = 4$ ꝛc. So geht also immer aus der zuletzt erhaltenen Zahl, indem sich ihr ein neues Element, eine neue Eins, anschließt, die nächstfolgende hervor.

Verfahren.

Mit Strichen.

Man macht an die Wandtafel einen senkrechten Strich und fragt: Was ist das? (Ein Strich.) Wie viele Striche sind es? (Ein Strich.) Neben diesen Strich macht man einen zweiten und veranlaßt die Kinder zu sprechen: Ein Strich und ein Strich sind zwei Striche. An die Seite des zweiten Strichs setzt man einen dritten, und die Kinder sprechen: Zwei Striche und ein Strich sind drei Striche. So fort bis: Vier Striche und ein Strich sind fünf Striche.

Dieß wird so oft wiederholt, bis sich die Schüler geläufig ausdrücken. Hierauf setzt man die Zahlen zuerst in Strichen, dann in Punkten, wie folgt, unter einander:



zeigt — in und außer der Ordnung — auf die einzelnen Reihen hin und läßt von den Schülern die Zahlen benennen. Nun nennt man selbst bald diese, bald jene Zahl, und einer der Schüler zeigt darauf hin.

Mit den Kugeln an der Rechenmaschine.

In die erste oder oberste Stange kommt eine Kugel, in die zweite Stange kommen zwei u. s. f. Im Uebrigen wird ebenso verfahren, wie oben bei der Veranschaulichung durch Striche und Punkte.

Mit den Fingern einer Hand.

Streckt einen Finger empor! (Zeigefinger.) Streckt zwei Finger empor! (Daumen und Zeigefinger.) Drei Finger! (Daumen-, Zeige- und Mittelfinger.) Vier Finger! (Alle, ohne den Daumen.) Fünf Finger! — Dieß wiederholt und auch außer der Ordnung:

Die Zahlen von Eins bis Fünf werden nun so, wie sie an der Wandtafel stehen, von den Schülern auf ihren Schiefertafeln in Strichen und Punkten wiederholt dargestellt.

§. 2. **Das Zerlegen** (in zwei Elemente.)

Die Uebung des Zerlegens ist von besonderem Werthe. Durch sie wird der Schüler nicht nur befähigt, die Zahl an ihren Bestandtheilen schnell und bestimmt zu erkennen, sondern auch, sie nach ihrem vollen Inhalte innerlich klar anzuschauen. Die Zahl Sieben (•••••••) sogleich im Ganzen aufzufassen, ist kaum möglich. Sicher und leicht wird sie hingegen als •••• | ••• oder als ••• | ••• | • erkannt. Auch wenn man diese Zahl sich denken oder innerlich anschauen will, kann es nur so geschehen. Man versuche es nur selbst. Nebst dem bildet das Zerlegen der Zahlen die beste Grundlage zu den Rechengeschäften. Weiß der Schüler, daß $7 = 4 + 3$, so wird er gewiß auch leicht begreifen, daß $4 + 3 = 7$, daß $7 - 4 = 3$, und daß 7 um 3 größer ist als 4. Und sieht derselbe die 6 als •• •• ••, d. i. als 3×2, so wird er aus eben dieser Anschauung leicht erkennen, daß $3 \times 2 = 6$, daß 2 in 6 dreimal enthalten und daß 2 der dritte Theil oder $1/3$ von 6 ist.

Die Uebung des Zahlenzerlegens ist also nicht nur der Boden, auf dem unsern Schülern eine gründliche und allseitige Kenntniß der Zahl erwächst, sondern sie führt ihn auch auf die einfachste Weise in die Rechengeschäfte ein.

Verfahren.

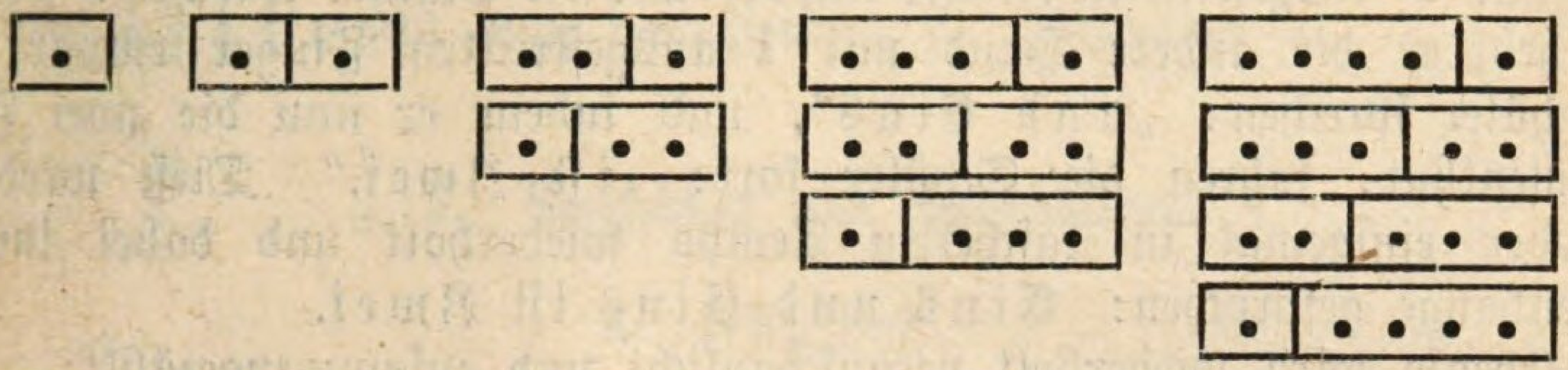
Man legt zwei Würfel von verschiedener Farbe (Bücher oder andere frei bewegliche Dinge) auf den Tisch, nahe zusammen. Wie viel Würfel sind da? (Zwei.) Nun rückt man einen vom andern etwas weg. Wie viel Würfel liegen jetzt auf dem Tische? (Zwei.) Aber wie liegen sie jetzt? (Auseinander.) Wie viel Würfel liegen da? (Einer.) Und da? (Auch einer.) Was habe ich also aus der Zwei gemacht? (Eins und Eins.)

So veranschaulicht und abgefragt wird ferner zerlegt:

3 in 2 und 1	4 in 3 und 1	5 in 4 und 1
in 1 und 2	in 2 und 2	in 3 und 2
	in 1 und 3	in 2 und 3
		in 1 und 4

Dieß wird in der Weise öfter wiederholt, daß der Lehrer blos die Veranschaulichung gibt, und die Schüler das Veranschaulichte in vollständigen Sätzen aussprechen: 2 ist 1 u. 1; 3 ist 2 u. 1 u. s. w.

Dasselbe geschieht auch mit Kugeln an der Rechenmaschine und mit Punkten. Die Veranschaulichung durch Punkte gibt eine feststehende und übersichtliche Darstellung sämmtlicher Fälle.



Der einzelne Punkt bleibt, wie er ist. Eins ist Eins. — Die zwei Punkte können wir zwar nicht so, wie 2 Würfel oder Kugeln, auseinander rücken. Trennen oder zerlegen können wir sie aber doch.

Wir thun dieß — und zwar vor den Augen der Schüler — durch einen kleinen Strich. Auf der einen Seite dieses Striches ist Eins, und auf der andern ist Eins. So ist also Zwei zerlegt in Eins und Eins.

Eben so zerlegen wir die Drei in 2 und 1, und dann in 1 und 2 u. s. w.

Zuletzt, wenn sämmtliche Fälle vor Augen stehen, deutet der Lehrer auf die einzelnen Zahlen (indem er mit einem Stäbchen darüber hinstreicht) und auf ihre Theile hin, und die Schüler sprechen wieder in vollständigen Sätzen: 1 ist 1; 2 ist 1 u. 1 ꝛc.

| Das ist Eins. Dafür setzt man das Zeichen 1, das ihr jetzt schreibt.

Der Lehrer schreibt die Ziffer immer in langsamem Takte einigemal an die Tafel und macht hiebei darauf aufmerksam, in welcher Ordnung die einzelnen Züge auf einander folgen müssen. Dann werden die Schüler angehalten, das Zeichen in derselben Weise so lange nachzubilden, bis sie es richtig und ziemlich geläufig schreiben können.

§. 3. Das Zusammenzählen.

a. In Verbindung mit dem Zerlegen.

Mit Würfeln, Büchern ꝛc. Man stellt 2 Würfel auf und fragt: Wie viel ist das? Antwort: Zwei. Nun rückt man sie etwas auseinander, und die Schüler sprechen: Zwei ist Eins und Eins. Hierauf werden die Würfel wieder vereinigt, und dabei heißt es: Eins und Eins ist Zwei.

3 Würfel. Diese auseinandergerückt: $3 = 2 + 1$. Indem man zuerst 2, dann 1 ergreift und beide Theile wieder vereinigt: $2 + 1 = 3$. — Abermals auseinander gerückt: $3 = 2 + 1$. Indem man jetzt zuerst 1, dann 2 ergreift und wieder vereinigt: $1 + 2 = 3$.

Eben so:	$4 = 3 + 1$	$4 = 2 + 2$	$5 = 4 + 1$	$5 = 3 + 2$
	$3 + 1 = 4$	$2 + 2 = 4$	$4 + 1 = 5$	$3 + 2 = 5$
	$1 + 3 = 4$		$1 + 4 = 5$	$2 + 3 = 5$

Für | | setzt man das Zeichen 2. Schreiben.

b. Für sich.

Mit den Fingern der beiden Hände. Der Lehrer hebt eine Hand mit 1 ausgestreckten Finger empor, und die Schüler sprechen: „Eins"; dann hebt er die andere Hand mit 1 ausgestreckten Finger empor, und die Schüler sprechen: „und Eins", und indem er nun die zwei Finger zusammenthut, fahren die Schüler fort: „ist Zwei." Dieß wird noch ein- oder einigemal in rascherem Tempo wiederholt und dabei im Zusammenhange gesprochen: Eins und Eins ist Zwei.

Ebenso wird wiederholt veranschaulicht und zusammengezählt:

2 und 1	1 und 2	1 und 3
3 und 1	2 und 2	2 und 3
4 und 1	3 und 2	1 und 4

Auch an den Punkten, welche bei dem Zerlegen zur Veranschaulichung gedient haben, kann das Zusammenzählen geübt werden. Bei |•|•| deutet der Lehrer zuerst auf die eine, dann auf die andere Eins, und die Schüler sprechen: 1 u. 1 ist 2. Bei |• •|•| streicht der Lehrer zuerst über die Zwei hin, deutet dann auf Eins, und die Schüler sprechen: $2 + 1 = 3$, u. s. w.

Für | | | macht man das Zeichen 3. Schreiben.

§. 4. Das Abziehen.

Mit Würfeln, Büchern rc.

Der Lehrer stellt 5 Würfel auf. Wie viel ist das? (Fünf.) Nun nimmt er 1 Würfel davon weg. Ist es noch Fünf? (Nein.) Ist es jetzt mehr oder weniger als Fünf? (Weniger.) Warum? (Weil Eins weggenommen worden ist.) Wie viel ist es daher jetzt weniger? (Eins.) Und wie viel ist noch da? (Noch 4.) Man stellt nun den fünften Würfel nochmal hin, und indem man ihn wieder wegnimmt, heißt es: Fünf weniger Eins ist Vier.

So fortfahrend wird veranschaulicht und gesprochen: 4 weniger 1 ist 3; 3 weniger 1 ist 2; 2 weniger Eins ist 1; 1 weniger 1 ist Nichts.

Wird einigemal wiederholt.

Mit den Fingern einer Hand, indem man mit Hülfe der andern Hand einen Finger nach dem andern einbiegt. Der Lehrer veranschaulicht, und die Schüler sprechen. Nachdem dieß einigemal so geschehen, thun die Schüler Beides zugleich.

An der Rechenmaschine.

Der Lehrer zeigt auf die Kugel in der ersten Stange, und die Schüler sprechen: „Eins." Indem er dieselbe auf die andere Seite schiebt, sprechen sie: „weniger Eins." Und indem er auf die vorige, nun leere Stelle der Kugel zeigt: „ist Nichts." Im Zusammenhange: Eins weniger Eins ist Nichts.

Ebenso und zuletzt auch außer der Ordnung:

Zweite Stange: 2—1, 2—2
Dritte Stange: 3—1, 3—2, 3—3
Vierte Stange: 4—1, 4—2, 4—3, 4—4
Fünfte Stange: 5—1, 5—2, 5—3, 5—4, 5—5

Mit Benützung der Zahlenbilder unter §. 2, indem man einen der beiden Bestandtheile, in welche die Zahl zerlegt ist, mit einem Lineale verdeckt.

Für | | | | macht man das Zeichen 4. Schreiben.

§. 5. Vergleichen und Unterscheiden.

a. Für sich.

Man stellt zwei Schüler von gleicher Größe nebeneinander. Welcher von den beiden ist größer als der andere? (Keiner.) Welcher ist kleiner als der andere? (Keiner.) Sie sind also — ihrer Größe nach — einander gleich. — Nun stellt man zwei Schüler von verschiedener Größe nebeneinander. Sind diese auch einander gleich? (Nein; A, der eine Schüler, ist größer als B, und B ist kleiner als A.)

Um wie viel ist A größer als B? Mit der Hand an dem Kopfe des A es anzeigend: Um so viel; so viel ragt A über B hinaus.

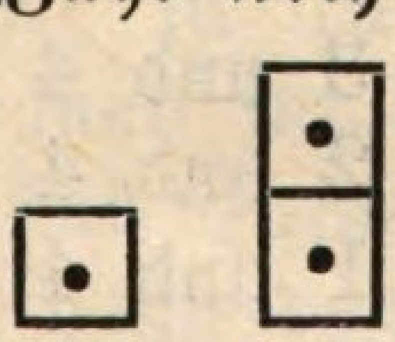
Um wie viel ist B kleiner als A? Mit der Hand über dem Kopfe des B es anzeigend: Um so viel; so viel muß B noch wachsen oder größer werden, bis er den A gleich ist.

Dem ähnlich mit zwei gleich großen und dann mit zwei ungleich großen Linien. — Hierauf mit Zahlen, indem man zuerst die kleinere der beiden Zahlen zweimal setzt und dann aus einer der zwei gleichen Zahlen die größere bildet.



1 und 1. Auf die eine Eins zeigend: Wie viel ist das? Auf die andere Eins zeigend: Und wie viel ist das? Sind es zwei gleiche, oder zwei ungleiche Zahlen?

Nun fügt man der einen Zahl noch 1 bei und erhält so

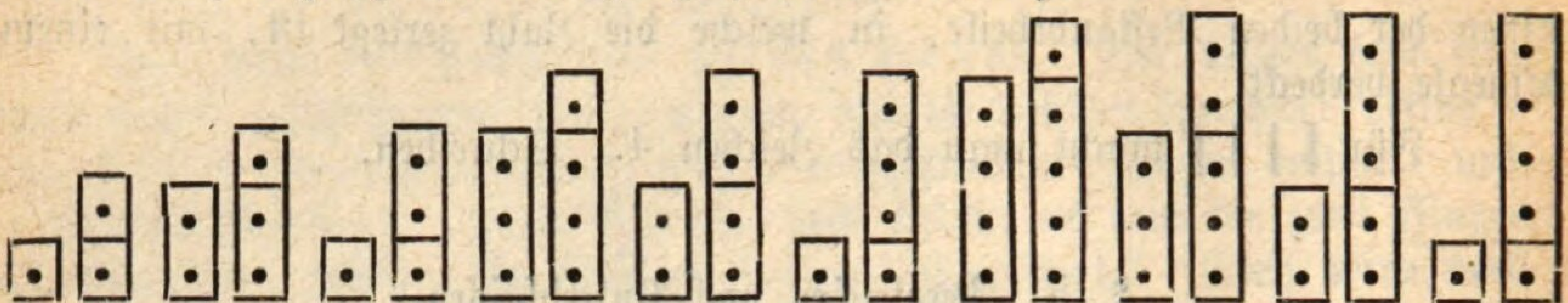


Sind die beiden Zahlen jetzt noch einander gleich? Welche Zahl ist die größere? Um wie viel ist 2 größer als 1? Zuerst einzeln, dann im Chor: 2 ist um 1 größer als 1. — Welche von beiden Zahlen ist die kleinere? Wie viel muß man zu 1 thun, um sie der 2 gleich zu machen? (Dieß wird durch ein Pünktchen angedeutet.) Um wie viel ist also 1 kleiner als 2? Einzeln, dann im Chor: 1 ist um 1 kleiner als 2.

In ähnlicher Weise werden mit einander verglichen

2 u. 2	3 u. 3	1 u. 1	4 u. 4	2 u. 2
2 u. 3	3 u. 4	1 u. 4	4 u. 5	2 u. 5
1 u. 1	2 u. 2		3 u. 3	1 u. 1
1 u. 3	2 u. 4		3 u. 5	1 u. 5

Stehen zuletzt sämmtliche Zahlenbilder wie hier



vor Augen, so deutet man dann auf dieselben bloß hin, und die Schüler sprechen das, was sie aus der Anschauung erkennen, in vollständigen Sätzen aus. Indem der Lehrer z. B. zuerst auf 2, dann auf 1 deutet, sprechen sie: 2 ist um 1 größer als 1; zeigt er zuerst auf 1 und dann auf 2, so sprechen sie: 1 ist um 1 kleiner als 2. So in und außer der Reihenfolge.

Für | | | | | macht man das Zeichen 5. Schreiben.

b. Im Anschluß an das Zerlegen.

Man mißt an einem Stabe zwei ungleich große Schüler und bezeichnet die Größe derselben durch kleine Querstriche. —

Nun zeige Du mir an dem Stabe: Wie groß ist A? Und wie groß ist B? Welcher von Beiden ist der größere? Um wie viel ist er größer? Welcher ist der kleinere? Und um wie viel ist er kleiner? Was sehen wir also an dem Stückchen zwischen den zwei kleinen Strichen?

Auf die Zahlen angewendet.



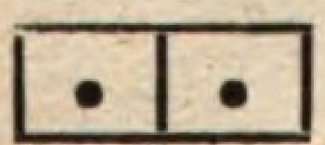
Zählt die Punkte von da an bis daher! (d. i. von 1 bis 4.) Nun zählt sie von da an bis daher! (von 1 bis 5.) Wo fängt die Vier an, und wie weit geht sie? Wo fängt die Fünf an, und wie weit geht sie? — Um wie viel geht 5 über 4 hinaus? Um wie viel steht 4 gegen 5 zurück? — Um wie viel ist also die Zahl 5 größer als die Zahl 4? Und um wie viel ist die Zahl 4 kleiner als die Zahl 5?

Wie 4 und 5, so werden mit einander verglichen:

3 und 5	3 und 4	2 und 3
2 und 5	2 und 4	1 und 3
1 und 5	1 und 4	1 und 2

Der Lehrer schreibt die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 außer der Reihenfolge möglichst oft senkrecht unter einander und veranlaßt die Schüler, sie zu lesen und ihre Bedeutung durch aufgehobene Finger anzugeben. Hierauf schreiben die Schüler sie ab und setzen neben jede einmal die ihr entsprechende Anzahl von Strichen, dann dieselbe Anzahl von Punkten, von Ringlein und von Sternchen.

§. 6. Zerlegen, Zuzählen, Abziehen und Vergleichen in Verbindung.



Zwei ist 1 und wie viel?	2 ist 1 + 1.
Wie viel ist 1 + 1?	1 + 1 = 2
Wie viel ist 2 — 1?	2 — 1 = 1
Um wie viel ist 2 größer als 1?	2 ist um 1 größer als 1.
Um wie viel ist 1 kleiner als 2?	1 ist um 1 kleiner als 2.

[• • | •]	Drei ist 2 und wie viel?	3 ist 2 + 1
	Wie viel ist 2 + 1?	2 + 1 = 3
	Wie viel ist 3 — 1?	3 — 1 = 2
	Um wie viel ist 3 größer als 2?	3 ist um 1 größer als 2
	Um wie viel ist 2 kleiner als 3?	2 ist um 1 kleiner als 3
[• | • •]	Drei ist 1 und wie viel?	3 ist 1 + 2
	u. s. w.	u. s. w.

Dieser anschaulich und mündlich ausgeführten Uebung entspricht folgende anschaulich und in Zeichen dargestellte:

	a.	b.	c.
[• | •]	2 = 1 + 1	1 + 1 = 2	2 — 1 = 1
[• • | •]	3 = 2 + 1	2 + 1 = 3	3 — 1 = 2
[• | • •]	3 = 1 + 2	1 + 2 = 3	3 — 2 = 1
[• • • | •]	4 = 3 + 1	3 + 1 = 4	4 — 1 = 3
[• | • • •]	4 = 1 + 3	1 + 3 = 4	4 — 3 = 1
[• • | • •]	4 = 2 + 2	2 + 2 = 4	4 — 2 = 2
[• • • • | •]	5 = 4 + 1	4 + 1 = 5	5 — 1 = 4
[• | • • • •]	5 = 1 + 4	1 + 4 = 5	5 — 4 = 1
[• • • | • •]	5 = 3 + 2	3 + 2 = 5	5 — 2 = 3
[• • | • • •]	5 = 2 + 3	2 + 3 = 5	5 — 3 = 2

Man zeigt auf [• | •] und fragt: 2 ist 1 und wie viel? Die Antwort: „Zwei ist Eins und Eins" schreibt man, sie langsam wiederholend, sogleich Wort für Wort in Zeichen (2 = 1 + 1) neben das Zahlenbild und sagt dabei, daß man für das Wörtchen „ist" das Zeichen = und für das Wort „und" das Zeichen + setzt. So wird die ganze Reihe unter a gebildet und diese dann von den Schülern, immer mit Hinblick auf das entsprechende Zahlenbild, wiederholt gelesen.

Dem ähnlich verfahre man mit den Reihen unter b und c. Der Lehrer fragt und schreibt, die Schüler antworten und lesen. Zuletzt werden die Anschriebe auch von links nach rechts gelesen. 2 = 1 + 1; 1 + 1 = 2; 2 — 1 = 1 u. s. w.

Zur Selbstbeschäftigung wird den Schülern aufgegeben, die obige Darstellung in derselben Ordnung abzuschreiben, wie sie unter der Hand des Lehrers entstanden ist, also zuerst die Zahlenbilder mit der Reihe unter a, dann die Reihe unter b und dann die unter c.

Ist es gethan, so liest ein Schüler nach dem andern je einen Satz von dem Selbstgeschriebenen ab.

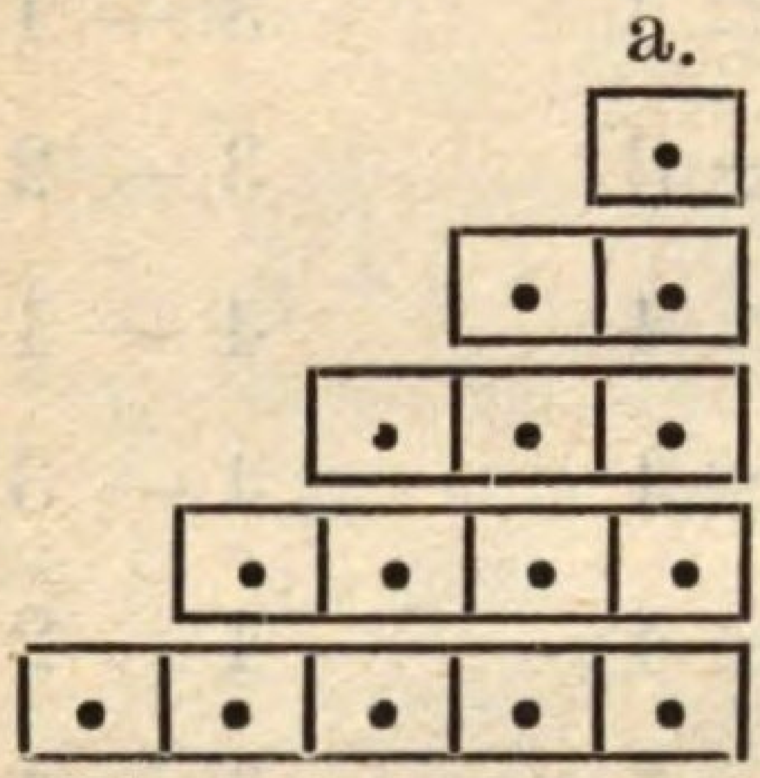
B. Zerlegen, Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen im Zahlenraume von Eins bis Fünf.

(Durchaus nur anschaulich.)

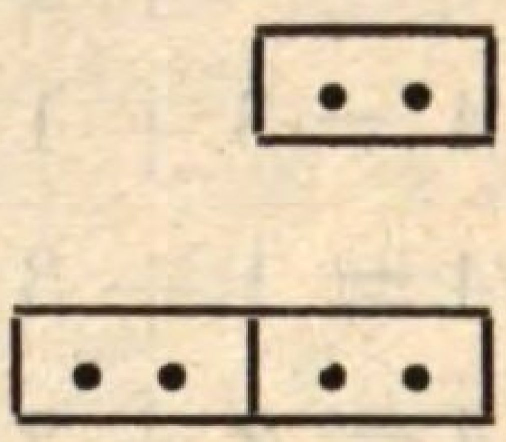
§. 7. Das Zerlegen in gleiche Theile.

Zunächst bringen wir den Schülern den Ausdruck „mal“ in's Bewußtsein. — Zählt, wie oft ich meine Hand aufhebe! (Einmal, zweimal.) Zählt wieder! (1mal, 2mal, 3mal.) 2c. — Jetzt hebt ihr die rechte Hand empor. Thut es 2mal und zählt dazu! Thut es 3mal! 4mal! 5mal! Nun dasselbe mit Punkten und im Anschlusse das Zerlegen.

a.



b.



Zuerst wird die Reihe unter a. gebildet.

Zählt, wie oft ich einen Punkt mache! (Einmal.) Zählt, wie vielmal einen Punkt ich darunter setze! (1mal, 2mal.) So fort, bis die Zahlen von 1 bis 5 unter einander stehen. Hierauf werden dieselben von 2 an so zerlegt, daß auf jeden Theil Eins kommt.

Wo steht die Eins einmal, für sich allein? Wo steht sie zweimal neben einander? Wo dreimal? u. s. w.

Wo steht 1mal 1? Wo steht 2mal 1? wo 3 × 1? 2c.

Nun zeige ich auf die Zahlen hin, und ihr sagt mir, wie vielmal 1 jede ist. Auf 1 zeigend: 1 ist 1 × 1; auf 3 zeigend: 3 ist 3 × 1, u. s. w.

Der Lehrer stellt jetzt die Zahlen Zwei und Vier unter b dar, theilt Vier ab und fragt: Wo stehen hier 2 Punkte einmal, für sich allein? Wo stehen sie zweimal neben einander? — Wo steht 1mal 2? Wo steht 2mal 2?

Nun will ich auf die Zahlen hinzeigen, und ihr sagt mir, wie vielmal 2 jede ist. Auf 2 zeigend: 2 ist 1mal 2; auf 4 zeigend: 4 ist 2mal 2.

Zuletzt zeigt der Lehrer bald auf eine Zahl unter a, bald auf eine solche unter b, und die Schüler sprechen das Veranschaulichte in ganzen Sätzen aus. Indem er z. B. über die ganze Zahl 3 hinstreicht, sprechen die Schüler: „Drei“, und indem er dann auf die einzelnen Theile schnell nach einander deutet, fahren sie fort: „ist 3mal 1“.

Von jetzt an kann die arithmetische Bezeichnung sogleich nach jeder Uebung eintreten.

Auf [•] zeigend: 1 ist wie vielmal 1? Die Antwort: „Eins ist einmal Eins" wird sogleich Wort für Wort in Zeichen (1 = 1 × 1) mit dem Bemerken neben das Zahlenbild geschrieben, daß man für „mal" das Zeichen × setzt. So auch die übrigen Fälle. Steht:

[•] 1 = 1 × 1	[• •] 2 = 1 × 2
[• | •] 2 = 2 × 1	[• • | • •] 4 = 2 × 2

u. s. w.

Diese Aufschriebe werden mit stetem Hinblicke auf das betreffende Zahlenbild gelesen, dann abgeschrieben und wieder gelesen.

§. 8. Das Vervielfachen.

Die nämlichen Zahlenbilder. Man fragt, auf [•] hinzeigend: Wie vielmal 1 ist das? Wie viel ist 1 × 1? (1 × 1 = 1.)

Auf [• | •] deutend: Wie vielmal 1 steht hier? Wie viel ist 1 + 1 zusammen? (1 + 1 = 2.) Wie viel ist 2 × 1? (2 × 1 = 2.)

Auf [• | • | •] zeigend: Hier steht wie vielmal 1? Wie viel ist 1 + 1 + 1 zusammen? (1 + 1 = 2, + 1 = 3.) Wie viel ist also 3 × 1? (3 × 1 = 3.) So fort bis 5 × 1 = 5.

Bei [• •] heißt es: Wie vielmal 2 ist dieß? (1 × 2.) Wie viel ist 1 × 2? (1 × 2 = 2.) — Ebenso bei 4.

Am Ende zeigt der Lehrer auf die Zahlen und zwar jetzt zuerst auf die einzelnen Theile, dann über das Ganze wieder bloß hin, und die Schüler sprechen: 1 × 1 = 1, 2 × 1 = 2 u. s. w.

Darstellung in Ziffern. Wie oben. Der Lehrer fragt und schreibt, die Schüler antworten und lesen. Frage: Wie viel ist 1mal 1? 2c.

[•] 1 × 1 = 1	[• •] 1 × 2 = 2
[• | •] 2 × 1 = 2	[• • | • •] 2 × 2 = 4

u. s. w.

§. 9. Das Enthaltensein.

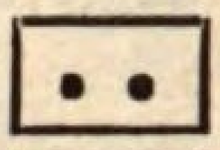
Auf [•] hinzeigend: Wie viel ist das? Wie viele Eins hat diese Zahl in sich? Wie vielmal 1 hat sie in sich? (1 × 1.) Wie vielmal ist also 1 in 1 enthalten? (1mal.) Sprechen: 1 ist in 1 einmal enthalten.

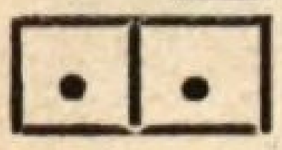
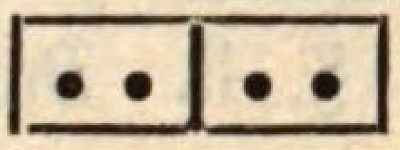
Auf [• | •] zeigend: Wie viel ist das? Wie viele Eins hat diese Zahl in sich? Wie vielmal Eins hat sie in sich? (2 × 1.) Wie vielmal ist also 1 in 2 enthalten? (2mal.) Sprechen: 1 ist in 2 zweimal enthalten. — So fort bis: 1 ist in 5 fünfmal enthalten.

Auf die betreffende Zahl unter b deutend: 2 ist wie vielmal 2? Und 4 ist wie vielmal 2? Wie viele Zwei oder Zweier hat die Zahl 2 in sich? Und wie viele Zweier hat die Zahl 4 in sich? Wie vielmal ist also 2 in 2 enthalten? (1mal.) Und wie vielmal ist 2 in 4 enthalten? (2mal.) Sprechen: 2 ist in 2 einmal enthalten; 2 ist in 4 zweimal enthalten.

Nun zeigt der Lehrer auf die einzelnen Zahlenbilder (zuerst immer auf einen Theil, dann auf das Ganze) hin, und die Schüler lesen das jetzt aus denselben Erkannte wieder selbstständig ab.

Schriftliche Darstellung. Die Division wird vorläufig nicht durch den Doppelpunkt, sondern durch „in" bezeichnet. Für „Eins ist in Eins einmal enthalten" wird gesetzt: 1 in 1 = 1 × u. s. w. Steht:

 1 in 1 = 1 ×  2 in 2 = 1 ×

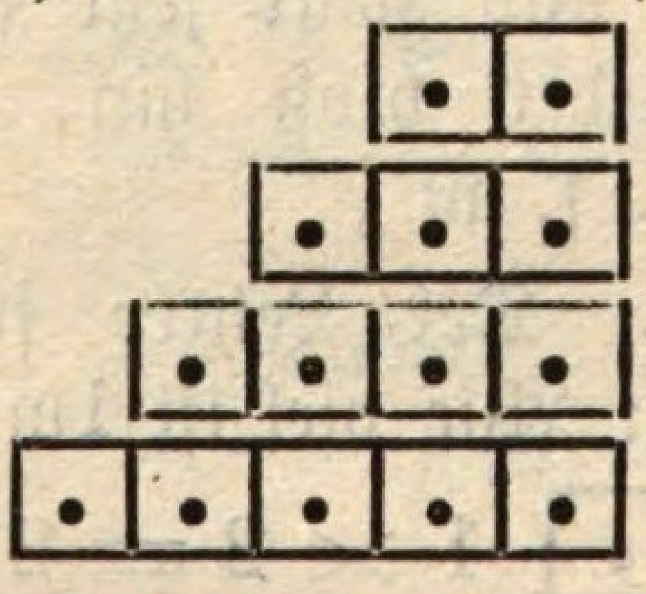
 1 in 2 = 2 ×  2 in 4 = 2 ×

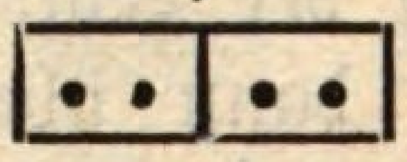
u. s. w.

§. 10. Das Theilen.

Der Lehrer theilt einen Apfel in zwei sehr ungleiche Theile und fragt, ob der eine, oder der andere derselben der halbe Theil (die Hälfte) von dem Apfel sei. Die Schüler finden den einen Theil zu groß, den andern zu klein. Von den zwei ungleichen Theilen ist also keiner der halbe Theil des Apfels.

Wie muß ich diesen (andern) Apfel theilen, damit jeder Theil die Hälfte oder der halbe Theil davon ist? (In 2 gleiche Theile.) Dieß geschieht. Welchen Theil von dem Apfel habe ich hier in der Hand? Und welcher Theil von dem Apfel ist dieser andere Theil?





Diese Zahlenbilder läßt man so nacheinander entstehen, wie sie besprochen werden.

Auf die zwei Punkte zeigend: Wie viel ist das? In wie viel Theile ist die Zwei zerlegt? Sind es zwei gleiche, oder zwei ungleiche Theile? Wie viel beträgt jeder Theil? Weil es zwei gleiche Theile sind, so heißt auch hier jeder Theil „der halbe Theil." Eins ist also welcher Theil von 2? (1 ist der halbe Theil von 2.)

Zählt die Theile, in welche die Drei zerlegt ist! Sind es 3 gleiche, oder 3 ungleiche Theile? u. s. w.

Sind sämmtliche Fälle in dieser Weise durchgearbeitet, so zeigt der Lehrer auf einen Theil der verschiedenen Zahlen wieder bloß hin, und die Schüler geben an, welcher Theil es ist. Sie sprechen:

1 ist der halbe Theil von 2
1 ist der dritte Theil von 3
1 ist der vierte Theil von 4
1 ist der fünfte Theil von 5
2 ist der halbe Theil von 4.

§. 11. Andere Benennung der Theile.

Welche Zahl (mit Hinweisung auf die bei der vorigen Uebung benützten Zahlenbilder) ist in 2 gleiche Theile getheilt? Welche noch? Welche Zahl ist in 3 gleiche Theile zerlegt? Welche in vier? Welche in fünf?

Auf die Fünf zeigend: Wie viel gleiche Theile sind das? Anstatt „fünf Theile“ sagt man auch „Fünf-tel“. Diese Eins (auf welche man hindeutet) ist also 1 Fünftel von 5. Und diese andere Eins? (Diese 1 ist auch 1 Fünftel von 5.) Und diese Eins? Und diese? Also: von 5 ist jede Eins 1 Fünftel. 1 ist 1 Fünftel von 5.

Auf diese Weise lernen die Schüler ferner Eins als 1 Viertel von 4, als 1 Drittel von 3, als die Hälfte von 2, und 2 als die Hälfte von 4 ansehen und benennen.

Zuletzt sprechen sie, indem der Lehrer auf den betreffenden Theil hinzeigt: 1 ist die Hälfte von 2, 1 ist 1 Drittel von 3 ꝛc.

Die schriftliche Darstellung ist:

[•|•]	1 = ½ v. 2	[••|••]	2 = ½ v. 4.
[•|•|•]	1 = ⅓ v. 3		
	u. s. w.		

§. 12. Zerlegen, Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen in Verbindung.

[•]	Eins ist wie viel mal 1?	1 ist 1 × 1.
	Wie viel ist 1 × 1?	1 × 1 = 1.
	Wie oft ist 1 in 1 enthalten?	1 ist in 1 einmal enthalten.
[•|•]	Zwei ist wie vielmal 1?	2 ist 2 × 1.
	Wie viel ist 2 × 1?	2 × 1 = 2.
	Wie oft ist 1 in 2 enthalten?	1 ist in 2 zweimal enthalten.
	Welcher Theil ist 1 von 2?	1 ist die Hälfte von 2.
[•|•|•]	Drei ist wie vielmal 1?	3 ist 3 × 1.
	u. s. w.	u. s. w.

In Ziffern dargestellt:

[•]	1=1×1	1×1=1	1 in 1 = 1×	
[•|•]	2=2×1	2×1=2	1 in 2 = 2×	1 = ½ v. 2
[•|•|•]	3=3×1	3×1=3	1 in 3 = 3×	1 = ⅓ v. 3
[•|•|•|•]	4=4×1	4×1=4	1 in 4 = 4×	1 = ¼ v. 4
[•|•|•|•|•]	5=5×1	5×1=5	1 in 5 = 5×	1 = ⅕ v. 5
[••|••]	4=2×2	2×2=4	2 in 4 = 2×	2 = ½ v. 4

Vorstehendes wird mit stetem Hinblicke auf das entsprechende Zahlenbild in senkrechter und wagrechter Richtung gelesen, dann von den Schülern abgeschrieben und wieder gelesen.

§. 13.

Durch das Bisherige hat der Schüler anschauen, über das Angeschaute sich aussprechen und die verschiedenen Rechenoperationen mit den gebräuchlichen Ausdrücken und Zeichen kennen lernen. Die individuelle Behandlung der Zahlen, bei welcher dieselben Operationen von Stufe zu Stufe koncentrirt sich wiederholen, ist so vorbereitet, daß nunmehr ohne die Besorgniß, der Unterricht möchte die Kraft des Lehrers in zu hohem Grade in Anspruch nehmen oder auch zu langsam fortschreiten, auf sie übergegangen werden kann.

Allseitige Behandlung der einzelnen Zahlen.

Die Zahlen von Eins bis Zehn.

§. 14. Vorbemerkung.

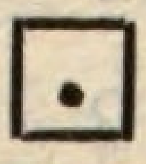
Die bisherigen Uebungen wurden bloß anschaulich getrieben, nicht im Kopfe. Der Unterricht war eigentlich *nur* Anschauungsunterricht. Die Schüler sollten die Zahlen in ihrem vollen Inhalte bloß erkennen lernen, die Elemente derselben aber noch nicht im Gedächtniß festhalten. Von jetzt an werden die Uebungen mit Anschauung so lange fortgesetzt, bis die Elemente unverlierbar eingeprägt und die Schüler im Stande sind, die Operationen mündlich und schriftlich *ohne* Anschauung auszuführen. Auf jeder Stufe heißt es nunmehr: *bis zur Sicherheit und Fertigkeit frei im Kopfe.*

Was die Art und Weise der Veranschaulichung betrifft, so wird die bisherige ihrer Uebersichtlichkeit und des Zusammenhanges wegen beibehalten; außerdem kommen jetzt noch — der Vorbemerkung zu diesem Cursus gemäß — die Münzen, Maße und Gewichte zur Anwendung.

Das *Lehrverfahren* wird nur noch selten, nur bei *neu* Hinzutretendem zu bezeichnen sein.

§. 15.

Die Zahl Eins.



Wie viel ist das? Wie vielmal 1 ist es? Wie viel ist 1 × 1? Wie vielmal ist 1 in 1 enthalten? Wie viel ist 1 — 1?

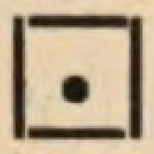
Was ist *einmal* in der Schule? in dem Wohnhause? in der Kirche? im Dorfe? (in der Stadt?)

Mit einem Litermaß in der Hand: Was ist das? Was wird damit gemessen? Wie vielmal 1 Liter ist es? Wie viel ist 1 × 1 Liter? Nachdem das Gefäß mit Wasser gefüllt: Das Litermaß hat nun wie vielmal 1 Liter Wasser in sich? Wie vielmal ist daher 1 Liter in 1 Liter enthalten? (1 Liter ist in 1 Liter *einmal* enthalten.)

Mit 1 Pfennig in der Hand: Was ist das? Wie vielmal 1 ₰. ist es? Wie viel ist 1 × 1 ₰.? Der Pfennig hat (begreift) wie vielmal 1 ₰. in sich? Wie vielmal ist daher 1 ₰. in 1 ₰. enthalten? Wie viel ist 1 ₰. weniger 1 ₰.?

Vorgezeigt und eben so besprochen werden noch die Mark, das Meter und das Kilogramm.

Das Wenige, das mit der Zahl Eins auszuführen ist, wird nun auch in Ziffern dargestellt. Der Lehrer fragt und schreibt die Antworten der Schüler sogleich in Ziffern unter das Zahlenbild.



Eins ist wie vielmal 1?	1 = 1 × 1
Wie viel ist 1 × 1?	1 × 1 = 1
Wie vielmal ist 1 in 1 enthalten?	1 in 1 = 1 ×
Wie viel ist 1 — 1?	1 — 1 = 0 (Null = Nichts.)

Die Darstellung in Ziffern wird von den Schülern einzeln und im Chor wiederholt gelesen und dann ganz so, wie sie steht, einigemal abgeschrieben. Hierauf werden die Ergebnisse weggelöscht und die Schüler aufgefordert, die vier Sätzchen nun auch mit Beifügung der fehlenden Zahlen mehrmals zu schreiben.

§. 16.

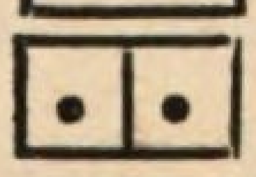
Die Zahl Zwei.

I. Bilden, Zerlegen und die Rechnungsarten.

A. Mündlich.

a. Anschaulich.

Zählt die Punkte, die ich mache! 

Zählt wieder! 

Wie habe ich diese zwei Punkte zerlegt?

2 ist also 1 und wie viel?	2 ist wie vielmal 1?
Wie viel ist 1 + 1?	Wie viel ist 2 × 1?
Wie viel ist 2 — 1? 2 — 2?	Wie vielmal ist 1 in 2 enthalten?
Um wie viel ist 2 größer als 1?	Welcher Theil ist 1 von 2?
Um wie viel ist 1 kleiner als 2?	Wie viel ist die Hälfte von 2?

Auf das erste Zahlenbild zeigend:

Wie vielmal 2 ist das?
Wie viel ist 1 × 2?
Wie vielmal ist 2 in 2 enthalten?

Die beiden Zahlenbilder sind hinreichend, alles das zu veranschaulichen, was mit der Zahl 2 hier ausgeführt wird. Der Lehrer zeigt hin und fragt, und die Schüler antworten. Dieß wird in und außer der Ordnung so lange fortgesetzt, bis Frage und Antwort, letztere stets in einem vollständigen Satze ausgedrückt, rasch auf einander folgen.

Dieselben Uebungen werden dann auch mit andern Dingen, besonders mit den schon bekannten Münzen und Maßen ausgeführt.

2 ₰. = 1 ₰. + 1 ₰. 2 ℳ. = 1 ℳ. + 1 ℳ. $2^m = 1^m + 1^m$ 2 lt = 1 lt + 1 lt
1 ₰. + 1 ₰. = 2 ₰. 1 ℳ. + 1 ℳ. = 2 ℳ. $1^m + 1^m = 2^m$ 1 lt + 1 lt = 2 lt
u. s. w. u. s. w. u. s. w. u. s. w.

Die Münzen werden mit den Händen empor gehalten, oder, was später ohnehin geschehen muß, in die Spalte einer hiezu hergerichteten Leiste geschoben und bald zusammen, bald auseinander gerückt, je nachdem es die Frage des Lehrers mit sich bringt.

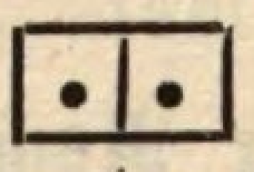
b. Frei im Kopfe.

Dieselben Fragen wie oben unter a, in und außer der Ordnung.
In welche zwei Theile läßt sich die Zahl 2 zerlegen?
Wie viel ist 1 + 1? 2 — 1? 2 — 2?
Um wie viel ist 2 größer als 1? 1 kleiner als 2?
u. s. w.

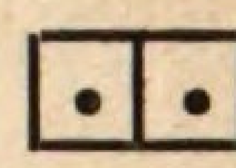
B. Schriftlich.

(Siehe Aufgaben zum Zifferrechnen. Erstes Heft. S. 1.)

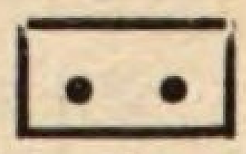
Bei dieser und den folgenden Zahlen zunächst bloß die Aufgaben unter den Zahlenbildern. Der Lehrer fragt die einzelnen Fälle ab und schreibt (nach §. 6) jede Antwort der Schüler in Ziffern und Zeichen unter das entsprechende Zahlenbild.



2 ist 1 und wie viel? 2=1+1
Wie viel ist 1 + 1? 1+1=2
Wie viel ist 2 — 1? 2—1=1
Wie viel ist 2 — 2? 2—2=0



2 ist wie vielmal 1? 2=2×1
Wie viel ist 2 × 1? 2×1=2
Wie vielmal ist 1 in 2? 1 in 2=2×
Wie viel ist ½ von 2? ½ v. 2=1



2 ist wie vielmal 2? 2=1×2
Wie viel ist 1 × 2? 1×2=2
Wie vielmal ist 2 in 2? 2 in 2=1×

Die Anschriebe werden einigemal gelesen. Dann werden die Ergebnisse weggelöscht und die hierdurch sich bildenden Aufgaben von der Wandtafel ab oder aus dem Aufgabenhefte bis zur Sicherheit und Fertigkeit laut vorgerechnet. Und nun erst führen die Schüler die Rechnungen auf ihren Schiefertafeln aus.

So wird zwischen dem mündlichen und dem schriftlichen Rechnen eine Wechselwirkung erzielt, wobei Eines das Andere vorbereitet, übt und befestigt.

Zuletzt kann man mit den Zahlen Namen von Dingen verbinden und z. B. lesen lassen: 2 lt = 1 lt + 1 lt; 1 lt + 1 lt = 2 lt u. s. w.

Um die Schüler an eine wohlgeordnete Darstellung zu gewöhnen, so müssen sie schon auf dieser Stufe dazu angehalten werden.

II. Aufgaben verschiedener Art.

A. Mündlich.

a. Fragen zur weiteren Durcharbeitung der Zahl:

1) Wie viel muß man zu 1 legen, um 2 zu erhalten?
2) Wie viel muß man von 2 wegnehmen, wenn 1 übrig bleiben soll?
3) Welche Zahl ist um 1 größer als 1?
4) Welche Zahl ist um 1 kleiner als 2?
5) Wie vielmal muß ich 1 nehmen, um 2 zu erhalten?
6) In welcher Zahl ist 1 zweimal (einmal) enthalten?
7) Welche Zahl ist 2mal so groß als 1?
8) Welche Zahl ist halb so groß als 2?

b. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Das Zweipfennigstück (der Zweier), verglichen mit dem Pfennig nach Farbe, Stoff, Größe, Dicke und Werth; Werthbezeichnung. Eben so das doppelte und das einfache Markstück.

2) Karl bekommt 1 Zweier, um einen Schieferstift zu kaufen; der kostet 1 ₰.; was muß Karl nach Hause bringen?

3) Wenn man für 1 Pfennig 1 Aprikose erhält, wie viel Aprikosen wird man für 1 Zweier erhalten?

1 Zw. gilt 1 ₰. + 1 ₰. oder 2 × 1 ₰.; dafür erhält man 1 Apr. + 1 Apr. oder 2 × 1 Apr.; 2 × 1 Apr. = 2 Aprikosen. Durch Zeichnung veranschaulicht:

•	•	2 × 1 Pfennig
o	o	2 × 1 Aprikose.

4) 2 Pfennige zusammen (= geschmolzen) geben 1 Zweier; wie vielmal ist daher 1 Pfennig in 1 Zweier enthalten?

5) Aus 1 Mark lassen sich, wenn man sie in 2 gleiche Theile theilt, 2 halbe Mark machen. (Die Münzen werden vorgezeigt). Darum gilt 1 ganze Mark so viel wie 2 halbe Mark, und 2 halbe Mark gelten so viel wie 1 ganze Mark.

6) Wie theilen zwei Schüler unter sich 2 Stahlfedern? wie 1 Apfel? wie 1 Mark? wie 1 Zweier? wie 1 doppeltes Markstück?

Aufg. z. Kopfrechnen für die Hand des Lehrers.

B. Schriftlich.

Siehe erstes Aufgabenheft z. Zifferrechnen. Von den Aufgaben zur Zahl 2 die noch nicht gerechneten, nämlich:

1 + 1 =	1 × 1 =	1 + 1 =
1 − 1 =	2 × 1 =	1 × 2 =
2 − 1 =	1 in 2 =	2 − 2 =
2 − 2 =	2 in 2 =	1 in 2 =

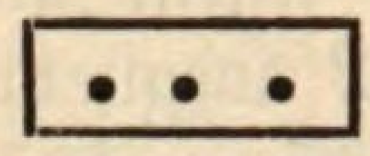
§. 17.

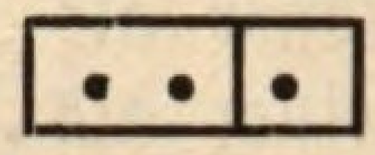
Die Zahl Drei.

I. Bilden, Zerlegen und die Rechnungsarten.

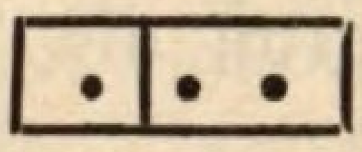
A. Mündlich.

a. Anschaulich.

Zählt die Punkte, die ich mache! 

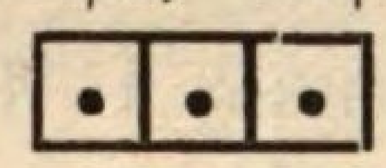
Zählt wieder! 

In was habe ich diese 3 zerlegt? (In 2+1.) Umgekehrt! (In 1+2.)
Wie viel ist 2+1? 1+2? 3−1? 3−2?
Um wie viel ist 3 größer als 2? 2 kleiner als 3?

Zählt wieder! 

In was ist jetzt 3 zerlegt? (In 1+2) Umgekehrt! (In 2+1.)
Wie viel ist 1+2? 2+1? 3−2? 3−3?
Um wie viel ist 3 größer als 1? 1 kleiner als 3?

Nun wird die Zahl 3 als 3 × 1, als 1 × 2 + 1 und als 1 × 3 aufgefaßt. Will man hiezu die schon vorhandenen Zahlenbilder benützen, so verwandelt man das letzte (unterste) derselben in



In wie viel Theile ist die 3 jetzt zerlegt? Sind es gleiche oder ungleiche Theile? Wie viel beträgt jeder Theil?

3 ist wie vielmal 1?
Wie viel ist 3 × 1?
Wie vielmal ist 1 in 3 enthalten?
Welcher Theil ist 1 von 3?
Wie viel ist 1 Drittel von 3?



In wie viel Theile sind hier die 3 Punkte zerlegt? Sind es gleiche oder ungleiche Theile? Welcher Theil ist der größere? Die Eins verdeckend. Wie vielmal 2 ist das? Und das? (Das ist 1 × 2 + 1).

3 ist also wie vielmal 2?
Wie viel ist 1×2+1? (1×2=2, +1=3).
Wie vielmal ist 2 in 3? (1mal, 1 übrig).



Wie viel ist das? Wie vielmal 3 ist es? 3 ist also wie vielmal 3?

Wie viel ist 1 × 3?
Wie vielmal ist 3 in 3?

Dieselben Uebungen, veranschaulicht durch andere Dinge.

---

b. Frei im Kopfe.

Wie oben unter a nämlich:

In welche zwei ungleiche Theile läßt sich 3 zerlegen? Wie viel ist 2+1? 1+2? u. s. w.

3 ist wie vielmal 1? wie vielmal 2? wie vielmal 3? Wie viel ist 3 × 1? Wie vielmal ist 1 in 3 enthalten? u. s. w.

B. Schriftlich.

Siehe Aufgabenheft z. Zifferrechnen. Das Verfahren ist noch dasselbe, wie bei der Zahl 2. (I. B.)

II. Aufgaben verschiedener Art.

A. Mündlich.

a. Fragen zur weiteren Durcharbeitung der Zahl.

Um Wiederholungen zu vermeiden und dem Lehrer es zu erleichtern, diese Fragen selbst zu stellen, so folgt hier eine Zusammenstellung aller möglichen Fälle.

1) Wie viel ist 2+1? 1+2?
Wie viel muß man zu 2 (zu 1) legen, um 3 zu erhalten?
Zu welcher Zahl muß man 1 (2) legen, um 3 zu erhalten?

2) Wie viel ist 3—1? 3—2? 3—3?
Wie viel muß ich von 3 wegthun, um 2 (1) übrig zu haben?
Wie heißt die Zahl: nehme ich 1 davon weg, so bleibt 2 übrig?

3) Wie viel ist 3 mehr als 2? mehr als 1?
Welche Zahl ist um 1 größer als 2? um 2 größer als 1?
3 ist um 1 (um 2) größer, als welche Zahl?

4) Wie viel ist 2 (wie viel ist 1) weniger als 3?
Welche Zahl ist um 1 (um 2) kleiner als 3?
2 ist um 1 kleiner als welche Zahl?

---

5) Wie viel ist 3 × 1? 1 × 3?
Wie vielmal muß ich 1 nehmen, um 3 zu erhalten?
Welche Zahl muß ich 3mal nehmen, um 3 zu erhalten?

6) Wie vielmal ist 1 in 3 (3 in 3) enthalten?
In welcher Zahl ist 1 dreimal (3 einmal) enthalten?
Welche Zahl ist in 3 dreimal (einmal) enthalten?

7) 3 ist wie vielmal so groß als 1?*)
Welche Zahl ist 3mal so groß als 1?
3 ist dreimal so groß als welche Zahl?

*) Zu fragen: 3 ist wie vielmal größer als 1? oder: 1 ist wie vielmal kleiner als 3? was nicht selten geschieht, ist inkorrekt. Denn da 1 nicht einmal größer oder einmal kleiner ist als 1, so ist 3 auch nicht dreimal größer als 1, und 1 nicht dreimal kleiner als 3. Die Ausdrücke: „größer, kleiner, mehr, weniger" dienen zur Bezeichnung des Unterschieds; das Verhältniß dagegen, nämlich das Theilverhältniß, wird durch die Ausdrücke „mal so groß, fach, Theil und tel" bezeichnet. Daran muß fest gehalten werden, wenn nicht Unklarheit und Verwirrung entstehen soll.

8) Welcher Theil ist 1 von 3?
Wie viel ist 1 Drittel von 3?
Von welcher Zahl ist 1 ein Drittel?

Bei dergleichen Aufgaben kommen immer drei Zahlen in Betracht; davon sind zwei gegeben, und eine wird gesucht. Jede derselben kann in Frage stehen. Daher sind bei jeder der 8 verschiedenen Arten von Aufgaben 3 Fälle möglich. Welche hievon für diese Stufe sich eignen, findet sich bei dem Unterrichte von selbst.

b. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Ein Kutscher fährt 2 Herren; wie viel Männer befinden sich auf dem Wagen?

2) Marie hat 3 Aepfel; einen davon ißt sie, und einen schenkt sie her; wie viel hat sie noch?

3) Franz hat 1 Zweier; Karl hat 3 einzelne Pfennige. Wer hat mehr? wie viel? — Wer hat weniger? wie viel?

4) Ein Knabe bezahlt für 1 Pfirsich 1 Pfg.; wie viel muß er für 3 Pfirsiche bezahlen?

5) 3 Brüder theilen unter sich 3 Äpfel; wie viel bekommt jeder? — Wie theilen sie 1 Apfel mit einander?

Aufg. z. Kopfr.

B. Schriftlich.

Siehe Aufgabenheft zum Zifferrechnen.

§. 18.

Die Zahl Vier.

I. Bilden, Zerlegen und die Rechnungsarten.

A. Mündlich.

a. Anschaulich.

Zählt! [• • • •]

Zählt wieder! [• • • | •]

Wie ist 4 hier zerlegt? (In 3 + 1.) Umgekehrt! (In 1 + 3.)
Wie viel ist 3 + 1? 1 + 3? 4 — 1? 4 — 3?
Um wie viel ist 4 größer als 3? 3 kleiner als 4?

Zählt wieder! [• • | • •]

In welche zwei Theile ist diese 4 zerlegt?
Wie viel ist 2 + 2? Wie viel ist 4 — 2?
Um wie viel ist 4 größer als 2? 2 kleiner als 4?

Zählt wieder! [• | • • •]

Wie habe ich diese 4 Punkte abgetheilt? (In 1 + 3, in 3 + 1.)
Wie viel ist 1 + 3? 3 + 1? Wie viel ist 4 — 3? 4 — 1?
Um wie viel ist 4 größer als 1? 1 kleiner als 4?

Nun wird 4 aufgefaßt als 4 × 1, als 2 × 2, als 1 × 3 + 1, als 1 × 4. Um dieß in Zahlenbildern nicht besonders darstellen zu müssen, so verwandelt man das letzte in 4 × 1 und fragt, auf dasselbe, d. i.

1. auf | • | • | • | • | zeigend:
4 ist wie vielmal 1?
Wie viel ist 4 × 1?
Wie vielmal ist 1 in 4?
Welcher Theil ist 1 von 4?
Wie viel ist $^1/_4$ von 4?

2. auf | • • | • • | zeigend:
4 ist wie vielmal 2?
Wie viel ist 2 × 2?
Wie vielmal ist 2 in 4?
Welcher Theil ist 2 von 4?
Wie viel ist $^1/_2$ von 4?

3. auf | • • • | • | zeigend:
4 ist wie vielmal 3?
Wie viel ist 1 × 3 + 1?
Wie vielmal ist 3 in 4?

4. auf | • • • • | zeigend:
Wie vielmal 4 ist das?
Wie viel ist 1 × 4?
Wie vielmal ist 4 in 4?

Dieselben Uebungen, durch andere Dinge veranschaulicht.

---

b. Frei im Kopfe. Die nämlichen Fälle wie oben unter a.
In welche 2 ungleiche Theile läßt sich die Zahl 4 zerlegen?
Wie viel ist 3 + 1? 1 + 3? 4 — 1? 4 — 3?
Um wie viel ist 4 größer als 3? 3 kleiner als 4?
u. s. w.

B. Schriftlich.

Aufg. z. Zifferr. Das Verfahren wie bei der Zahl 2. (I. B.)

II. Aufgaben verschiedener Art.

A. Mündlich.

a. Fragen zur Wiederholung.

1 + 1, 2mal, — 1, — 2, 4mal, die Hälfte, + 1, 1 Drittel, + 3 ꝛc.

Man spricht so, daß die Schüler nach jeder genannten Zahl sogleich die Antwort geben können. Es muß jedoch rasch von Statten gehen.

b. Fragen zur weiteren Durcharbeitung der Zahl.

Man benütze hiezu die Zusammenstellung der möglichen Fälle bei der Zahl 3.

c. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Karl kaufte um 4 Pfg. einen Bilderbogen und legte 2 Geldstücke dafür hin. Und es war richtig. Was für Geldstücke hat er hingegeben?

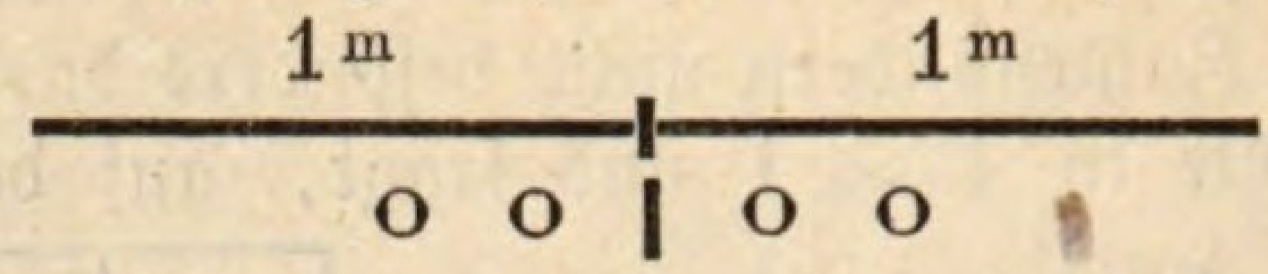
2) Von den Tauben, die auf einem Dache saßen, flogen 3 weg und eine blieb sitzen. Wie viel waren es zuerst?

3) Luise bekam 4 Nüsse; zwei davon hat sie noch; wie viel hat sie gegessen?

4) 1 Apfel kostet 2 Pfg.; wie viel kosten 2 Aepfel?

Anschaulich: o o 2 × 1 Apfel kosten
• • • • 2 × 2 Pfg. = 4 Pfg.

5) 2 Meter Zeug kosten 4 Mark; wie viel kostet 1 Meter?

Anschaulich:  $1^m = \frac{1}{2}$ von 2^m; $\frac{1}{2}$ von 4 ℳ = 2 ℳ

Die Veranschaulichung wird mit dem Metermaße und einer 2 Meter langen Schnur ausgeführt.

Aufg. z. Kopfr.

B. Schriftlich.

Von den Aufgaben im Zifferrechenhefte zur Zahl 4 die noch nicht gerechneten. Die Schüler nehmen ihr Aufgabenheft zur Hand und einer nach dem andern liest und rechnet eine Aufgabe daraus vor. Dann wird es von ihnen auf den Schiefertafeln ausgeführt, zuerst in der Schule, dann zu Hause.

§. 19.
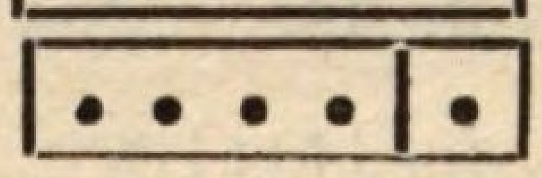
Die Zahl Fünf.

I. Bilden, Zerlegen und die Rechnungsarten.

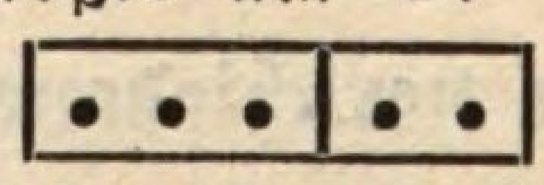
A. Mündlich.

a. Anschaulich.

Zählt die Punkte! 

Zählt wieder! 

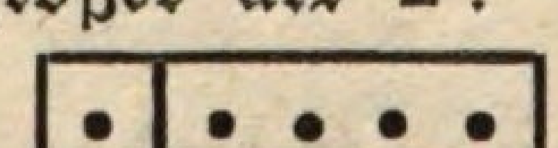
In welche 2 Theile ist diese 5 zerlegt? (In 4 + 1 oder 1 + 4.)
Wie viel ist 4 + 1? 1 + 4? 5 — 1? 5 — 4?
Um wie viel ist 5 größer als 4? 4 kleiner als 5?

Zählt wieder! 

Wie ist 5 hier zerlegt? (In 3 + 2 oder 2 + 3.)
Wie viel ist 3 + 2? 2 + 3? 5 — 2? 5 — 3?
Um wie viel ist 5 größer als 3? 3 kleiner als 5?

Zählt! 

Wie ist jetzt 5 abgetheilt? (In 2 + 3 oder 3 + 2.)
Wie viel 2 + 3? 3 + 2? 5 — 3? 5 — 2?
Um wie viel ist 5 größer als 2? 2 kleiner als 5?

Zählt wieder! 

Wie habe ich diese 5 zerlegt? (In 1 + 4 oder 4 + 1.)
Wie viel ist 1 + 4? 4 + 1? 5 — 4? 5 — 1?
Um wie viel ist 5 größer als 1? 1 kleiner als 5?

In welche zwei Theile läßt sich 5 zerlegen? (In 4 + 1 oder 1 + 4, und in 3 + 2 oder 2 + 3.) Wo ist 5 in 4 + 1 oder 1 + 4 zerlegt? Wo in 3 + 2 oder 2 + 3?

Nun wird 5 als 5 × 1, 2 × 2 + 1, 1 × 3 + 2, 1 × 4 + 1 und als 1 × 5 aufgefaßt und demgemäß das letzte Zahlenbild in 5 × 1, das vorletzte in 2 × 2 + 1 abgeändert.

1. Auf | • | • | • | • | • | zeigend:
5 = ? × 1
5 × 1 = ?
1 in 5 = ?
1 = ? v. 5
$^1/_5$ v. 5 = ?

2. Auf | • • | • • | • | zeigend:
5 = ? × 2
2 × 2 = ?
2 × 2 + 1 = ?
2 in 4 = ?
2 in 5 = ?

3. Auf | • • • | • • | zeigend:
5 = ? × 3
1 × 3 + 2 = ?
3 in 5 = ?

4. Auf | • • • • | • | zeigend:
5 = ? × 4
1 × 4 + 1 ?
4 in 5 = ?

5. Auf | • • • • • | zeigend:
5 = ? × 5
1 × 5 = ?
5 in 5 = ?

Aus wie vielmal 1, 2, 3, 4, 5 besteht die Zahl 5? Wo ist 5 in 5 × 1 zerlegt? Wo in 2 × 2 + 1? u. s. w.

Dieselben Uebungen, durch andere Dinge veranschaulicht.

---

b. Frei im Kopfe. Die nämlichen Fälle wie oben anschaulich.
5 ist 4 und wie viel? Wie viel ist 4 + 1? 1 + 4? 5 — 1? 5 — 4?
5 ist 3 und wie viel? Wie viel ist 3 + 2? 2 + 3? 5 — 2? 5 — 3?
In welche zwei Theile läßt sich die Zahl 5 zerlegen?
Um wie viel ist 5 größer als 4? größer als 3? als 1? als 2?
Um wie viel ist 4 (2, 3, 1) kleiner als 5?
5 ist wie vielmal 1? wie vielmal 2? 3? 4? 5?
Wie vielmal sind diese Zahlen in 5 enthalten?

B. Schriftlich.

Aufg. z. Zifferrechnen. Sowohl mündlich, als schriftlich.

II. Aufgaben verschiedener Art.

A. Mündlich.

a. Fragen zur Wiederholung.
Wie viel ist 1 + 2 + 2 — 1 — 2, 2mal, die Hälfte, + 3, — 2, $^1/_3$ ꝛc.

b. Fragen zur weiteren Durcharbeitung der Zahl.
Mit Benützung der Zusammenstellung der möglichen Fälle. §. 17.

c. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Das Fünfpfennigstück, verglichen mit dem Ein- und dem Zweipfennigstück nach Farbe, Stoff, Größe und Werth. Werthbezeichnung.

2) Ein Schüler kauft sich für 5 Pfg. einen Bleistift; mit welchen Geldstücken kann er die 5 Pfg. bezahlen?

3) Fritz erhält 1 Fünfpfennigstück, um ein Dreipfennigbrod zu holen; wie viel Geld muß er heraus bekommen?

Eben so mit dem Fünfmarkstück.

4) 2 Stücke nennt man ein Paar. Was versteht man unter 1 Paar Tauben? 1 Paar Handschuhe? 1 Paar Pferde? 1 Paar Schuhe?

5) Warum kauft man sich immer 1 Paar Schuhe? (Handschuhe, Ohrenringe?)

6) 5 Pferde sind wie viel Paare? — 5 halbe Mark, wie viel ganze? 5 einfache Mark, wie viel doppelte?

B. Schriftlich.

Aufg. z. Zifferrechnen. Sowohl mündlich, als schriftlich.

§. 20.

Die Zahl Sechs.

I. Bilden, Zerlegen und die Rechnungsarten.

A. Mündlich.

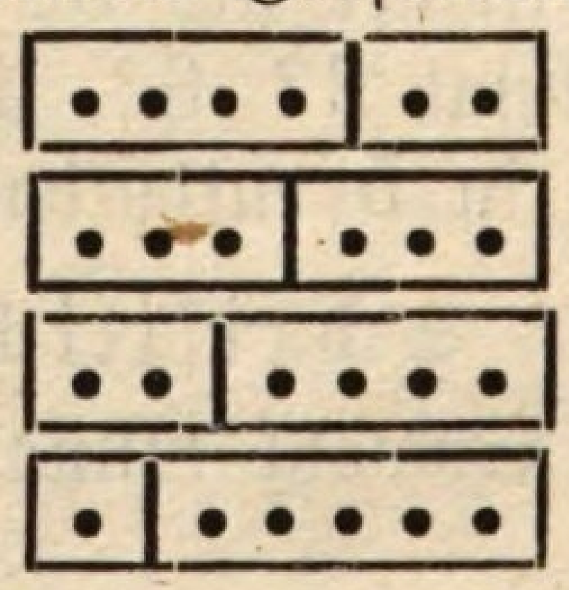
a. Anschaulich.

Zählt die Punkte!  (1, 2, 3, 4, 5.)

Zu diesen 5 Punkten mache ich noch einen. Wie viel sind es jetzt? Und nun zählt noch einmal!

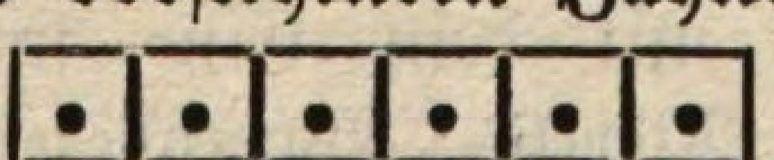
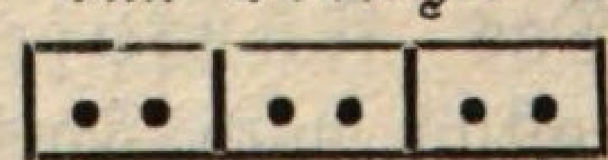
Zählt wieder! 

Wie habe ich diese 6 Punkte zerlegt? (In 5 + 1 oder 1 + 5.)
Wie viel ist 5 + 1? 1 + 5? 6 — 1? 6 — 5?
Wie viel ist 6 mehr als 5? 5 weniger als 6?
Eben so werden die folgenden Zerfällungen behandelt.



Zuletzt:
In welche zwei Theile ist 6 zerlegt? (In 5 + 1 oder 1 + 5 ꝛc.)
In meinen zwei Händen habe ich 6 Pfg., wie viel in jeder?
Wenn 2 (4, 1, 5, 3) davon in der einen Hand sind, wie viel dann in der andern?

Nun wird 6 als 6 × 1, 3 × 2, 2 × 3, 1 × 4 + 2, 1 × 5 + 1 und als 1 × 6 aufgefaßt. Zu diesem Zwecke verwandelt man das letzte der vorstehenden Zahlenbilder in 6 × 1 und das vorletzte in 3 × 2.

1. Auf  zeigend:	2. Auf  zeigend:
6 = ? × 1	6 = ? × 2
6 × 1 = ?	3 × 2 = ?
1 in 6 = ?	2 in 6 = ?
1 = ? v. 6	2 = ? v. 6
$^1/_6$ v. 6 = ?	$^1/_3$ v. 6 = ?

Eben so die übrigen Fälle.

Zuletzt: Aus wie vielmal 1, 2, 3, 4, 5, 6 besteht die Zahl 6? Wo ist 6 in 6×1 zerlegt? Wo in 2×3? in 3×2? u. s. w.

Dieselben Uebungen werden auch an der Rechenmaschine ausgeführt, auf zweierlei Weise: zuerst operirt der Lehrer und die Schüler sprechen; dann stellt der Lehrer die Forderung oder die Fragen, und ein Schüler führt sie aus. Z. B.

Der Lehrer zerlegt die 6 Kugeln in $5 + 1$, und die Schüler sprechen: $6 = 5 + 1$; er vereinigt sie wieder, und die Schüler sprechen: $5 + 1 = 6$; er zerlegt sie in $2 + 2 + 2$, und die Schüler sprechen: $6 = 3 \times 2$; er vereinigt sie wieder, und die Schüler sprechen: $3 \times 2 = 6$, u. s. w.

Zerlege 6 in $5 + 1$! Der Schüler thut es und spricht: $6 = 5 + 1$. Vereinige diese Theile wieder! Der Sch. thut es und spricht: $5 + 1 = 6$. Zerlege 6 in 3 gleiche Theile! Der Schüler thut es und spricht: $6 = 3 \times 2$. Vereinige diese Theile wieder! Der Sch. thut es und spricht: $3 \times 2 = 6$, u. s. w.

Nach diesen Uebungen lernen die Schüler die Ziffer 6 kennen und schreiben. Das Zeichen 6 heißt Sechs und bedeutet sechsmal Eins oder Sechs. — Damit die Schüler der Ziffer 6 die rechte Höhe geben, so lasse man immer 0 und 6 neben einander schreiben.

---

b. Frei im Kopfe. Dieselben Fälle wie oben unter a. Also:

6 ist 5 und wie viel? Wie viel ist $5 + 1$? $1 + 5$? $6 - 1$? $6 - 5$? Um wie viel ist 6 größer als 5? 5 kleiner als 6?

6 ist 4 und wie viel? Wie viel ist $4 + 2$? $2 + 4$? $6 - 2$? $6 - 4$? Um wie viel ist 6 größer als 4? 4 kleiner als 6?

u. s. w.

B. Schriftlich.

Aufg. z. Zifferrechnen. Mündlich und schriftlich.

II. Aufgaben verschiedener Art.

A. Mündlich.

a. Fragen zur Wiederholung.

$4 + 2$, die Hälfte, $+ 1$, 2 ab, 3mal, 1 Drittel, $+ 4$, 1 Sechstel, $+ 2$, 2mal, 3 ab, $+ 1$, die Hälfte ꝛc.

b. Fragen zur weiteren Durcharbeitung der Zahl.

Mit Anwendung der Zusammenstellung unter §. 17.

c. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

Aufgaben dieser Art finden sich in dem Aufgabenheft zum Kopfrechnen in hinreichender Anzahl. Auch kann sie der Lehrer selbst leicht bilden. Es folgen daher nur noch einige Beispiele, welche ersehen lassen, wie dergleichen Aufgaben zu behandeln sind.

1) 3 Knaben erhalten 6 Ostereier, welche sie gleichheitlich theilen sollen; wie viel bekommt einer davon?

Die Knaben sollen die 6 Ostereier gleichheitlich theilen; es soll einer so viel bekommen wie der andere. In wie viele gleiche Theile müssen sie die 6 Eier theilen? Warum? Ich zeichne nun 6 Eier an die Wandtafel, und ihr zeigt mir, wie sie zu vertheilen sind.

o o | o o | o o

3 Knaben, 3 gleiche Theile; also erhält
1 Knabe den 3. Theil von 6 Eiern = 2 Eier.

2) 2 Kilogramm Kaffee kosten 6 Mark; wie viel kostet 1 Kilogr.?

Damit wir finden, was 1 Kilogr. kostet, so vertheilen wir die 6 Mark auf die 2 Kilogramm und sehen zu, was auf 1 Kilogr. kommt.

|_____|_____| 2 Kilo = 1 Kilo + 1 Kilo
o o o | o o o 6 M. = 3 M. + 3 M.

Welcher Theil ist 1 Kilogr. von 2 Kilogr.? (Der halbe Theil.) Darum kommt auf 1 Kilogr. auch nur der halbe Theil von 6 Mark. Wir sprechen daher: „Wenn 2 Kilogr. 6 M. kosten, so kostet 1 Kilogr. den halben Theil von 6 M. Der halbe Theil von 6 M. = 3 M. Also kostet 1 Kilogr. Kaffee 3 M. (Wiederholt.)

3) Ein Vater vertheilt unter seine Kinder 6 Pfirsiche und gibt jedem 2; wie viel Kinder sind es?

Wie viel Pfirsiche vertheilt der Vater? Und wie viel gibt er jedem Kinde? Bei dem ältesten fängt er an. Wie viel gibt er diesem? (2.) Wovon nimmt er die 2 Pfirsiche weg? Wie viel Pfirsiche hat er jetzt noch? (Noch 4.) Nun gibt er dem zweiten Kinde auch zwei Pfirsiche. Wovon nimmt er diese weg? Und wie viel hat er jetzt noch? (Noch 2.) Diese nimmt er und gibt sie dem dritten Kinde.

Wie vielmal hat der Vater 2 Pfirsiche von den 6 Pfirsichen wegnehmen können? (3mal.) Wie viel Kinder sind es also? (3 Kinder.)

Anschaulich: o o | o o | o o

Bei diesem Verfahren bringen die angewandten Aufgaben die betreffende Zahl und Operation wiederholt zur Anschauung und verstärken hierdurch die bereits gewonnenen Eindrücke. Außerdem beleben sie den Unterricht, bilden die Urtheilskraft und verbinden die Schule mit dem Leben. Daß sie also schon auf dieser Stufe vorzukommen haben, steht außer Frage. Hauptsache ist und bleibt jedoch vorläufig die Durcharbeitung der Zahl an sich und die hierdurch bedingte Sicherheit und Fertigkeit im Operiren. Zunächst und vor Allem suche man daher die Belebung und das Bildende des Rechenunterrichts in der Zahl selbst und in ihrer Be=

handlung. Dann sind angewandte Aufgaben auch erst recht am Platze, und sie werden ihren Zweck um so mehr erfüllen, wenn man den Erfolg nicht sowohl in ihrer Anzahl, in dem Wieviel, als vielmehr in der rechten Art und Weise, sie zu behandeln, sucht. Darum sei hier das in der Vorbemerkung (Seite 1 bis 4, Ziffer 5) Gesagte nochmal an's Herz gelegt.

§. 21.

Wie die einzelnen Zahlen von 1 bis 6, so werden auch die Zahlen 7, 8, 9 und 10 behandelt. Gang und Verfahren sind aus dem Bisherigen bekannt, und den Uebungsstoff bieten die Aufgabenhefte zum Kopf- und zum Zifferrechnen.

§. 22.

Bei der Zahl 10 wird das Zehnpfennigstück vorgezeigt und mit dem Fünfpfennigstück nach Größe, Dicke, Stoff und Geltung verglichen.

Auch das Zehnmarkstück (die Krone) lernen die Schüler hier kennen. In Bezug auf Größe und Farbe wird es verglichen mit dem Pfennig, in Bezug auf Stoff und Werth mit der Mark, mit dem Zwei- und Fünfmarkstück.

Bei dieser Zahl erhalten die Schüler auch einen Begriff von Einer und Zehner.

Anstatt Eins sagt man auch Einser oder Einer. Die Zahl 2 = 1 + 1; sie besteht also aus 2 Einern. Die Zahl 3 = 1 + 1 + 1; sie hat 3 Einer u. s. w.

Zehn Einer zusammen nennt man 1 Zehner. Sind 9 Eimer auch 1 Zehner? Wie viel fehlt daran? — Wie viel Einer muß man zu 8 (zu 6, zu 4, zu 2, zu 7, zu 5, zu 3, zu 1) Einer legen, um einen vollen Zehner zu erhalten?

| • • • • • • • • • • |

= 1 Zehner und 0 Einer, geschrieben 10.

Was bedeutet die Ziffer 1, wenn sie allein (1) steht? Was bedeutet sie, wenn zu ihrer Rechten eine Null steht? (10) Schreibt 1 Einer! 1 Zehner!

Uebersicht und Wiederholung der bisherigen Uebungen innerhalb des ganzen ersten Zehners.

§. 23. Vorbemerkung.

Die bereits vorgekommenen Operationen werden nun zur möglichst großen Sicherheit und Fertigkeit gebracht. Dabei steht die äußere Anschauung im Hintergrund. Sie tritt nur dann hervor, wenn sich bei einem oder dem andern Schüler findet, daß seinem Bewußtsein etwas entwichen ist. Außerdem muß derselbe sich jede Zahl mit der Menge ihrer Einer im Geiste vorstellen, er muß sie also innerlich anschauen und mit der reinen Zahl operiren.

§. 24. Zählen.

1) Auf= und Abwärtszählen zwischen 1 und 10.
2) Welche Zahl steht vor 4? nach 4? vor 7? nach 7? ꝛc.
3) Zwischen welchen zwei Zahlen steht 6? 9? 4? ꝛc.
4) Welche Zahlen stehen zwischen 2 und 6? zwischen 5 und 8? ꝛc.

§. 25. Zerlegen in Posten.

In welche 2 Theile läßt sich die Zahl 2 zerlegen? (In 1 + 1.) Sind dieß zwei gleiche, oder zwei ungleiche Theile?

In welche 2 Theile kann die Zahl 3 zerlegt werden? (In 2 + 1 oder 1 + 2.) Was für Theile sind dieß: gleiche oder ungleiche?

Wie läßt sich die Zahl 4 zerlegen? (In 3 + 1, 2 + 2, 1 + 3.) Was für Theile sind dieß? (2 + 2 sind gleiche Theile, 3 + 1 und 1 + 3 sind ungleiche Theile.)

Sind sämmtliche Zahlen bis 10 in dieser Weise durchgesprochen, so nehmen die Schüler ihr Rechenheft zur Hand und lesen die betreffenden Aufgabenreihen (S. 11 Nro. 1 und 2) mit Angabe der fehlenden Zahlen einzeln und im Chore vor. Hierauf folgt die Ausführung auf der Schiefertafel.

§. 26. Zusammenzählen.

Mit 1.

Wie viel ist 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1, 5 + 1, 6 + 1, 7 + 1?

Ich nenne Zahlen, und ihr zählt immer Eins dazu.

6! (6+1=7.) 4! (4+1=5.) 8! (8+1=9.) 3! (3+1=4.) ꝛc.

Die Zahlen, die ich jetzt nenne, sollt ihr zu Eins zählen.

6! (1+6=7.) 4! (1+4=5.) 9! (1+9=10.) 5! (1+5=6.) ꝛc.

Mit 2.

1 + 2, 3 + 2, 5 + 2, 7 + 2; 2 + 2, 4 + 2, 6 + 2, 8 + 2.

Nun zählt ihr zu jeder Zahl, die ich nenne, immer 2.

6! (6+2=8.) 3! (3+2=5.) 7! (7+2=9.) 4! (4+2=6.) ꝛc.

Nachhilfe für schwache Schüler: 6 + 2 = ? 6 + 1 = 7, + 1 = 8; 6 + 2 = 8.

Die Zahlen, welche ich jetzt nenne, sollt ihr zu 2 zählen.

1! (2+1=3.) 3! (2+3=5.) 5! (2+5=7.) 4! (2+4=6.) ꝛc.

3 + 3 = ? 3 + 3 (= 2 × 3) = 6.
4 + 4 = ? 4 + 4 (= 2 × 4) = 8.
5 + 5 = ? 5 + 5 (= 2 × 5) = 10.

Der Schüler ist anzuleiten, das Eingeklammerte sich bloß zu denken.

Besonders einzuüben sind folgende Fälle:

3+4 (=3+3+1) = 7	5+3 (=4+4) = 8
4+3 (=3+4) = 7	3+5 (=4+4) = 8
4+5 (=4+4+1) = 9	7+3 (=7+1+2) = 10
5+4 (=4+5) = 9	3+7 (=7+3) = 10
6+3 (=3×3) = 9	6+4 (=6+2+2) = 10
3+6 (=3×3) = 9	4+6 (=4+4+2) = 10

Dann Folgendes:

a. $1 + ? = 2$ $1 + ? = 3$ $7 + ? = 10$ $4 + ? = 6$ $6 + ? = 8$
$2 + ? = 4$ $3 + ? = 6$ $5 + ? = 9$ $3 + ? = 10$ $2 + ? = 6$

Man fragt: Wie viel muß ich zu 1 legen, um 2 zu erhalten? Wie viel zu 2, um 4 zu bekommen? Wie viel zu 4, um 8 zu haben? ꝛc.

b. $? + 1 = 2$ $? + 3 = 6$ $? + 5 = 10$ $? + 2 = 8$ $? + 3 = 10$
$? + 2 = 4$ $? + 4 = 8$ $? + 4 = 9$ $? + 6 = 8$ $? + 7 = 9$

Zu welcher Zahl muß ich 1 legen, um 2 zu erhalten? Oder: Wie heißt die Zahl, wenn ich 1 dazu lege, so erhalte ich 2? ꝛc.

Aufg. z. Ziffern. S. 11 Nr. 3 u. 4. (Mündlich und schriftlich.)

§. 27. Abziehen.

Mit 1.

10 — 1, 9 — 1, 8 — 1, 7 — 1, 6 — 1, 5 — 1, 4 — 1, 3 — 1, 2 — 1.

Ich nenne Zahlen, und ihr zieht 1 davon ab.

5! ($5 - 1 = 4$.) 8! ($8 - 1 = 7$.) 6! ($6 - 1 = 5$.) 4! ($4 - 1 = 3$) ꝛc.

Mit 2.

10 — 2, 8 — 2, 6 — 2, 4 — 2, 2 — 2; 9 — 2, 7 — 2, 5 — 2, 3 — 2.

Nun zieht ihr von jeder Zahl, die ich nenne, immer 2 ab.

9! ($9 - 2 = 7$.) 5! ($5 - 2 = 3$.) 10! ($10 - 2 = 8$.) 7! ($7 - 2 = 5$.) ꝛc.

Ebenso mit 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Das unter §. 26 für einzelne Fälle im Addiren Angegebene läßt sich theilweise auch hier anwenden.

Zuletzt Folgendes:

a. $4 - ? = 2$ $10 - ? = 5$ $6 - ? = 4$ $8 - ? = 5$ $10 - ? = 3$
$6 - ? = 3$ $7 - ? = 6$ $10 - ? = 7$ $8 - ? = 3$ $9 - ? = 5$

Man fragt: Wie viel muß ich von 4 wegnehmen, damit 2 übrig bleibt? Wie viel von 6, damit 3 übrig bleibt? ꝛc.

b. $? - 2 = 4$ $? - 4 = 3$ $? - 6 = 3$ $? - 8 = 2$ $? - 2 = 5$
$? - 4 = 5$ $? - 5 = 2$ $? - 2 = 6$ $? - 3 = 6$ $? - 7 = 3$

Man fragt: Wie heißt die Zahl: wenn ich 2 davon wegnehme, so bleibt 4 übrig? Oder: Karl ißt 2 Nüsse und hat dann noch 4; wie viel Nüsse hat er gehabt?

Aufg. z. Ziffern. S. 12 Nr. 5 und 6. (Mündl. und schriftl.)

Im Anschlusse hieran werden auch die Aufgaben Nr. 7 bis 12 gerechnet. Es wird jedoch ausdrücklich bemerkt, daß das schriftliche Rechnen nicht früher eintreten darf, bis die Aufgaben sicher und fertig frei im Kopfe gerechnet werden können.

§. 28. Zusammenzählen und Abziehen in Verbindung.

a. $4 + 5 - 8 = ?$ b. $5 - 3 + 6 = ?$

Die Form für die mündliche und schriftliche Ausrechnung dieser Aufgaben ist folgende:

a.	b.
$4 + 5 = 9$	$5 - 3 = 2$
$9 - 8 = 1$	$2 + 6 = 8$
$4 + 5 - 8 = 1$	$5 - 3 + 6 = 8$

Das sind kurze und einfache Schlüsse, wodurch nicht nur das Nachdenken, sondern auch das Sprechvermögen der Kinder außerordentlich geübt wird. Darum halte man darauf. Der Unterricht im Rechnen muß auch sprachbildend sein. Und er kann es sein, wie nicht leicht ein anderer. Auf keinem anderen Gebiete des Unterrichts ist es möglich, die Kinder Alles, was sie angeschaut, aufgefaßt und sich klar vorgestellt haben, in dem Maße genau sprachlich darstellen zu lehren, wie auf dem Gebiete des Rechenunterrichts. Auf keinem andern Gebiete des Unterrichts können schon die kleinsten Schulkinder so selbstständig Vorstellungen, Urtheile und Schlüsse bilden und die ganze Thätigkeit ihrer noch so unentwickelten Denkkraft so zusammenhängend und erschöpfend darstellen lernen, als auf diesem; denn ihre sprachliche Mittheilung besteht hier lediglich in einem Beschreiben oder Erzählen dessen, was sie gleichzeitig wirklich thun oder so eben gethan haben.

Aufg. z. Zifferr. S. 13. Nr. 13 u. 14. (Mündl. u. schriftl.)

§. 29. Bestimmen des Unterschiedes.

Zwei gerade Linien von einerlei Länge, zwei Kugeln von einerlei Größe, die Zahlen 3 und 3 2c. sind einander gleich. Eine kleinere und eine größere gerade Linie, eine kleinere und eine größere Kugel, die Zahlen 2 und 3 2c. sind nicht einander gleich; sie unterscheiden sich von einander.

Wodurch unterscheiden sich diese zwei (ungleich langen) Schieferstifte von einander? Wodurch sich diese zwei Linien? Wodurch können sich zwei Häuser von einander unterscheiden? Wodurch zwei Bäume? Wodurch zwei Zahlen? Wodurch unterscheiden sich z. B. die Zahlen 5 und 8 von einander? (8 ist um 3 größer als 5, und 5 ist um 3 kleiner als 8. Die Zahlen 5 und 8 unterscheiden sich also um 3 von einander. Der Unterschied zwischen 5 und 8 ist 3.)

Um wie viel unterscheiden sich von einander die Zahlen

3 u. 9?	9 u. 6?	10 u. 3?	2 u. 3?	4 u. 7?
2 u. 6?	6 u. 5?	2 u. 5?	4 u. 1?	6 u. 10?

Dann folgende Fragen:

a. Welche Zahl ist um 1 größer als 2? als 4? als 6? 2c.
„ „ „ „ 1 kleiner als 2? als 4? als 6? 2c.
Welche Zahl ist um 2 größer als 1? als 3? als 5? 2c.
„ „ „ „ 2 kleiner als 9? als 7? als 5? 2c.
u. s. w.

b. Die Zahl 2 ist um 1 größer als welche andere Zahl?
" " 2 " " 1 kleiner " " " "
u. s. w.

§. 30. Zerlegen, Vervielfachen, Enthaltensein und Theilen.

1) Durchgeführt mit den einzelnen Zahlen.
$2 = 2 \times 1$; $2 \times 1 = 2$; 1 in 2 = 2mal; $\frac{1}{2}$ von 2 = 1.
$2 = 1 \times 2$; $1 \times 2 = 2$; 2 in 2 = 1mal.
Eben so mit den übrigen Zahlen des Zehners.
2) Das Zerlegen in gleiche Theile.
$2 = 2 \times 1$; $3 = 3 \times 1$; $4 = 4 \times 1$, $4 = 2 \times 2$ u. s. w.
3) Das Vervielfachen.
a. 1×2, 2×2, 3×2, 4×2, 5×2.
b. 2×1, 2×2, 2×3, 2×4, 2×5.
Eben so mit 3, 4, 5.
4) Das Enthaltensein, ohne Rest.
1 in 1; 1 in 2, 2 in 2; 1 in 3, 3 in 3; 1 in 4, 2 in 4, 4 in 4 rc.
5) Das Theilen.
$\frac{1}{2}$ von 2, 4, 6, 8, 10; $\frac{1}{3}$ von 3, 6, 9; $\frac{1}{4}$ von 4, 8; rc.
6) Zerlegen und Enthaltensein mit Rest.
$5 = ? \times 2$; 2 in 5; $7 = ? \times 2$, 2 in 7; $7 = ? \times 3$, 3 in 7 rc.
Aufg. z. Zifferr. S. 14, Nr. 1—18. Mündlich und schriftlich.

§. 31. Fortsetzung.

Fragen zur Erschöpfung der möglichen Fälle. Bloß mündlich.

1) Wie vielmal ist 3 zu nehmen, um 9 zu erhalten?
2) Welche Zahl ist 4mal zu nehmen, um 8 zu erhalten?
3) In welcher Zahl ist 3 zweimal enthalten?
4) Welche Zahl ist in 10 fünfmal enthalten?
5) Welche Zahl ist 2mal so groß als 4?
6) 9 ist dreimal so groß als welche Zahl?
7) Welcher Theil ist 2 von 8?
8) Von welcher Zahl ist 3 der dritte Theil?

Diese Fragen kann der Lehrer von Fall zu Fall leicht selbst vermehren.

§. 32. Zusammengesetzte Aufgaben.

1) Wie viel ist $4 \times 2 + 1$? $4 \times 2 - 1$?
Der Schüler antwortet: $4 \times 2 = 8$, $8 + 1 = 9$; $4 \times 2 + 1 = 9$.
2) Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 8 + $\frac{1}{4}$ von 8?
Der Schüler antwortet: $\frac{1}{2}$ v. 8 = 4, und $\frac{1}{4}$ v. 8 = 2; 4 + 2 = 6.
3) Wie viel ist 10 — $\frac{1}{2}$ von 8?
Der Schüler antwortet: $\frac{1}{2}$ v. 8 = 4; 10 — 4 = 6.
4) Wie groß ist der Unterschied zwischen $\frac{1}{2}$ v. 10 und $\frac{1}{3}$ v. 6?
Antwort: $\frac{1}{2}$ von 10 = 5, und $\frac{1}{3}$ von 6 = 2; 5 — 2 = 3.
S. Aufgaben z. Kopf- und Zifferr.

§. 33. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Karl hat 3 Pfg.; Fritz hat 2 Pfg. mehr; wie viel haben beide zusammen?

2) August erhält ein Zehnpfennigstück, um für 6 Pfg. eine Muskatnuß und für 3 Pfg. Pfeffer zu holen. Wie viel Geld muß er wieder mitbringen?

3) Von 2 Brüdern, Karl und Fritz, hat jeder 5 Nüsse; Karl gibt an Fritz 2 ab; wie viel hat jetzt Fritz mehr als Karl?

4) 1 Bogen Papier kostet 2 Pfg.; was kosten 2, 3, 4, 5 Bogen?

5) Was kostet 1 ^{m}, wenn 2 ^{m} 8 Mark (3 ^{m} 9 *M.*) kosten?

6) Wie viel Vögel sind in 1 Neste, wenn 6 (8, 10) Aeuglein heraus schauen?

Weitere Aufgaben bietet das Kopfrechenheft.

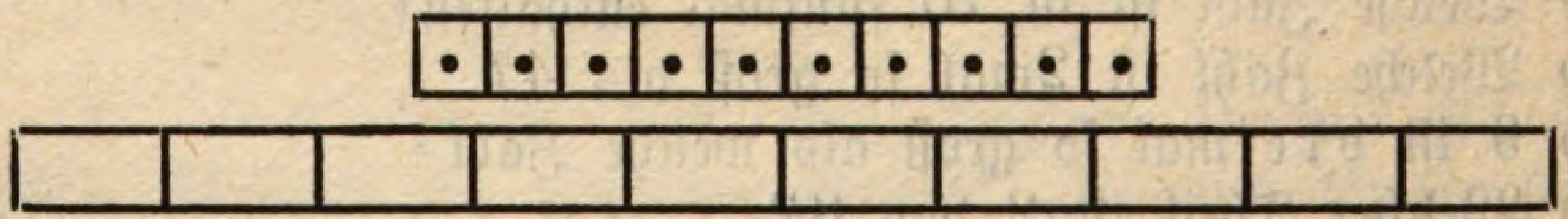
Bei schwierigen Fällen wird durch Veranschaulichung oder durch katechetische Behandlung nachgeholfen.

§. 34. Abtheilung des Meter in Decimeter.

Mit dem Metermaße in der Hand: Was thut man damit? Um auch ein Stück Band oder sonst Etwas messen zu können, das kein ganzes Meter lang ist, so theilt man das Metermaß ab.

Der Lehrer theilt nun zuerst das Metermaß selbst durch einen Strich mit der Kreide in 2 gleiche Theile und zeigt den Schülern, wie groß $^1/_2$ Meter ist. Dann zeichnet er an der Wandtafel das Metermaß in wirklicher Größe ab, theilt es auch in 2 gleiche Theile und läßt sich von den Kindern zeigen, wie groß das ganze Meter ist und wie groß das halbe.

Unter seiner Hand entsteht hierauf, indem er sowohl 10 Punkte, als das Meter in 10 gleiche Theile theilt, folgende Darstellung:



Zählt die Punkte! Zählt auch die Theile, in welche nun das Meter abgetheilt ist! Auf den ersten Punkt zeigend: Welcher Theil ist diese Eins von Zehn? ($^1/_{10}$.) Auf den ersten Theil des Meters zeigend: Und welcher Theil von dem Meter ist das? (Auch $^1/_{10}$.)

Zeige du mir $^1/_{10}$ von 10? $^3/_{10}$! $^5/_{10}$! $^8/_{10}$! — Zeige mir $^1/_{10}$ ($^3/_{10}$, $^5/_{10}$, $^8/_{10}$) von dem Meter!

Welches Stück beträgt $^2/_{10}$ Meter? Welches beträgt $^4/_{10}$ Meter? Welches $^6/_{10}$ Meter? Welches 8 Zehntelmeter?

Anstatt Zehntelmeter sagt man auch Decimeter.

Die Zehntelmeter oder Decimeter werden nun ganz so wie die Zahl 10 behandelt. Zu dem Zwecke zerlegt man durch Verlängerung der entsprechenden Abtheilungsstriche die 10 Decimeter einmal in 9 + 1 ^{dm}, dann in 8 + 2 ^{dm}, hierauf in 7 + 3 ^{dm} u. s. w. und die Schüler sprechen:

$10^{dm} = 9^{dm} + 1^{dm}$ oder $1^{dm} + 9^{dm}$
$9^{dm} + 1^{dm} = 10^{dm}$; $1^{dm} + 9^{dm} = 10^{dm}$
$10^{dm} - 1^{dm} = 9^{dm}$; $10^{dm} - 9^{dm} = 1^{dm}$
10^{dm} sind um 1^{dm} größer als 9^{dm}
$10^{dm} = 8^{dm} + 2^{dm}$ oder $2^{dm} + 8^{dm}$
$8^{dm} + 2^{dm} = 10^{dm}$; $2^{dm} + 8^{dm} = 10^{dm}$
u. s. w.

Hierauf:

$10^{dm} = 10 \times 1^{dm}$
$10 \times 1^{dm} = 10^{dm}$
1^{dm} ist in 10^{dm} $10 \times$
1^{dm} ist $^1/_{10}$ von 10^{dm}

$10^{dm} = 5 \times 2^{dm}$
$5 \times 2^{dm} = 10^{dm}$
2^{dm} sind in 10^{dm} $5 \times$
2^{dm} sind $^1/_5$ von 10^{dm}

$10^{dm} = 2 \times 5^{dm}$
$2 \times 5^{dm} = 10^{dm}$
5^{dm} sind in 10^{dm} $2 \times$
5^{dm} sind $^1/_2$ von 10^{dm}.

Eben so nochmal mit der Benennung *Zehntelmeter* oder auch bloß *Zehntel.*

Die Zahlen von 11 bis 20.

§. 35. Vorbemerkung.

Der zweite Zehner wird gerade so behandelt wie der erste. Nur insofern tritt eine Aenderung ein, als jetzt der Schüler, mit dem Gange, sowie mit dem Verfahren bekannt, am Unterrichte *mehr selbstthätig* Antheil nimmt und über das, was er thut und erkennt, sich freier und mehr im Zusammenhange ausspricht, als bisher. Die Veranschaulichung wird an der Rechenmaschine oder durch Punkte und Striche dargestellt.

§. 36.

Die Zahl 11.

1. *Das Bilden und Zerlegen der Zahl (in zwei Elemente) und im Anschlusse hieran das Zuzählen, Abziehen und Unterscheiden.*

Durch Punkte: [● ● ● ● ● ● ● ● ● ●] ●

An der Rechenmaschine:
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
●

Zehn und Eins, 1 Zehner und 1 Einer. Der einzelne Einer gehört zum zweiten Zehner. Zehn und Eins nennt man mit *einem* Worte Elf und setzt dafür die Ziffer 11.

Die Ziffer 1 zur Linken bedeutet 1 *Zehner*, die Ziffer 1 zur Rechten 1 *Einer*. Beide zusammen gelten also 1 Zehner und 1 Einer, $10 + 1$ oder Elf.

Die Zahl 11, welche durch Punkte oder Ringlein, möglichst stark in die Augen fallend, an der Wandtafel dargestellt ist, wird nun durch einen

kleinen senkrechten Strich in 10 + 1 zerlegt und dieser Strich bei jeder folgenden Zerfällung um Eins vorgerückt.

|• • • • • • • • • •| •

In was habe ich 11 zerlegt? (In 10 + 1 oder 1 + 10.) Wie viel ist 10 + 1? 1 + 10? 11 — 1? 11 — 10? Um wie viel geht 11 über 10 hinaus? Um wie viel steht 10 gegen 11 zurück? Um wie viel ist also 11 größer als 11? 10 kleiner als 11?

|• • • • • • • • •|•| •

a. In was ist 11 jetzt zerlegt? (In 9 + 1 + 1 oder in 9 + 2.) Wie viel muß ich zu 9 legen, um 11 zu erhalten? (Noch 1 + 1 oder 2.) Wie zählst du 9 und 2 zusammen? (9 + 1 = 10, + 1 = 11.)

b. Wie viel ist 11 — 1? und 10 — 1? Wie viel ist also 11 — 1 — 1? Wie viel ist 11 — 2? Wie zieht man 2 von 11 ab? (11 — 1 = 10, und 10 — 1 = 9.)

c. Um wie viel geht 11 über 9 hinaus? (Um 1 + 1 oder 2.) Um wie viel steht 9 gegen 11 zurück? Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 9 und 11? (11 ist um 2 größer als 9, und 9 ist um 2 kleiner als 11.)

Ebenso werden die folgenden Fälle behandelt:

11 = 8 + (2 + 1) oder 8 + 3
= 7 + (3 + 1) oder 7 + 4
= 6 + (4 + 1) oder 6 + 5
= 5 + (5 + 1) oder 5 + 6
= 4 + (6 + 1) oder 4 + 7
= 3 + (7 + 1) oder 3 + 8
= 2 + (8 + 1) oder 2 + 9
= 1 + 10

Nach der Uebung mit Anschauung folgt dieselbe *ohne Anschauung, frei im Kopfe.* Man fragt:

a. Wie viel muß ich zu 7 legen, um 11 zu erhalten? (3 + 1 oder 4.) Wie viel zu 4? (6 + 1 oder 7.) ꝛc.

Wie zählt man 8 und 3 zusammen? (8 + 2 = 10, + 1 = 11.) Wie 5 und 6? (5 + 5 = 10, + 1 = 11.) Wie 9 + 2? 7 + 4? 6 + 5? 4 + 7? 3 + 8? 2 + 9?

b. Wie nehme ich 3 von 11 weg? (Zuerst den einzelnen Einer und dann noch 2 Einer von dem Zehner? 1 von 11 bleibt 10, und 2 von 10 bleibt 8.) Wie 6 von 11? (Zuerst 1, dann noch 5; 1 von 11 bleibt 10, und 5 von 10 bleibt 5.) Wie viel ist 11 — 3? 11 — 5? 11 — 8? 11 — 6? 11 — 6? 11 — 4? ꝛc.

c. Wie viel ist 8 — 8? (8 — 8 = 0.) Wie viel ist aber 11 — 8? (11 — 8 = 3.) Warum bleibt hier drei übrig? (Weil 11 um 3 mehr ist als 8.) Wie findet man also auch, wie viel 11 mehr ist als 8? (Wenn man 8 von 11 abzieht.)

Wie viel ist 5 — 5? Wie viel ist aber 11—5? Warum bleibt hier 6 übrig? (Weil 11 um 6 mehr ist als 5.) Wie viel ist 11 mehr als 9? als 6? 3? 7? 4? ꝛc.

2. Das Messen mit den Grundzahlen.

11=? ×1. 10=10× 1; 11=10×1+1×1 oder 11×1.
11=? ×2. 10= 5× 2; 11= 5×2+1. Oder:
2= 1× 2; 4= 2×2; 6=3×2 ꝛc.; 11=5×2+1.
11=? ×3. 9= 3× 3; 11= 3×3+2. Oder:
3= 1× 3; 6= 2×3; 9=3×3; 11=3×3+2.
11=? ×4. 4= 1× 4; 8= 2×4; 11=2×4+3.
11=? ×5. 5= 1× 5; 10= 2×5; 11=2×5+1.
11=? ×6. 6= 1× 6; 11= 1×6+5. So fort bis
11=? ×10. 10= 1×10; 11= 1×10+1=1 Z. + 1 E.

Die Schüler führen dieß nun nochmal für sich aus, schreiben die einzelnen Sätze schön geordnet unter einander und prägen dieselben sich ein.

Darstellung: 11 = 11 × 1
11 = 5 × 2 + 1
11 = 3 × 3 + 2 u. s. w.

In der nächsten Rechenstunde wird es abgefragt und besprochen, wie folgt:

11 ist wie viel mal 1? Wie viel ist 11 × 1? Wie oft kann 1 von 11 weggenommen werden? Wie oft ist 1 in 11 enthalten? 11 ist wie viel mal so groß als 1? 1 ist was für ein Theil von 11?

11 =? × 2? Rechnet 5 × 2 + 1! Wie oft ist 2 in 11 enthalten? 11 Stück, wie viel Paare? 11 halbe Mark, wie viel ganze?
11 =? × 3? Rechnet 3 × 3 + 2? Wie oft ist 3 in 11 enthalten?
11 =? × 4? Rechnet 2 × 4 + 3? Wie oft ist 4 in 11 enthalten?
u. s. w.

Mit welchen Münzen kann man 11 Pfennige zahlen?

3. Das Meter und das Decimeter.

Das in 10 Decimeter abgetheilte Meter steht noch an der Wandtafel. Der Lehrer macht an das rechte Ende desselben einen starken Abtheilungsstrich und fügt noch 1 Decimeter hinzu. Dann steht



1 Meter + 1/10 Meter, geschrieben: 1,1 m.

Die große Ziffer 1 bedeutet das ganze Meter, das Komma steht für den starken Abtheilungsstrich, die kleine Ziffer 1 bedeutet 1 Zehntel-Meter, und der Buchstabe m steht für das Wort „M-eter". Man liest also: „1 Meter und 1/10 Meter", (1 1/10 Meter) oder: „1 Meter und 1 Decimeter."

Was bedeutet die große Ziffer 1? was das Komma? was die kleine Ziffer 1? Wie wird es gelesen?

§. 37. Die Zahl 12.

1. Bilden, Zerlegen (in 2 Elemente), Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

[• • • • • • • • • •] • •

Zehn und Zwei, 1 Zehner und 2 Einer; die 2 Einer gehören zum zweiten Zehner. Zehn und Zwei nennt man mit einem Worte Zwölf und setzt dafür die Ziffern 12.

Die Ziffer 1 zur Linken bezeichnet 1 Zehner und die Ziffer 2 zur Rechten 2 Einer. Beide zusammen gelten also 1 Zehner und 2 Einer, 10 + 2 oder Zwölf.

[• • • • • • • • • •] • | •

a. Wie ist 12 zerlegt? (In 11 + 1.) Wie viel muß ich zu 11 legen, um 12 zu erhalten? wie viel ist 11 + 1? 1 + 11?

b. Wie viel ist 12 — 1?

c. Um wie viel geht 12 über 11 hinaus? Und um wie viel steht 11 gegen 12 zurück? Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 11 und 12?

[• • • • • • • • • •] • •

a. 12 = 10 + 2. Wie viel muß man zu 10 legen, um 12 zu erhalten? Wie viel ist 10 + 2?

b. Wie viel ist 12 — 2?

c. Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 10 und 12?

[• • • • • • • • • | •] • •

a. 12 = 9 + 1 + 2 oder 9 + 3. Wie viel muß man zu 9 legen, um 12 zu erhalten? (1 + 2 oder 3.) Wie zählt man 9 und 3 zusammen? (9 + 1 = 10, + 2 = 12.)

b. Wie viel ist 12 — 2? und 10 — 1? Wie viel ist 12 — 2 — 1? Wie viel ist also 12 — 3? Wie nimmst du 3 von 12 weg? (12 — 2 = 10, und 10 — 1 = 9.)

c. Um wie viel geht 12 über 9 hinaus? (Um 1 + 2 oder 3.) Um wie viel steht 9 gegen 12 zurück? (Um 2 + 1 oder 3.) Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 9 und 12?

Eben so die folgenden Fälle:

12 = 8 + (2 + 2) oder 8 + 4
= 7 + 3 + 2 oder 7 + 5
= 6 + 4 + 2 oder 6 + 6
= 5 + 5 + 2 oder 5 + 7
= 4 + 6 + 2 oder 4 + 8
= 3 + 7 + 2 oder 3 + 9
= 2 + 8 + 2 oder 2 + 10.

Dann frei im Kopfe und nur in einzelnen Fällen nachhilfsweise mit Anschauung.

a. Wie viel muß man zu 8 legen, um 12 zu erhalten (2 + 2 oder 4) Wie viel zu 6? (4 + 2 oder 6.) ꝛc.

Wie zählt man 9 und 3 zusammen? (9 + 1 = 10, + 2 = 12.) Wie 7 + 5? (7 + 3 = 10, + 2 = 12.) Wie 5 + 7? 8 + 4? 3 + 9? 6 + 6? 4 + 8?

b. Wie nimmt man 5 von 12 weg? (Zuerst 2 und dann noch 3; 2 von 12 bleibt 10, und 3 von 10 bleibt 7.) Wie 9 von 12? (Zuerst 2, dann noch 7? 2 von 12 bleibt 10, und 7 von 10 bleibt 3.) 2c.

Wie viel ist 12 — 3? 12 — 5? 12 — 8? 12 — 6? 12 — 4? 2c.

c. Wie viel ist 7 — 7? 12 — 7? Wie viel beträgt also der Unterschied zwischen 7 und 12? Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 9 und 12? 12 und 8? 6 und 12? 2c.

2. Das Messen mit den Grundzahlen.

12 = ? × 1? 10=10×1; 12=10×1+2×1 oder 12×1.
12 = ? × 2? 10= 5×2; 12= 5×2+1×2 oder 6×2. Oder:
2= 1×2; 4= 2×2; 6=3×2 2c.; 12=6×2.
12 = ? × 3? 9= 3×3; 12= 3×3+1×3 od. 4×3. Oder:
3= 1×3; 6= 2×3; 9=3×3; 12=4×3.
So fort bis
12 = ? × 10? 10= 1×10; 12=1×10+2=1 Z. + 2 E.

Ausführung von den Schülern:

12 = 12 × 1
12 = 6 × 2
12 = 4 × 3 u. s. w.

Besprechung:

Wie habt ihr die Zahl 12 zuerst zerlegt? (In 12 × 1.) Wie viel ist 12 × 1? Wie oft ist 1 in 12 enthalten? Was für ein Theil ist 1 von 12? Wie viel ist $^1/_{12}$ von 12?

12, wie viel mal 2? Zählt 6 × 2 zusammen! Wie viel ist 6 × 2? Wie oft kann man 2 von 12 wegnehmen? Wie oft ist 2 in 12 enthalten? Was für ein Theil ist 2 von 12? Wie viel ist $^1/_6$ von 12?

Aus wie viel mal 3 besteht 12? Zählt 4 × 3 zusammen! Wie viel ist 4 × 3? Wie oft läßt sich 3 von 12 wegnehmen? Wie oft ist 3 in 12 enthalten? Welcher Theil ist 3 von 12? Wie viel ist $^1/_4$ von 12?

12 ist wie viel mal 4? Zählt 3 × 4 zusammen! Wie viel ist 3 × 4? Wie oft kann man 4 von 12 abziehen? Wie viel mal ist 4 in 12 enthalten? Was für ein Theil ist 4 von 12? Wie viel ist $^1/_3$ von 12?

12, wie viel mal 5? Wie viel ist 2 × 5 + 2? Wie oft läßt sich 5 von 12 wegnehmen? Wie oft ist 5 in 12 enthalten? (2mal und 2 bleibt übrig.)

u. s. f.

Sind sämmtliche Zerfällungen auf diese Weise durchgenommen, so läßt man von den Schülern diejenigen Fälle, wo die Zahl nur in gleiche Theile zerlegt ist, unterstreichen. Diese werden nun noch besonders behandelt. Sie heißen:

$$
\begin{aligned}
12 &= 12 \times 1 \\
&= 6 \times 2 \\
&= 4 \times 3 \\
&= 3 \times 4 \\
&= 2 \times 6
\end{aligned}
$$

a. In welche gleiche Theile läßt sich 12 zerlegen? (In 12×1, 6×2, 4×3, 2×6.) 12 ist wie viel mal 1, 2, 3, 4, 6?

b. Welche Zahl muß man 2 (6, 4, 3) mal nehmen, um 12 zu erhalten?

c. Wie oft ist 2 (6, 4, 3) in 12 enthalten? Welche Zahl ist in 12 dreimal (6mal, 4mal, 2mal) enthalten? 12 ist wie viel mal so groß als 6? als 4? ꝛc.

d. Was für ein Theil ist 6 (4, 3, 2, 1) von 12? Wie viel ist $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^1/_6$, $^5/_6$ von 12?

Zwölf ist eine oft auftretende Zahl. Man verweilt daher länger bei derselben und macht die Kinder mit den Theilen des Jahres und Dutzend bekannt.

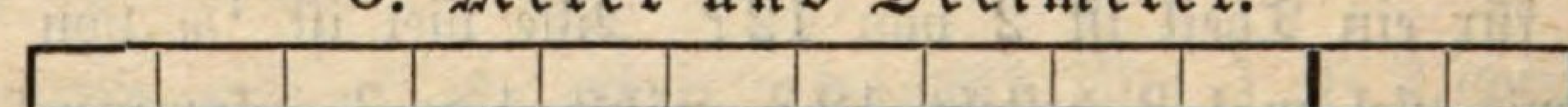
a. 12 Mon. = 1 Jahr;		b. 1 Jahr = 12 Mon.;	
6 „ = $^1/_2$ „		$^1/_2$ „ = 6 „	
4 „ = $^1/_3$ „	; 8 Mon. =?	$^1/_3$ „ = 4 „	; $^2/_3$ J. =?
3 „ = $^1/_4$ „	; 9 „ =?	$^1/_4$ „ = 3 „	; $^3/_4$ J. =?
2 „ = $^1/_6$ „		$^1/_6$ „ = 2 „	
1 „ = $^1/_{12}$ „		$^1/_{12}$ „ = 1 „	

Eben so mit dem Dutzend.

Auch Regeldetri-Aufgaben sind hier am Platze.

1 Traube kostet 2 Pfg.; was kosten 2, 3, 4, 5, 6 Trauben?
1 Bleistift „ 3 „ ; „ „ 2, 3, 4 Bleistifte?
1 Bilderbog. „ 4 „ ; „ „ 2, 3 Bilderbogen?
2 lt Wein kosten 4 (6, 8, 10, 12) ℳ.; was kostet 1 Liter?
Für 3 Pfg. erhält man 1 Brod, wie viel für 6 (9, 12) Pfg.?

3. Meter und Decimeter.



$1^{m} + {}^2/_{10}{}^{m}$, geschrieben: $1,_{2}{}^{m}$

Was bedeutet die große Ziffer 1? die kleine Ziffer 2 nach dem Komma? Wie wird es also gelesen? (1^{m} und $^2/_{10}{}^{m}$, $1^2/_{10}{}^{m}$ oder $1^{m}\ 2^{dm}$.)

Bei jeder neuen Zahl wird ein weiteres Decimeter hinzugefügt.

§. 38. Die übrigen Zahlen bis Zwanzig.

Wie Elf und Zwölf, so wird auch jede folgende Zahl dieses Zehners behandelt. Bei 20 wird das 20-Pfgstück vorgezeigt und mit den übrigen Münzen verglichen. Die Veranschaulichung, namentlich die des Zerlegens in mehrere (gleiche) Theile, wird von den Schülern allein ausgeführt. Es ist hiedurch ihrem Thätigkeitstriebe ein Feld geöffnet, auf welchem sie sich eben so gerne als nützlich beschäftigen. Sie arbeiten, getrieben von der Freude am Selbstfinden, dem Unterrichte vor, und indem sie diesen fördern, erleichtern sie ihn auch nicht unbedeutend für den Lehrer.

Uebersicht und Wiederholung.

§. 39. Vorbemerkung.

Die äußere oder sinnliche Anschauung tritt nur im Nothfalle ein. Der Schüler muß nun mit den durch die äußere Anschauung gewonnenen Zahlvorstellungen frei im Kopfe operiren und es darin zur Sicherheit und Fertigkeit bringen. Das Vermögen, die Zahlengeschäfte in der Weise auszuführen, daß die Zahl bloß gedacht oder innerlich angeschaut wird, soll dadurch seine besondere Uebung erhalten. Wo freilich vom Anfange an jede sinnliche Anschauung fehlt, wo man den Lehrstoff ohne Weiteres und mit Gewalt dem Gedächtnisse der Schüler aufzudringen sucht, da kann auch von der inneren Anschauung der Zahlen keine Spur vorhanden sein. Was die Kinder in diesem Falle beim Rechnen, auch mit den kleinsten Zahlen, sich vorstellen, ist nicht die Zahl mit ihrem Inhalte, sondern das Zeichen für die Zahl, die Ziffer. Das Kind ist zur Maschine, der Unterricht zur Dressur herabgewürdigt.

Durch die nun folgenden Uebungen muß das, was einzelnen Schülern entschwunden ist, erneut, was andere durch unregelmäßigen Schulbesuch versäumt haben, nachgeholt, überhaupt alles bis jetzt Behandelte bei sämmtlichen Schülern befestigt und zum Abschlusse gebracht werden. Die später von Stufe zu Stufe stattfindende Wiederkehr gewisser Uebungen soll der Lehrer benützen, um bei einzelnen Schülern die erforderliche Nachhilfe eintreten zu lassen, damit die ganze Klasse im gleichmäßigen Fortschritt erhalten werde. Wer meint, daß eben darum, weil sich Manches wiederholt, auf keiner Stufe vollständig aufgeräumt zu werden brauche, der täuscht sich sehr. Wird z. B. das Zuzählen und Abziehen mit Uebergang von einem Zehner in den andern nicht schon jetzt, d. i. beim ersten und zweiten Zehner, so durchgenommen, daß die Schüler völlig sicher und fertig darin werden; so wird dieß auch auf den spätern Stufen, wo sich die Operationen mit immer größeren Zahlen wiederholen, nicht mehr dazu kommen. Die Schüler werden es nie zur Sicherheit und Fertigkeit darin bringen. Was daher dem Lehrer hier nochmal recht dringend an's Herz gelegt wird, das ist: **man schreite von einer Uebung zur andern nicht eher fort, bis sämmtliche Schüler vollkommen sicher und fertig darin sind, und gehe zur schriftlichen Darstellung niemals über, bevor die Kinder geläufig frei im Kopfe operiren und sich dabei klar und verständig ausdrücken können.**

§. 40. Zählen.

1) Auf- und Abwärtszählen zwischen 1 und 20.
2) Welche Zahl steht vor 12? nach 12? vor 15? nach 15? ꝛc.
3) Zwischen welchen zwei Zahlen steht 11? 17? 14? u. s. w.
4) Welche Zahlen stehen zwischen 7 und 12? zwischen 9 und 13? ꝛc.

§. 41. Arten der Aufgaben beim Zusammenzählen und Abziehen.

Bei dem Zusammenzählen und dem Abziehen unterscheiden wir von jetzt an dreierlei Arten von Aufgaben:

1. Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen ohne Uebergang von einem Zehner in den andern.
2. Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen mit Uebergang von einem Zehner in den andern.
3. Zuzählen und Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

In allen diesen Fällen wird die Sache zuerst möglichst ausführlich und klar behandelt, fast so, als sei sie den Schülern noch ganz unbekannt. Dann zieht sich die Form der Ausrechnung mehr und mehr zusammen, so daß sie zuletzt nur noch in den nothwendigsten Ausdrücken besteht.

§. 42. Zusammenzählen.

1. Zuzählen der Grundzahlen ohne Uebergang.

Beispiel: 13 + 4 = ?

Ausführlich:

13 = 1 Zehner + 3 Einer. Dazu sollen noch 4 Einer kommen. Wohin werden wir sie thun: zu dem Zehner, oder zu den 3 Einern? Antwort: Zu den 3 Einern. Thut es! (3 E. + 4 E. = 7 E.) Wie viel haben wir jetzt anstatt 1 Z. + 3 E.? Antwort: 1 Z. + 7 E. oder 17 E. Wie viel ist also 13 + 4? Antwort: 13 + 4 = 17.

Kürzere Weise:

13 + 4 = ? 1 Z. 3 E. + 4 E. = 1 Z. + 7 E. oder 17 E.; 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 1 Z. 2 E. + 3 E. = 1 Z. + 5 E. oder 15 E.; 12 + 3 = 15.

Bei den schwächeren Schülern kann man sich auch mit folgender Ausrechnung begnügen:

13 + 4 = ? 3 + 4 = 7, 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 2 + 3 = 5, 12 + 3 = 15.

Zuletzt:

13 + 4 = ? 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 12 + 3 = 15.

2. Zuzählen der Grundzahlen mit Uebergang.

Beispiel: 9 + 3 = ?

Ausführlich:

Wie viel muß ich zu 9 legen, um den ersten Zehner voll zu machen? Noch 1. Wovon nehme ich die 1? Von 3. Wie viel ist dann von 3 noch da? Noch 2. Wie zählst du also 3 zu 9? Zuerst 1, dann noch 2. Thue es! 9 + 1 = 10, 10 + 2 = 12; 9 + 3 = 12.

Kürzere Weise:

9 + 3 = ? 9 + 1 = 10, + 2 = 12; 9 + 3 = 12.
8 + 7 = ? 8 + 2 = 10, + 5 = 15; 8 + 7 = 15.

Noch kürzer:

9 + 3 = ? 9 + (1 + 2) = 12; 9 + 3 = 12.
8 + 7 = ? 8 + (2 + 5) = 15; 8 + 7 = 15.

Zuletzt:

$9 + 3 = ?$ $9 + 3 = 12.$
$8 + 7 = ?$ $8 + 7 = 15.$

Bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit!

3. Zuzählen zusammengesetzter Zahlen.

Beispiel: $5 + 11 = ?$

Veranschaulicht an der Rechenmaschine:

● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● (4 K. auf die Seite geschoben und verdeckt.)

$5+11=5+10+1$; $5+10=15$, $+1=16$; $5+11=16$. Oder: $5+11=5+1+10$; $5+ 1=6$, $+10=16$; $5+11=16$. Oder: $5+11=11+5=16$.

Da man $1 + 18$ am besten als $18 + 1$, sowie später $3 + 25$ als $25 + 3$ sich denkt und auch so addirt, und da die Schüler ohnehin schon wissen, daß z. B. $3 + 4 = 4 + 3$, so ist die dritte Weise den beiden ersten vorzuziehen.

Aufg. z. Kopf= und Zifferrechnen.

§. 43. Abziehen.

1) Abziehen der Grundzahlen ohne Uebergang.

Beispiel: $17 - 3 = ?$

Ausführlich:

$17 = 1$ Z. $+$ E. Davon sollen 3 E. weggenommen werden. Wovon können wir sie wegnehmen? (Von dem Zehner oder von den 7 E.) Wovon werden wir sie wegnehmen? Antwort: Von den 7 Einern. Thut's! (3 E. von 7 E. bleiben 4 E.) Wie viel haben wir jetzt noch von 1 Z. + 7 Ein.? Antwort: Noch 1 Z. + 4 E. oder 14 Einer. Wie viel ist also $17 - 3$? Antwort: $17 - 3 = 14$.

Kürzere Weise:

$17 - 3 = ?$ $7 - 3 = 4$; $17 - 3 = 14.$
$18 - 5 = ?$ $8 - 5 = 3$; $18 - 5 = 13.$

Zuletzt:

$17 - 3 = ?$ $17 - 3 = 14.$
$18 - 5 = ?$ $18 - 5 = 13.$

2) Abziehen der Grundzahlen mit Uebergang.

Beispiel: $15 - 7 = ?$

Ausführlich.

Wie nimmt man 7 von 15 weg? Antwort: Zuerst 5, dann noch 2. Thut es! 5 von 15 bleibt 10, und 2 von 10 bleibt 8; 7 von 15 bleibt 8.

Kürzere Weise.

$15 - 7 = ?$ $15 - 5 = 10$, u. $10 - 2 = 8$; $15 - 7 = 8.$
$11 - 4 = ?$ $11 - 1 = 10$, u. $10 - 3 = 7$; $11 - 4 = 7.$

Noch kürzer:

15 — 7 = ? 15 — (5 + 2) = 8; 15 — 7 = 8.
11 — 4 = ? 11 — (1 + 3) = 7; 11 — 4 = 7.

Zuletzt:

15 — 7 = ? 15 — 7 = 8.
13 — 6 = ? 13 — 6 = 7.

Bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit!

3) Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

Beispiel: 15 — 11 = ?

Wie viel soll von 15 weggenommen werden? Woraus besteht die Zahl 11? Wie nimmt man also 11 von 15 weg? (Man nimmt zuerst 10 weg und dann noch 1.) Thut's! (10 von 15 bleibt 5, und 1 von 5 bleibt 4; also ist 15 — 11 = 4.)

18 — 12 = ? 18 — 10 = 8, und 8 — 2 = 6; 18 — 12 = 6.
20 — 16 = ? 20 — 10 = 10, und 10 — 6 = 4; 20 — 16 = 4.

Aufg. z. Kopf- u. z. Zifferrechnen.

§. 44. Bestimmen des Unterschiedes.

Beispiel: Wie viel beträgt der Unterschied von 8 und 15? a. Wie viel muß man zu 8 legen, um 15 zu erhalten? Um wie viel ist also 8 kleiner als 15? (Um 2 + 5 oder 7.) b. Wie viel ist 8 — 8? Wie viel ist 15 — 8? Warum bleibt von 15 7 übrig? (Weil 15 um 7 größer ist als 8.)

Der Unterschied von 8 und 15 ist also 7.

Um den Unterschied zweier Zahlen zu bestimmen, so sieht man zu, wie viel man zu der kleineren Zahl noch legen muß, um die größere zu erhalten, oder man zieht die kleinere Zahl von der größeren ab und sieht zu, wie viel übrig bleibt.

Mündlich wird der Unterschied vorzugsweise durch Zulegen, schriftlich bloß durch Abziehen bestimmt.

Da bei dem Zifferrechnen auf dieser Stufe besondere Aufgaben hiezu nicht gegeben werden, und damit sich die Schüler schon jetzt daran gewöhnen, schriftlich den Unterschied durch Abziehen zu bestimmen, so lasse man Ausrechnungen, wie

12 — 4 = 8
16 — 9 = 7

auch lesen: der Unterschied zwischen 12 und 4 ist 8; der Unterschied von 16 und 9 ist 7.

§. 45. Vervielfachen, Enthaltensein, Theilen.

In welche gleiche Theile kann die Zahl 12 zerlegt werden? Wie oft ist 2 (3, 4, 6) in 12 enthalten?

Welcher Theil von 12 ist 6? 4? 3? 2? 1? Wie viel beträgt die Hälfte ($^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_{12}$) von 12?

Eben so mit 14, 15, 16, 18, 20.

§. 46. Das Messen und Theilen der Zahlen von 1—20 durch 2.

1+2, 3+2, 5+2 . . . 17+2; 19—2, 17—2, 15—2, 13—2 ꝛc.
2+2, 4+2, 6+2 . . . 18+2; 20—2, 18—2, 16—2, 14—2 ꝛc.

$$2 = 2; \quad 1 \times 2 = 2$$
$$2 + 2 = 4; \quad 2 \times 2 = 4$$
$$2 + 2 + 2 = 6; \quad 3 \times 2 = 6$$
$$2 + 2 + 2 + 2 = 8; \quad 4 \times 2 = 8$$

u. s. w.

Das Vervielfachen an dieser Stelle, in und außer der Reihenfolge, wird jedesmal so fest und sicher eingeübt, daß hierin nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Dann gibt man Fragen folgender Art:

1) Welche Zahlen bis 20 lassen sich aus der 2 zusammensetzen?
2) Aus wie viel mal 2 besteht 6, 4, 10, 16, 8, 12, 18, 14, 20?
3) Wie oft ist 2 enthalten in 8? in 14? in 20? in 16? ꝛc.
4) Was von einer Speise, von einer Waare, von einer Zahl übrig bleibt, heißt Rest. Wie oft kann 2 von 3 weggenommen werden? (1mal, Rest 1.) Wie oft von 7, 11, 15, 5, 19? ꝛc.
5) Wie oft ist 2 enthalten in 3? in 7? in 15? in 11? ꝛc.

---

6) 3×2=?×3 5×2=?×5 7×2=?×7 9×2=?×9
   4×2=?×4 6×2=?×6 8×2=?×8 10×2=?×10
   . . . 3×2= . . . . 4×2= . . . . . 5×2=
   . . . 2×3 . . . . 2×4 . . . . . 2×5 u. s. w.
7) Wie viel ist das Doppelte von 1? von 2? von 3? ꝛc.
8) Wie viel ist die Hälfte von 4? von 8, 6, 12, 10? ꝛc.
9) 1 m Band kostet 2 ₰.; was kosten 2, 4, 6 ꝛc. Meter?
10) 2 lt Wein kosten 6 (10, 18, 12 ꝛc.) ℳ.; was kosten 2, 3 ꝛc. lt?
11) Wie viel ganze Mark erhalte ich für 4/2, 5/2, 6/2 . . . . 20/2 ℳ.?
12) A und B (2 Schüler), theilt diese Nuß hier mit einander! M und N (2 andere Schüler), theilt diese 3 Nüsse unter euch! Wie werden 2 Knaben 5, 7, 9 ꝛc. Aepfel unter sich theilen?

(Wie sucht man die Hälfte von 3, 5, 7, 9 ꝛc.)

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 47.

Angeschrieben:	Gelesen:
1,1 m	1 und 1/10 m oder 1 m und 1 dm
1,2 m	1 und 2/10 m oder 1 m und 2 dm
1,3 m	1 und 3/10 m oder 1 m und 3 dm
u. s. w. bis	
2,0 m	2 und 0/10 m oder 2 m und kein dm.

Die Zahlen von 21 bis 30.

§. 48. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Zur Veranschaulichung wird die Rechenmaschine benützt.

1. Bilden.

2 Zehner + 1 E. = 20 + 1 oder Einundzwanzig, geschrieben 21.
2 Z. 1 E. + 1 E. = 20 + 2 oder Zweiundzwanzig, „ 22.
2 Z. 2 E. + 1 E. = 20 + 3 oder Dreiundzwanzig, „ 23.
u. s. w. bis
2 Z. 9 E. + 1 E. = 20 + 10 oder Dreißig, 3 Zehner, „ 30.

2. Zerlegen.

a. Innerhalb des Zehners.
21 = 20 +?
30 = 23 +?

b. Mit Uebergang.
21 = 19 +? 21 = 19 + 1 + 1 od. 19 + 2.
24 = 18 +? 24 = 18 + 2 + 4 od. 18 + 6.

3. Zuzählen der Grundzahlen.

a. Innerhalb des Zehners.
21 + 3 =?
23 + 2 =?
24 + 5 =?

b. Mit Uebergang.
19 + 4 =? 19 + 1 = 20, + 3 = 23.
17 + 9 =? 17 + 3 = 20, + 6 = 26.
14 + 10 =? 14 + 10 = 24.

4. Abziehen der Grundzahlen.

a. Innerhalb des Zehners.
24 — 3 =?
27 — 4 =?
30 — 5 =?

b. Mit Uebergang.
22 — 5 =? 22 — 2 = 20, — 3 = 17.
25 — 9 =? 25 — 5 = 20, — 4 = 16.
24 — 10 =? 24 — 10 = 14.

5. Zuzählen und Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

a. 15+12=? 15+10=25, +2=27.
16+14+? 16+10=26, +4=30.

b. 30—12=? 30—10=20, —2=18.
28—15=? 28—10=18, —5=13.

6. Bestimmen des Unterschiedes.

Um wie viel ist die Zahl 23 größer als 18? (Um 2 + 3 od. 5.)
Wie viel beträgt der Unterschied von 15 u. 27? (5 + 7 od. 12.)

Jede der vorstehenden Operationen ist sogleich bis zur Schlagfertigkeit einzuüben. Die Aufgaben, welche das Rechenheft hiezu bietet, werden zuerst anschaulich, dann frei im Kopfe und dann schriftlich durchgearbeitet.

§. 49. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen des Zehners.

Bei dieser Uebung findet von jetzt an völlige Arbeitstheilung statt. Die Schüler haben die einzelnen Zahlen mit den Grundzahlen zu messen, d. i. zu untersuchen, wie viel mal 1, 2, 3 ꝛc. sie in sich begreifen, und der Lehrer hat die von den Schülern gelieferten Arbeiten zu prüfen und eingehend mit ihnen zu besprechen. Hierdurch wird Zeit erspart, der Unterricht nimmt einen raschen Fortgang, und die Schüler lernen selbstständig suchen und arbeiten; die Reihen der Produkte aus den Grundzahlen, die einzelnen Theile von dem Einmaleins,

bauen sich allmählich wie von selbst auf; die behandelten Zahlen treten mit ihren Faktoren und einzelnen Vielfachen derselben fast unwillkürlich in Verhältniß, sie gewinnen Leben, und der Schüler erhält so in der That lebendige Zahlbegriffe. Eines aber darf der Lehrer auch nicht versäumen: er muß die Schüler bei jedem neuen Zehner auf's Neue in ihre Arbeit einweisen. Bei der ersten Zahl des dritten Zehners, bei 21, geschieht es, wie folgt:

21 = ? × 1. 20 = 20 × 1; 21 = 21 × 1. Notirt: 21 = 21 × 1

21 = ? × 2. Welche Zahl besteht aus 10 × 2? (20.) 20 ist also wie viel mal 2? Wie viel mal 2 ist nun 21? . . . . 21 = 10 × 2 + 1

21 = ? × 3. Seht zu, wie oft man 3 nehmen muß, um 21 zu erhalten! Mit Hilfe der Hand, für jede 3 einen Finger: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21; 7mal. 21 ist also wie vielmal 3? . . . . . . 21 = 7 × 3

21 = ? × 4. Sucht dieß eben so, für jede 4 einen Finger! 4, 8, 12, 16, 20; 20 = 5 × 4; 21 ist also 5 × 4 + 1. Notirt: . . 21 = 5 × 4 + 1

21 = ? × 5. Sucht dieses eben so, für jede 5 einen Finger! 5, 10, 15, 20; 20 = 4 × 5; 21 = 4 × 5 + 1. Notirt: . . . . 21 = 4 × 5 + 1

21 = ? × 6. Für jede 6 einen Finger! 6, 12, 18; 18 = 3 × 6; von 18 auf 21 ist 3; also ist 21 = 3 × 6 + 3. Notirt: . . . . . 21 = 3 × 6 + 3

21 = ? × 7. Für jede 7 einen Finger! 7, 14; 14 = 2 × 7; von 14 auf 21 ist 6 + 1 oder 7; also ist 21 = 3 × 7. Notirt: . . . 21 = 3 × 7

21 = ? × 8. 16 = 2 × 8; von 16 auf 21 ist 5; also ist . . . . 21 = 2 × 8 + 5

21 = ? × 9. 18 = 2 × 9; von 18 auf 21 ist 3; also ist . . . . 21 = 2 × 9 + 3

21 = ? × 10. 20 = 2 × 10; also ist 21 = 2 × 10 + 1. Notirt: . . . . 21 = 2 × 10 + 1

Ist das Verfahren erst bei der Zahl 21 recht erfaßt, so wird es bei den übrigen Zahlen des Zehners fast gar keine Schwierigkeit mehr haben. Die obige Entwicklung der Zerfällungen wird daher so oft wiederholt, bis die Schüler die Antwort auf jede Frage ohne Beihilfe sicher und gewandt selbst suchen können.

Dann erhalten sie die Aufgabe, das Ganze nochmal allein auszuführen, die Zerfällungen auf ihre Schiefertafeln schön geordnet untereinander zu schreiben und so oft durchzugehen, bis sie dieselben sich eingeprägt haben.

In der nächsten Rechenstunde werden die Aufschriebe der Schüler vorgelesen, etwaige Fehler, nach Veranschaulichung und Beleuchtung, berichtigt und die einzelnen Zerfällungen in und außer der Ordnung abgefragt. 21 ist wie vielmal 2? wie vielmal 6? 2c.

Hierauf werden die Fälle, wo die Zahl in lauter gleiche Theile, in

Faktoren, zerlegt erscheint, noch besonders in's Auge gefaßt, hier also 7 × 3 und 3 × 7.

Wie oft muß man 3 nehmen, um 21 zu erhalten? Wie viel ist 7 × 3? Wie vielmal ist 3 in 21 enthalten?

Wie oft muß man 7 nehmen, um 21 zu erhalten? Wie viel ist 3 × 7? Wie oft ist 7 in 21 enthalten?

In wie viel Theile muß man 21 zerlegen, damit auf jeden Theil 7 kommt? Welcher Theil ist also 7 von 21?

In wie viel Theile ist 21 zu zerlegen, wenn auf jeden Theil 3 kommen soll? Welcher Theil ist also 3 von 21?

Wie viel beträgt $^1/_3$ von 21? Wie viel $^1/_7$ von 21? Wie viel betragen $^2/_3$ von 21? $^2/_7$, $^3/_7$, $^5/_7$ von 21?

1 Meter Tuch kostet 7 ℳ., was kosten 2, 3 Meter?

A verdient in 1 Tag 3 ℳ., wie viel in 2, 5, 7 Tagen?

3 Kilogr. Gewürz kosten 21 ℳ.; was kostet 1 Kilogr.?

In 1 Woche verzehrt jemand 21 ℳ., wie viel in 1 Tag?

Ganz so wird jede folgende Zahl bis 30 behandelt. Bei 22 wird nur noch eine geringe Nachhilfe, bei den übrigen Zahlen eine solche gar nicht mehr nöthig sein.

22 = ? × 1. Geantwortet und notirt: . 22 = 22 × 1

22 = ? × 2. 22 = 20 + 2; 20 ist 10 × 2, und 2 ist 1 × 2; 10 × 2 + 1 × 2 = 11 × 2; also ist . . . . 22 = 11 × 2

22 = ? × 3. Für jede 3 einen Finger: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21; 21 = 7 × 3; also ist 22 = 7 × 3 + 1. Notirt: . . . . . 22 = 7 × 3 + 1

So fort bis

22 = ? × 10. 20 = 2 × 10; 22 = 20 + 2; also ist . . . . 22 = 2 × 10 + 2

Zur ausführlichen Besprechung kommt bloß 22 = 11 × 2 und die Umkehrung 22 = 2 × 11.

Aus wie vielmal 2 besteht die Zahl 22? Wie sucht man es? (22 = 20 + 2; 20 = 10 × 2, und 2 = 1 × 2; 10 × 2 + 1 × 2 = 11 × 2.)

Wie oft ist 2 in 22 enthalten? (2 ist in 20 10mal und in 2 1mal, in 22 also 11mal enthalten.)

Wenn man 22 in 11 × 2 zerlegt, in wie viel gleiche Theile ist 22 dann zerlegt? Wie viel beträgt ein solcher Theil? Welcher Theil ist also 2 von 22? Welcher Theil ist 2 von 4, 8, 12, 16, 20?

Da 22 = 11 × 2, so ist 22 auch = 2 × 11. Um zu sehen, ob 22 wirklich auch aus 2 × 11 besteht, so wollen wir suchen, wie viel 2 × 11 ist.

2 × 11 = 11 + 11. Wie viel ist 11 + 11? (11 + 10 = 21, + 1 = 22.) Wie viel ist also 2 × 11? (2 × 11 = 22.)

Wir können 2 × 11 auch anders rechnen. An der Rechenmaschine:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 11 = 10 + 1
● 11 = 10 + 1
● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 2 × 11 = 2 × 10 + 2 × 1.
● 2 × 10 = 20, u. 2 × 1 = 2; 20 + 2 = 22.

Wie vielmal ist 11 in 22 enthalten? Welcher Theil ist 11 von 22? Wie suchst du den halben Theil von 22? (22 = 20 + 2; die Hälfte von 20 = 10, und die Hälfte von 2 = 1; die Hälfte von 22 ist also 10 + 1 oder 11.

1 m zu 11 *M.*; was kosten 2 m?

2 Knaben erhalten 22 Nüsse; wie viel kommen auf einen?

Für 22 halbe Mark erhält man wie viel ganze?

Dieß dürfte genügen, das Verfahren zu erkennen, und zugleich zeigen wie mannigfaltig die Uebungen sind und wie anregend der in dieser Weise ertheilte Unterricht ist.

Bei Behandlung der Zahl 24 zählt der Schüler die Stunden von Nachts 12 Uhr über Mittags 12 Uhr bis wieder Nachts 12 Uhr und erfährt so, daß Tag und Nacht, also der volle Tag = 24 Std. Hierauf werden 12, 8, 6 Std. als Theile des Tages aufgefaßt, und $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$ 2c. Tage in Stunden verwandelt. (1 Bch. Papier = 24 Bg.)

Nach jedem Zehner werden die Faktorenpaare der Produktzahlen von vorn an wiederholt, damit die Schüler, am Ende des ersten Hunderts angelangt, die Faktoren sämmtlicher Produktzahlen desselben inne haben.

§. 50. Messen und Theilen der Zahlen von 1—30 durch 3.

1 + 3, 4 + 3, 7 + 3 ... 25 + 3; 28 — 3, 25 — 3, 22 — 3 2c.
2 + 3, 5 + 3, 8 + 3 ... 26 + 3; 29 — 3, 26 — 3, 23 — 3 2c.
3 + 2, 6 + 3, 9 + 3 ... 27 + 3; 30 — 3, 27 — 3, 24 — 3 2c.

3 = 3; 1 × 3 = 3
3 + 3 = 6; 2 × 3 = 6
3 + 3 + 3 = 9; 3 × 3 = 9
3 + 3 + 3 + 3 = 12; 4 × 3 = 12
u. s. w.

Ist Vorstehendes in und außer der Ordnung vollständig eingeprägt, dann folgende Fragen und Aufgaben:

1) Welche Zahlen bis 30 lassen sich aus der 3 zusammensetzen?
2) Wie vielmal 3 ist 9, 15, 21, 27, 12, 18, 24, 30?
3) Wie oft ist 3 enthalten in 12? in 24? in 30? in 15? 2c.
4) Wie vielmal in 10? in 20? in 13? in 25? in 16? 2c.

---

5) 2×3=?×2 5×3=?×5 7×3=?×7 9×3=?× 9
4×3=?×4 6×3=?×6 8×3=?×8 10×3=?×10

● ● 2 × 3 = ● ● ● ● 4 × 3 = ● ● ● ● ● 5 × 3 =
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● 3 × 2 ● ● ● ● 3 × 4 ● ● ● ● ● 3 × 5 2c.

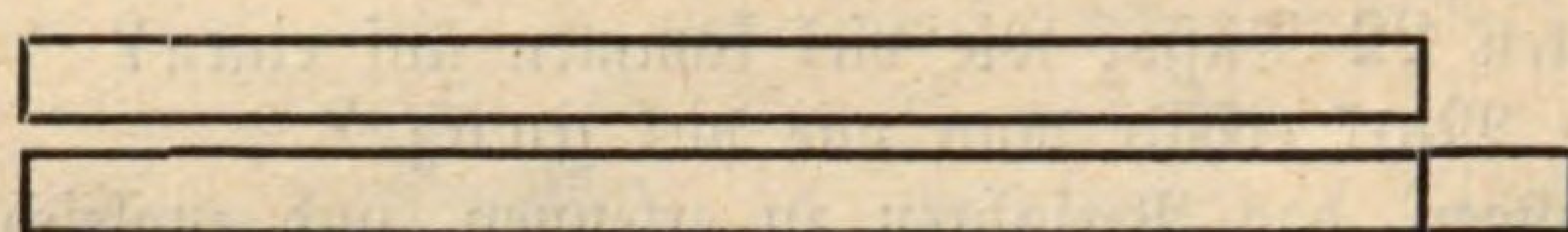
6) Wie viel beträgt das 3fache von 1, von 2, von 3? 2c.
7) Wie viel ist $^1/_3$ von 15, von 24, von 18? 2c.
8) Wie viel betragen $^2/_3$ von 6, von 12, von 9? 2c.

9) 1 Brödchen kostet 3 ₰.; was kosten 2, 3 ꝛc. Brödchen?
10) Für 3 ₰. erhält man 1 Brödchen, wie viel für 6, 15 ꝛc. ₰.?
11) Jemand verdient in 3 Wch. 15 (24, 30) ℳ, wie viel in 1 W.?
12) 3 Brüder haben 2 Aepfel unter sich zu theilen; wie werden sie es thun? Wie aber, wenn sie 4 (10, 20) Aepfel gleichheitlich mit einander theilen sollen?

(Wie viel ist der 3. Theil von 1, 2, 3, 4? ꝛc.)

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 51. Meter und Decimeter.



Gelesen:

$2^{m} + {}^{1}/_{10}{}^{m}$, geschrieben:	$2,_{1}{}^{m}$ ($2^{1}/_{10}{}^{m}$, $2^{m}\ 1^{dm}$)
Um $^{1}/_{10}{}^{m}$ verlängert:	$2,_{2}{}^{m}$ ($2^{2}/_{10}{}^{m}$, $2^{m}\ 2^{dm}$)
Wieder um $^{1}/_{10}{}^{m}$ verlängert:	$2,_{3}{}^{m}$ ($2^{3}/_{10}{}^{m}$, $2^{m}\ 3^{dm}$)

u. s. w.

Die Zahlen von 31 bis 40.

§. 52. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Zur Veranschaulichung dient die Rechenmaschine.

1. Bilden.

3 Zehner + 1 E. = 30 + 1 oder Einunddreißig, geschrieben 31.
3 Z. 1 E. + 1 E. = 30 + 2 oder Zweiunddreißig, „ 32.
u. s. w.

2. Zerlegen.

a. Innerhalb des Zehners.	b. Mit Uebergang.	
32=30+?	32=28+?	32=28+ 2+2 od. 28+4.
37=32+?	32=20+?	32=20+10+2 = 20+12.
40=36+?	32=18+?	32=18+2+12 = 18+14.

3. Zuzählen der Grundzahlen.

a. Innerhalb des Zehners.	b. Mit Uebergang.	
32+4=?	27+ 5=?	27+ 5=27+3+2=32.
31+9=?	27+10=?	27+10=37.

4. Abziehen der Grundzahlen.

a. Innerhalb des Zehners.	b. Mit Uebergang.	
36 −3=?	36− 8=?	36− 8=36−6−2=28.
40−6=?	36−10=?	36−10=26.

5. Zuzählen und Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

a. 20+16=20+10+6=36. 40−15=40−10−5=25.
18+15=18+10+5=33. 36−18=36−10−8=18.

6. Bestimmen des Unterschiedes.

Um wie viel ist 35 größer als 22? (Um 8 + 5 oder 13.)
Wie viel beträgt der Unterschied von 18 u. 32? (2 + 12 od. 14.)

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 53. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen.

Zur beispielsweisen Behandlung diene die Zahl 32.

32=?×2. 32=20+12; 20=10×2, u. 12=6×2; 10×2+6×2=16×2
32=?×3. 32=30+2; 30=10×3; 32=10×3+2.
32=?×4. Sucht, wie oft 4 zu nehmen ist, um 32 zu erhalten. Für jede 4 einen Finger: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32; 8mal; 32=8×4.
32=?×5. Für jede 5 einen Finger: 5, 10, 15, 20, 25, 30; 30=6×5; 32=6×5+2.

Hiemit sind die Schüler in die Bearbeitung der Zahl eingewiesen, und dieselbe kann ihnen nun völlig übertragen werden.

Zur besonderen Besprechung kommen die Faktorenpaare 16 × 2 und 2 × 16, 8 × 4 und 4 × 8.

Aus wie vielmal 2 besteht die Zahl 32? Wie findet man es? (32=20+12; 20=10×2 und 12=6×2; 10×2+6×2=16×2.)

Wie oft ist 2 in 32 enthalten? (16mal.) Wie suchst du das? (32=20+12; 2 ist in 20 10mal und in 12 6mal, in 32 also 10+6 oder 16mal enthalten.)

Wenn man die Zahl 32 in 16 × 2 zerlegt, in wie viel gleiche Theile ist sie dann zerlegt? Wie viel beträgt ein solcher Theil? Welcher Theil ist also 2 von 32? (2 ist $^1/_{16}$ von 32.)

Da 32=16×2, so ist 32 auch =2×16; 2×16 muß also 32 geben. Rechnet es! (2+16=2×10+2×6; 2×10=20, und 2×6=12; 20+12=32.)

Wie vielmal ist 16 in 32 enthalten? Welcher Theil ist 16 von 32? Wie suchst du die Hälfte von 32? (32=20+12; $^1/_2$ von 20 = 10, und $^1/_2$ von 12=6; 10+6=16; $^1/_2$ von 32 = 16.)

32=?×4. (32=8×4.) Rechnet es vor! (Für jede 4 einen Finger: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32; 32=8×4.)

32=?×8. Rechnet es vor! (8, 16, 24, 32; 32=4×8.)

Wie viel ist also 8×4? Und wie viel ist 4×8? Wie oft ist 4 in 32 enthalten? Wie oft liegt 8 in 32?

Welcher Theil von 32 ist 8? Und welcher Theil von 32 ist 4? Wie viel beträgt $^1/_2$ von 32? wie viel $^1/_4$? $^1/_8$? $^1/_{16}$?

Dieß sei genug. Weiteres kommt dem Lehrer bei dem Unterrichte von selbst entgegen. Auch die geeigneten angewandten Aufgaben kann er leicht selbst bilden.

Wenn bei der Zahl 33 das Faktorenpaar 11×3 zur Besprechung kommt, so wird nicht nur 3×11, sondern auch nochmal 2×11, bei 36 außer 3×12 auch 2×12 und bei 39 außer 3×13 auch 2×13 nochmal gerechnet. Hierdurch gewinnen die Schüler nach und nach eine Gewandtheit im Vervielfachen zweistelliger Zahlen und zugleich einen sichern Besitz der Produkte aus denselben.

§. 54. Wiederholung.

Sämmtliche Produktzahlen von 21 an bis 40 werden wiederholt in ihre Faktoren zerlegt und die Vielfachen von 2 durch 2 getheilt.

a. 21=?×3; 21=?×7; 22=?×2; 22=?×11? 24=?×2 u. s. w.

b. Wie viel beträgt
$^1/_2$ von 26? (26=20+6; $^1/_2$ von 20+6=10+3 oder 13; $^1/_2$ v. 26=13.)
$^1/_2$ von 34? (34=20+14; $^1/_2$ v. 20+14=10+7 od. 17; $^1/_2$ v. 34=17.)

Will der Lehrer noch einen Schritt weiter gehen und die Hälfte auch von 21, 23, 25 ꝛc. suchen, oder $^{21}/_2$, $^{22}/_2$, $^{23}/_2$ ꝛc. in Ganze verwandeln lassen, so sei ihm das anheim gestellt.

§. 55. Messen und Theilen der Zahlen von 1 bis 40 durch 4.

1 + 4, 5 + 4, 9 + 4 .... 33 + 4; 37 — 4, 33 — 4, 29 — 4 ꝛc.
2 + 4, 6 + 4, 10 + 4 .... 34 + 4; 38 — 4, 34 — 4, 30 — 4 ꝛc.
3 + 4, 7 + 4, 11 + 4 .... 35 + 4; 39 — 4, 35 — 4, 31 — 4 ꝛc.
4 + 4, 8 + 4, 12 + 4 .... 36 + 4; 40 — 4, 36 — 4, 32 — 4 ꝛc.

4 = 4; 1 × 4 = 4
4 + 4 = 8; 2 × 4 = 8
4 + 4 + 4 = 12; 3 × 4 = 12
4 + 4 + 4 + 4 = 16; 4 × 4 = 16
u. s. w.

Geht Vorstehendes in und außer der Ordnung sicher und fertig, dann folgende Fragen und Aufgaben:

1) Welche Zahlen bis 40 lassen sich aus der 4 zusammensetzen?
2) Aus wie vielmal 4 besteht 8, 16, 32, 12, 24, 36, 20, 40, 28?
3) Wie vielmal ist 4 in 8 (16, 24, 40, 12, 28, 36 ꝛc.) enthalten?
4) Wie vielmal in 9? in 13? in 18? in 30? in 15? in 31? ꝛc.

---

5) 2×4=?×2 5×4=?×5 7×4=?×7 9×4=?×9
3×4=?×3 6×4=?×6 8×4=?×8 10×4=?×10
6) Wie viel beträgt das 4fache von 1, von 3, von 5? u. s. w.
7) Wie viel ist der 4. Theil von 12, von 20, von 32? u. s. w.
8) Sucht $^3/_4$ von 8, von 24, von 40, von 16, von 32? ꝛc.

---

9) Auf 1 Bank sitzen 4 Schüler, wie viel auf 2, 3, 4 ꝛc. Bänken?
10) Wie lange reicht Karl mit 24 Aepfeln, wenn er täglich 4 daran verzehrt? Wie lange mit 32? mit 20? mit 36? mit 40?

11) A erspart sich in 4 Jahren 24 (32, 30, 36) *M.*, wie viel in 1 J.?

12) 4 Geschwister haben 1 Lebkuchen unter sich zu theilen; wie thun sie es? Wie aber, wenn sie 3 Lebkuchen zu theilen haben?

(Wie viel ist der 4. Theil von 1, 2, 3, 4, 5 2c.?)

Aufg. z. Kopf: u. z. Zifferr.

§. 56. Meter und Decimeter.

Gelesen:

3 m + $^1/_{10}$ m, geschrieben:	3 , 1 m	(3 $^1/_{10}$ m, 3 m 1 dm)
Um $^1/_{10}$ m verlängert:	3 , 2 m	(3 $^2/_{10}$ m, 3 m 2 dm)
Wieder um $^1/_{10}$ m verlängert:	3 , 3 m	(3 $^3/_{10}$ m, 3 m 3 dm)

u. s. w.

Die Zahlen von 41 bis 50.

§. 57. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Wie bei dem dritten und vierten Zehner. §. 48 und §. 52.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 58. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen des Zehners.

Zur Anleitung der Schüler in das Verfahren:

41=?×2. 41=40+1; 40=20×2; also ist 41=20×2+1.

41=?×3. 41=30+11; 30=10×3; 11=3×3+2; also ist 41=10×3+3×3 oder 13×3+2.

41=?×4. 41=40+1; 40=10×4; 41=10×4+1.

41=?×5. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40; 40=8×5; also ist 41 =8×5+1.

u. s. w.

Um also zu finden, aus wie vielmal 2 oder 4 die Zahlen dieses Zehners bestehen, so zerlegt man sie in 40+1, in 40+2, in 40+3 2c.

Um zu finden, wie vielmal 3 sie in sich begreifen, so zerlegt man sie in 30+11, 30+12, 30+13 2c.

Mit den übrigen Grundzahlen, d. i. mit 5, 6, 7, 8, 9 und 10 werden sie gemessen, indem man sucht, wie oft eine solche zu setzen ist, um die betreffende Zahl des Zehners zu erhalten.

Wenn der Lehrer die von den Schülern ausgeführten Zerfällungen bespricht, so läßt er

bei 42 neben 3 × 14 auch wieder 2 × 14,
bei 44 neben 4 × 11 auch wieder 2 × 11, 3 × 11,
bei 45 neben 3 × 15 auch wieder 2 × 15,
bei 48 neben 3 × 16 auch wieder 2 × 16,
neben 4 × 12 auch wieder 2 × 12, 3 × 12

rechnen.

$1 + 5,\ 6 + 5,\ 11 + 5 \ldots 41 + 5;\ 46 - 5,\ 41 - 5,\ 36 - 5$ 2c.
$2 + 5,\ 7 + 5,\ 12 + 5 \ldots 42 + 5;\ 47 - 5,\ 42 - 5,\ 37 - 5$ 2c.
$3 + 5,\ 8 + 5,\ 13 + 5 \ldots 43 + 5;\ 48 - 5,\ 43 - 5,\ 38 - 5$ 2c.
u. s. w. u. s. w.

$$5 = 5;\quad 1 \times 5 = 5$$
$$5 + 5 = 10;\quad 2 \times 5 = 10$$
$$5 + 5 + 5 = 15;\quad 3 \times 5 = 15$$
$$5 + 5 + 5 + 5 = 20;\quad 4 \times 5 = 20$$
u. s. w.

1) Welche Zahlen von 1—50 lassen sich aus 5 zusammensetzen?
2) Aus wie vielmal 5 besteht 15, 25, 35, 45, 20, 30, 40, 50?
3) Wie oft ist 5 enthalten in 20? in 45? in 30? in 15? 2c.
4) Wie oft in 12, in 24, in 36, in 48, in 16? u. s. w.

---

5) $2\times5=?\times2$ $4\times5=?\times4$ $7\times5=?\times7$ $9\times5=?\times9$
$3\times5=?\times3$ $5\times5=?\times6$ $8\times5=?\times8$ $10\times5=?\times10$
6) Wie heißt das 5fache von 1, von 3, von 7, von 2? 2c.
7) Wie viel ist der 5. Theil von 20, von 40, von 25? 2c.
8) Wie viel betragen $^2/_5$ von 25? $^3/_5$ von 40? $^4/_5$ von 50?

---

9) Für 1 M. erhält man 5 Meter Band, wie viel für 2, 3, 4 2c. M.?
10) 5 ^{m} Zeug geben 1 Kleid; wie viel Kleider geben 15, 35, 50 ^{m}?
11) Für 5 M. erhält man 20 (30, 15, 40, 50) Stück, wie v. für 1 M.?
12) 5 Arme erhalten 4 Laibe Brod; wir theilen sie diese?
(Wie viel ist der 5. Theil von 1, 2, 3, 4, 5, 6? 2c.)

§. 60. Wiederholung.

1×2	1×3	1×4	1×5
2×2	2×3	2×4	2×5
3×2	3×3	3×4	3×5
2c.	2c.	2c.	2c.

Die Zahlen von 51 bis 60.

§. 61. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Wie bei dem dritten und vierten Zehner. §. 48 und §. 52.
Aufg. z. Kopf- u. z. Ziffer.

§. 62. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen des Zehners.

Zur Anleitung des Schülers:

$51=?\times2$. $51=40+11$; $40=20\times2$; $11=5\times2+1$; also ist $51=20\times2+5\times2$ oder $25\times2+1$.

$51\times?\times3$. $51=30+21$; $30=10\times3$, und $21=7\times3$; $10\times3+7\times3=17\times3$; $51=17\times3$.

$51=?\times4$. $51=40+11$; $40=10\times4$; $11=2\times4+3$; also ist $51=10\times4+2\times4$ oder $12\times4+3$. Oder: $51=48+3$ 2c.

51=?×5. 51=50+1; 50=10×5; 51=10×5+1.
51=?×6. 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48; 48=8×6; 51=8×6+3.
u. s. w.

In derselben Weise wie 51 werden auch die übrigen Zahlen des Zehners gemessen.

Bei Besprechung der von den Schülern ausgeführten Zerfällungen lasse man

bei 51 neben 3 × 17 auch wieder 2 × 17,
bei 52 neben 4 × 13 auch wieder 2 × 13, 3 × 13.
bei 54 neben 3 × 18 auch wieder 2 × 18,
bei 55 neben 5 × 11 auch 2 × 11, 3 × 11, 4 × 11,
bei 56 neben 4 × 14 auch 2 × 14, 3 × 14,
bei 57 neben 3 × 19 auch 2 × 19,
bei 60 neben 3 × 20 auch 2 × 20,
neben 4 × 15 auch 2 × 15, 3 × 15,
neben 5 × 12 auch 2 × 12, 3 × 12 u. 4 × 12

bis zur Geläufigkeit rechnen.

Bei 60 erfährt der Schüler, daß man 60 Stück (Eier) 1 Schock, 60 Bund (Garben Getreid) 1 Schober nennt, und daß 1 Stunde = 60 Minuten. Hieran knüpft sich die Uebung:

30 Stck. = $\frac{1}{2}$ Schck.; $\frac{1}{2}$ Schck. = 30 Stck.	30 Min. = $\frac{1}{2}$ Std.; $\frac{1}{2}$ Std. = 30 M.
20 „ = $\frac{1}{3}$ „ ; $\frac{1}{3}$ „ = 20 „	20 „ = $\frac{1}{3}$ „ ; $\frac{1}{3}$ „ = 20 „
15 „ = $\frac{1}{4}$ „ ; $\frac{1}{4}$ „ = 15 „	15 „ = $\frac{1}{4}$ „ ; $\frac{1}{4}$ „ = 15 „
45 „ = $\frac{3}{4}$ „ ; $\frac{3}{4}$ „ = 45 „	45 „ = $\frac{3}{4}$ „ ; $\frac{3}{4}$ „ = 45 „

§. 63. Wiederholungen.

a. Zerlegung der Produktzahlen von 42 an bis 60 in ihre Faktoren. Z. B. 42 = ? × 2, ? × 3, ? × 6, ? × 7, ? × 14, ? × 21.

b. Theilen der Produktzahlen aus 2 von 42 an bis 60 durch 2.
$\frac{1}{2}$ von 42 = ? 42 = 40 + 2; $\frac{1}{2}$ von 40 + 2 = 20 + 1 oder 21.
$\frac{1}{2}$ von 52 = ? 52 = 40 + 12; $\frac{1}{2}$ von 40 + 12 = 20 + 6 oder 26.

c. Theilen der Produktzahlen aus 3 von 30 an bis 60 durch 3.
$\frac{1}{3}$ von 42 = ? 42 = 30 + 12; $\frac{1}{3}$ von 30 + 12 = 10 + 4 oder 14.
$\frac{1}{3}$ von 54 = ? 54 = 30 + 24; $\frac{1}{3}$ von 30 + 24 = 10 + 8 oder 18.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 64. Messen und Theilen der Zahlen von 1—60 durch 6.

Wie bei dem vorher gehenden Zehner. §. 59.
Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 65. Meter und Decimeter.

Angeschrieben:	Gelesen:
5,1 m	$5\frac{1}{10}$ m, 5 m 1 dm
5,2 m	$5\frac{2}{10}$ m, 5 m 2 dm
5,3 m	$5\frac{3}{10}$ m, 5 m 3 dm

u. s. w.

Die Zahlen von 61 bis 70.

§. 66. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Nach §. 48 und §. 52.

Aufg. z. Kopf= u. z. Zifferr.

§. 67. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen des Zehners.

Die Zahlen von 61 bis 70 werden bei dem Messen
mit 2 u. mit 3 in 60 + 1, 60 + 2, 60 + 3, 60 + 4 ꝛc.
mit 4 in 40 + 21, 40 + 22, 40 + 23, 40 + 24 ꝛc.
mit 5 in 50 + 11, 50 + 12, 50 + 13, 50 + 14 ꝛc.
mit 6 in 60 + 1, 60 + 2, 60 + 3, 60 + 4 ꝛc.
zerlegt.

Bei dem Messen mit 7, 8, 9 und 10 wird das Hinaufzählen angewendet.

Wenn die von den Schülern ausgeführten Zerfällungen besprochen werden, so lasse man
bei 63 außer 3 × 21 auch 2 × 21,
bei 64 außer 4 × 16 auch 2 × 16, 3 × 16,
bei 65 außer 5 × 13 auch 2 × 13, 3 × 13, 4 × 13,
bei 66 außer 3 × 22 auch 2 × 22,
bei 68 außer 4 × 17 auch 2 × 17, 3 × 17,
bei 69 außer 3 × 23 auch 2 × 23,
bei 70 außer 5 × 14 auch 2 × 14, 3 × 14, 4 × 14
rechnen.

§. 68. Messen und Theilen der Zahlen von 1 bis 70 durch 7.

Wie bei dem dritten, vierten und fünften Zehner.

Aufg. z. Kopf= und Ziffern.

Die Zahlen von 71 bis 80.

§. 69. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Nach §. 48 und §. 52.

Aufg. z. Kopf= u. z. Ziffern.

§. 70. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen des Zehners.

Die Zahlen von 71 bis 80 werden bei dem Messen
mit 2, 3 u. 6 in 60 + 11, 60 + 12, 60 + 13, 60 + 14 ꝛc.
mit 4 in 40 + 31, 40 + 32, 40 + 33, 40 + 34 ꝛc.
mit 5 in 50 + 21, 50 + 22, 50 + 23, 40 + 24 ꝛc.
mit 7 in 70 + 1, 70 + 2, 70 + 3, 70 + 4 ꝛc.
zerlegt.

Bei dem Messen mit 8, 9 und 10 wird das Hinaufzählen angewendet.

Zur Besprechung der von den Schülern ausgeführten Zerfällungen wird bemerkt, daß

bei 72 außer 3 × 24 auch 2 × 24,
außer 4 × 18 auch 2 × 18, 3 × 18,
außer 6 × 12 auch 2 × 12, 3 × 12 ꝛc.
bei 75 außer 3 × 25 auch 2 × 25,
außer 5 × 15 auch 2 × 15, 3 × 15, 4 × 15,
bei 76 außer 4 × 19 auch 2 × 19, 3 × 19,
bei 77 außer 7 × 11 auch 2 × 11, 3 × 11 ꝛc.
bei 78 außer 6 × 13 auch 2 × 13, 3 × 13 ꝛc.
bei 80 außer 4 × 20 auch 2 × 20, 3 × 20,
außer 5 × 16 auch 2 × 16, 3 × 16, 4 × 16
bis zur Schlagfertigkeit vorzurechnen ist.

§. 71. Messen und Theilen der Zahlen von 1—80 durch 8.

Wie bei dem dritten, vierten und fünften Zehner.
Aufg. z. Kopf- u. z. Zifferr.

§. 72. Wiederholungen.

a. Zerfällung der Produktzahlen von 60 (oder 20) an bis 80 in ihre Faktorenpaare. Z. B.:
60 = ? × 2, ? × 30, ? × 3, ? × 20, ? × 4, ? × 15, ? × 5, ? × 12, ? × 6, ? × 10.

b. Theilen der Produktzahlen aus 2 von 60 an bis 80 durch 2.
$^1/_2$ von 64 = ? 64 = 60 + 4; $^1/_2$ von 60 + 4 = 30 + 2 oder 32.
$^1/_2$ von 76 = ? 76 = 60 + 16; $^1/_2$ von 60 + 16 = 30 + 8 oder 38.

c. Theilen der Produktzahlen aus 4 von 40 an bis 80 durch 4.
$^1/_4$ von 56 = ? 56 = 40 + 16; $^1/_4$ von 40 + 16 = 10 + 4 oder 14.
$^1/_4$ von 72 = ? 72 = 40 + 32; $^1/_4$ von 40 + 32 = 10 + 8 oder 18.

d. Das Meter und das Decimeter.

Angeschrieben:	Gelesen:
6,1 m	$6^1/_{10}$ m, 6 m 1 dm
7,3 m	$7^3/_{10}$ m, 7 m 3 dm
5,2 m	$5^2/_{10}$ m, 5 m 2 dm

u. s. w.

Die Zahlen von 81 bis 90.

§. 73. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Nach §. 48 und §. 52.
Aufg. z. Kopf- u. z. Zifferr.

§. 74. Messen und Theilen der einzelnen Zahlen.

Die Zahlen von 81 bis 90 werden bei dem Messen
mit 2, 4 u. 8 in 80 + 1, 80 + 2, 80 + 3, 80 + 4 ꝛc.
mit 3 und 6 in 60 + 21, 60 + 22, 60 + 23, 60 + 24 ꝛc.
mit 5 in 50 + 31, 50 + 32, 50 + 33, 50 + 34 ꝛc.
mit 7 in 70 + 11, 70 + 12, 70 + 13, 70 + 14 ꝛc.
zerlegt.

Aus wie vielmal 9 und 10 die einzelnen Zahlen bestehen, wird durch Hinaufzählen gefunden.

Bei Besprechung der von den Schülern ausgeführten Zerfällungen wird
bei 81 neben 3 × 27 auch 2 × 27,
bei 84 neben 4 × 21 auch 2 × 21, 3 × 21,
neben 6 × 14 auch 2 × 14, 3 × 14 ꝛc.,
neben 7 × 12 auch 2 × 12, 3 × 12 ꝛc.,
bei 85 neben 5 × 17 auch 2 × 17, 3 × 17 ꝛc.,
bei 88 neben 4 × 22 auch 2 × 22, 3 × 22,
neben 8 × 11 auch 2 × 11, 3 × 11 ꝛc.,
bei 90 neben 3 × 30 auch 2 × 30,
neben 5 × 18 auch 2 × 18, 3 × 18, 4 × 18,
neben 6 × 15 auch 2 × 15, 3 × 15 ꝛc.
wiederholt und bis Fertigkeit gerechnet.

§. 75. Messen und Theilen der Zahlen von 1—90 durch 9.

Wie bei dem dritten, vierten und fünften Zehner.
Aufg. z. Kopf= u. Zifferr.

§. 76. Wiederholungen.

a. Theilen der Produktzahlen aus von 60 an bis 90 durch 3.
$^1/_3$ von 75 = ? 75 = 60 + 15; $^1/_3$ von 60 + 15 = 20 + 5 oder 25.
$^1/_3$ von 81 = ? 81 = 60 + 21; $^1/_3$ von 60 + 21 = 20 + 7 oder 27.

b. Das Einmaleins.

Mit 2. 1 × 2, 2 × 2, 3 × 2, 4 × 2, 5 × 2 ꝛc.
„ 3. 1 × 3, 2 × 3, 3 × 3, 4 × 3, 5 × 3 ꝛc.
„ 4. 1 × 4, 2 × 4, 3 × 4, 4 × 4, 5 × 4 ꝛc.
u. s. w.

Die Zahlen von 91 bis 100.

§. 77. Bilden, Zerlegen, Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Veranschaulicht an der Rechenmaschine.

1. Bilden.

9 Zehner + 1 E. = 90 + 1 oder Einundneunzig, geschrieben 91.
9 Z. 1 E. + 1 E. = 90 + 2 oder Zweiundneunzig, „ 92.
u. s. w.

2. Zerlegen.

Da die Zahl 100 in ihrer praktischen Bedeutung die wichtigste der Zahlen ist, so muß sie eine ganz besondere Berücksichtigung erfahren. Der Schüler muß mit allen ihren Bestandtheilen, mit den Posten wie mit den Faktoren, mit den einfachen wie mit den mehrfachen Theilen, bis zur Schlagfertigkeit bekannt werden. Daher nun ihre ausführliche Behandlung.

a. Zerlegt die Zahl 100 so oft als möglich in zwei Theile!

100 = 99 + 1	100 = 89 + 1 + 10 oder 89 + 11
= 98 + 2	100 = 88 + 2 + 10 oder 88 + 12
= 97 + 3	100 = 87 + 3 + 10 oder 87 + 13
ꝛc.	u. s. w. bis
= 90 + 10	100 = 50 + 50.

b. 1 Mark gilt 100 Pfg., und 100 Pfg. machen zusammen 1 Mark.

Ich lasse mir für ein Markstück lauter einzelne Pfennige geben; wie viel solche muß ich erhalten? — Die 100 Pfg. vertheile ich in zwei Taschen. Wie viel davon kann ich in jede thun? (In die eine Tasche 50 und in die andere 50; in die eine 51 und in die andere 49; in die eine 52 und in die andere 48 u. s. w.)

3. Zuzählen.

a. Wie viel muß man zu 80 legen, um 100 zu erhalten? Wie viel zu 50? zu 20? zu 70? ꝛc. Wie viel
zu 84? (6 + 10 oder 16.) zu 68? (2 + 30 oder 32.)
zu 75? (5 + 20 oder 25.) zu 56? (4 + 40 oder 44.)
u. s. w.

b. Ich kaufe für 72 Pfg. Waare und zahle 1 Mark. Wie viel Pfennige muß der Kaufmann auf die Waare legen, damit ich von ihm an Waare und Geld wieder 1 Mark zurück erhalte? (8 + 20 oder 28 Pfg.; 72 + 8 = 80, 80 + 20 = 100.)

Jemand kauft 2 lt Wein, das Liter zu 44 Pfg., und zahlt 1 Mark; wie viel Pfg. erhält er zurück? (Die 2 lt Wein kosten 2 × 44 oder 88 Pfg.; von 88 auf 100 ist 2 + 10 oder 12; also erhält ꝛc.

4. Abziehen.

a. Wie viel ist:

100 — 10?	100 — 13?	(100 — 10 = 90, 90 — 5 = 85.)
100 — 50?	100 — 36?	(100 — 30 = 70, 70 — 6 = 64.)
100 — 30?	100 — 27?	(100 — 20 = 80, 80 — 7 = 83.)
ꝛc.	ꝛc.	

b. Von einer Mark gebe ich 56 Pfennige aus; wie viel habe ich noch? (100 Pfg. — 56 Pfg.; 100 — 50 = 50, und 50 — 6 = 44; also ꝛc.) Wie viel ist 1 Mark — 40, 70, 20, 16, 38, 83, 45 ꝛc. Pfennig?

c. 100 Liter = 1 Hektoliter. (Hekto heißt Hundert; Hektoliter = 100 Liter.) Von 1 Hl Bier sind 45 Liter abgegeben worden; wie viel davon ist noch vorhanden? (100 lt — 45 lt; 100 — 40 — 5 = 55; also ꝛc.) Dergleichen Aufgaben mehr.

5. Unterscheiden.

1) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 64 und 100?

a. Ich sehe zu, wie viel ich zu 64 legen muß, um 100 zu erhalten. Zu 64 noch 6 gibt 70, und zu 70 noch 30 gibt 100. Zu 64 muß ich also 6 + 30 oder 36 legen, um 100 zu erhalten.

b. Ich ziehe 64 von 100 ab und sehe zu, wie viel übrig bleibt. 100 — 60 = 40, und 40 — 4 = 36.

Der Unterschied zwischen 64 und 100 ist also 36.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

91 = ? × 2. 91 = 80 + 11 = 40 × 2 + 5 × 2 + 1 = 45 × 2 + 1.
91 = ? × 3. 91 = 90 + 1 = 30 × 3 + 1.
91 = ? × 4. 91 = 80 + 11 = 20 × 4 + 2 × 4 + 3 = 22 × 4 + 3.
91 = ? × 5. 91 = 50 + 41 = 10 × 5 + 8 × 5 + 1 = 18 × 5 + 1.

u. s. w.

So auch die Zahlen 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Wenn der Lehrer die von den Schülern ausgeführten Zerfällungen der einzelnen Zahlen bespricht, so lasse er

bei 91	außer	7 × 13	auch	2 × 13, 3 × 13 ꝛc.
bei 92	„	4 × 23	„	2 × 23, 3 × 23,
bei 95	„	5 × 19	„	2 × 19, 3 × 19 ꝛc.
bei 96	„	3 × 32	„	2 × 32,
	„	4 × 24	„	2 × 24, 3 × 24,
	„	6 × 16	„	2 × 16, 3 × 16 ꝛc.
	„	8 × 12	„	2 × 12, 3 × 12 ꝛc.
bei 98	„	7 × 14	„	2 × 14, 3 × 14 ꝛc.
bei 99	„	3 × 33	„	2 × 33,
	„	9 × 11	„	2 × 11, 3 × 11 ꝛc.
bei 100	„	4 × 25	„	2 × 25, 3 × 25,
	„	5 × 20	„	2 × 20, 3 × 20, 4 × 20.

bis zur Schlagfertigkeit wiederholt rechnen.

Der Besprechung der Zahl 100 schließen sich folgende Uebungen an:

1) In welche gleiche Theile läßt sich (also) die Zahl 100 zerlegen? (In 100 × 1, 50 × 2, 25 × 4, 20 × 5, 10 × 10, 5 × 20, 4 × 25, 2 × 50.)

2) Welchen Theil von 100 bildet jede dieser Zahlen? (1 = 1/100 von 100; 2 = 1/50 von 100; 4 = 1/25 von 100; 5 = 1/20 von 100 ꝛc.)

3) Welcher Theil von der Mark sind 50, 25, 20 ꝛc. Pfg.? (50 Pfg. = 1/2 M.; 25 Pfg. = 1/4 M.; 20 Pfg. = 1/5 M. u. s. w.)

4) Die Silber-, Nickel- und Kupfermünzen, welche einfache Theile von der Mark sind, werden nochmal vorgezeigt und mit den Kindern besprochen.

Das	50	Pfennigstück	ist		1/2	Mark,
das	20	„	„	„	1/5	„
das	10	„	„	„	1/10	„
das	5	„	„	„	1/20	„
das	2	„	„	„	1/50	„
das	1	„	„	„	1/100	„

5) Bis zur größten Fertigkeit wird geübt:

$1/2$ von 100 = 50;	$1/2$ Mark	=	50	Pfennige.
$1/4$ „ 100 = 25;	$1/4$ „	=	25	„
$1/5$ „ 100 = 20;	$1/5$ „	=	20	„
$1/10$ „ 100 = 10;	$1/10$ „	=	10	„
$1/20$ „ 100 = 5;	$1/20$ „	=	5	„
$1/25$ „ 100 = 4;	$1/25$ „	=	4	„
$1/50$ „ 100 = 2;	$1/50$ „	=	2	„
$1/100$ „ 100 = 1;	$1/100$ „	=	1	„

b. Wie viel Pfennige sind $3/4$ Mark? Mündlich und schriftlich:

1 ℳ = 100 ₰.
$1/4$ „ = 25 ₰.
$3/4$ „ = 3 × 25 ₰. = 75 ₰.

Ebenso werden in und außer der Reihenfolge in Pfg. aufgelöst.

$2/5$, $3/5$, $4/5$, $5/5$ ℳ.
$2/10$, $3/10$, ... $10/10$ ℳ.
$1/100$, $2/100$, ... $100/100$ ℳ.

7) $1/2$ ℳ + $1/4$ ℳ = ?
$1/2$ ℳ = 50 ₰.; $1/4$ ℳ = 25 ₰.; 50 ₰. + 25 ₰. = 75 ₰.; $1/2$ ℳ + $1/4$ ℳ = 75 ₰.

8) $7/10$ ℳ − $1/4$ ℳ?
$7/10$ ℳ = 7 × 10 oder 70 ₰.; $1/4$ ℳ = 25 ₰.; 70 ₰. − 25 ₰. = 45 ₰.

9) Wie viel Liter sind $1/2$, $1/4$, $3/4$, $1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$, $1/10$ ꝛc. Hl?

10) 100 Pfund = 1 Centner. Wie viel Pfund beträgt $1/2$, $1/4$, $3/4$ Centner?

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

§. 79. Messen und Theilen der Zahlen von 1 bis 100 durch 10.

a.

1+10, 11+10, 21+10 . . . 81+10; 100−10, 90−10, 80−10 ꝛc.
2+10, 12+10, 22+10 . . . 82+10; 99−10, 89−10, 79−10 ꝛc.
3+10, 13+10, 23+10 . . . 83+10; 98−10, 88−10, 78−10 ꝛc.
u. s. f. u. s. f.

10 = 10; 1 × 10 = 10
10 + 10 = 20; 2 × 10 = 20
10 + 10 + 10 = 30; 3 × 10 = 30
10 + 10 + 10 + 10 = 40; 4 × 10 = 40
u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 100 lassen sich aus der 10 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 5fache von 10? das 3fache von 10? ꝛc.
3) Wie viel Pfennige machen 3, 7, 5, 8, 10, 4 ꝛc. Zehnpfst.?
4) Wie viel Decimeter sind 2, 5, 8, 3 ꝛc. Meter?

b.

1) Aus wie vielmal 10 besteht 20? 50? 100? 80? ꝛc.
2) Wie oft ist 10 enthalten in 30? in 70? in 40? in 60? ꝛc.
„ „ „ 10 „ „ 13? in 41? in 77? in 66? ꝛc.

3) In welcher Zahl liegt 10 3mal? 5mal? 2mal? ꝛc.
4) Wie viel Mark machen 20, 50, 80, 15, 24, 36 Zehnpfft.?
5) Wie viel Meter sind 30, 70, 40, 16, 35 ꝛc. Decimeter?

c.

1) Zerlegt in 10 gleiche Theile die Zahl 10! 30! 60! 20! ꝛc.
2) Welches ist der 10. Theil von 20? von 50? von 30? ꝛc.
3) Wie viel betragen $^3/_{10}$ von 40? $^7/_{10}$ von 60? $^9/_{10}$ von 100? ꝛc.
4) Was verdient 1 Mann, wenn 10 Mann 30 (50, 80) *M.* verdienen?
5) Zehn Mann theilen sich in 9 Laibe Brod; wie thun sie das?
Aufg. z. Kopf- u. z. Zifferr.

§. 80. Meter und Decimeter.

Angeschrieben:	Gelesen:
3,4 m	$3^4/_{10}$ m, 3 m 4 dm
9,7 m	$9^7/_{10}$ m, 9 m 7 dm
5,2 m	$5^2/_{10}$ m, 5 m 2 dm
ꝛc.	ꝛc.

Uebersicht und Wiederholung.

§. 81. Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen.

Auf- und Abwärtszählen, bald einzeln, bald im Chor.

Mit 1.	1, 2, 3, 4, 5 . . . 100;	100, 99, 98, 97 ꝛc.
Mit 2.	1, 3, 5, 7, 9 . . . 99;	99, 97, 95, 93 ꝛc.
	2, 4, 6, 8, 10 . . . 100;	100, 98, 96, 94 ꝛc.
Mit 3.	1, 4, 7, 10, 13 . . . 100;	100, 97, 94, 91 ꝛc.
	2, 5, 8, 11, 14 . . . 98;	98, 95, 92, 89 ꝛc.
	3, 6, 9, 12, 15 . . . 99;	99, 96, 93, 90 ꝛc.

Eben so auch mit 4, 6, 7, 8, 8, 9, 10.

Ist bisher in unserem Sinne verfahren worden, so sind die Schüler im Zu- und Abzählen mit den Grundzahlen bereits so sicher und fertig, daß es überflüssig ist, mit jeder derselben alle möglichen Reihen zu durchlaufen, mit 4 also viermal hinauf und herunter zu zählen. Es genügt dann, wenn solches mit jeder Zahl nur ein- oder einigemal geschieht. Im entgegengesetzten Falle aber sind nicht nur alle möglichen Fälle zu erschöpfen, sondern es ist bei dieser Uebung überhaupt so lange zu verweilen, bis die erforderliche Sicherheit und Fertigkeit erworben ist.

§. 82. Verwandeln der Einer in Zehner und umgekehrt.

a. 48, wie vielmal 10 und 1? wie viel Zehner u. Einer?
Antw. $48 = 4 \times 10$ u. $8 \times 1 = 4$ Zehner und 8 Einer.
84! Antw. $84 = 8 \times 10$ u. $4 \times 1 = 8$ Zehner und 4 Einer.
Wird bis zur Fertigkeit fortgesetzt.

b. 5 Zehner u. 6 Einer, wie viele Einer?
Antw. 5 Z = 5 × 10 oder 50 E; 50 E + 6 E = 56 E.
6 Z 5 E! Antw. 6 Z = 6 × 10 oder 60 E; 60 E + 5 E = 65 E.
Wird bis zur Fertigkeit fortgesetzt.

§. 83. Das Zusammenzählen zweistelliger Zahlen.

Zuerst anschaulich, dann frei im Kopfe.

50 + 30 = ? 5 Z + 3 Z = 8 Z oder 80 E; 50 + 30 = 80.
40 + 27 = ? 4 Z + 2 Z 7 E = **6** Z 7 E = 67 E; 40 + 20 = 60, + 7 = 67.
36 + 40 = ? **3** Z 6 E + **4** Z = **7** Z 6 E = 76 E; 36 + 40 = 76.
56 + 42 = ? 56 + 40 = **96**, + 2 = **98**.
48 + 36 = ? 48 + 30 = **78**, + 6 = 84.

Mit Betonung der fett gedruckten Einheiten.

Wiederholtes Zuzählen der Zahlen von 11 bis 20.

Im Chor: 11 + 11 = 22, 22 + 11 = 33, 33 + 11 = 44 ꝛc.
12 + 12 = 24, 24 + 12 = 36, 36 + 12 = 48 ꝛc.
bis
20 + 20 = 40, 40 + 20 = 60, 60 + 20 = 80 ꝛc.

Hiebei ist darauf zu achten, daß die Schüler nicht in den singenden Ton verfallen, sondern sich rasch und bestimmt ausdrücken.

Aufg. z. Ziffferr.

§. 84. Das Abziehen zweistelliger Zahlen.

Zuerst anschaulich, dann frei im Kopfe.

80 — 50 = ? 8 Z — 5 Z = 3 Z oder 30 E; 80 — 50 = 30.
67 — 20 = ? 6 Z 7 E — 2 Z = **4** Z 7 E oder 47 E; 67 — 20 = 47.
85 — 43 = ? 85 — 40 = **45**, und 45 — 3 = **42**; 85 — 43 = 42.
90 — 54 = ? 90 — 50 = 40, und 40 — 4 = 36; 90 — 54 = 36.
74 — 28 = ? 74 — 20 = 54, und 54 — 8 = 46; 74 — 28 = 46.

Wiederholtes Abziehen der Zahlen von 11 bis 20.

In Chor: 100 — 11 = 89, 89 — 11 = 78, 78 — 11 = 67 ꝛc.
100 — 12 = 88, 88 — 12 = 76, 76 — 12 = 64 ꝛc.
u. s. w.

Aufg. z. Kopf- u. Ziffferr.

§. 85. Das Vervielfachen.

1. Das Einmaleins wird von den Schülern zusammengestellt, tüchtig wiederholt, und vom Lehrer in und außer der Reihenfolge abgefragt.

2. Vervielfachung der Grund- und zweistelligen Zahlen durch die Grundzahlen.

2×1	3×1	4×1	5×1	6×1	7×1	8×1	9×1
2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2	9×2
2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	7×3	8×3	9×3
2×4	3×4	4×4	5×4	6×4	7×4	8×4	9×4
|	|	|	|	|	|	|	|
2×50;	3×33;	4×25;	5×20;	6×16;	7×14;	8×12;	9×11

Aufg. z. Kopf- und Ziffferr.

§. 86. Enthaltensein und Theilen.

Mit 2.

Mit welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 auf? Wie oft ist 2 in diesen Zahlen enthalten? Wie viel beträgt die Hälfte von jeder?

In welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 nicht auf? Wie viel ist die Hälfte von 1 Apfel? von 1 Nuß? von 1?

Wie sucht man die Hälfte von 5? (5=4+1; die Hälfte von 4 ist 2, und die Hälfte von 1 ist 1/2; die Hälfte von 5 ist 2 1/2.

Da diese Uebung, nämlich das Theilen der Reste, später ohnehin vorkommt, so genügen hier einige Aufgaben. Das Nachfolgende ist zur Fertigkeit zu bringen.

Wie heißen die (reinen) Zehnerzahlen von 20 an bis 100? (20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 9, 100.) Welche von diesen Zahlen werden am leichtesten durch 2 getheilt? (20, 40, 60, 80, 100.)

Diese Zahlen heißen darum die Hauptzahlen von 2. Wie viel beträgt die Hälfte von 20? von 60? von 80? von 100?

Die andern Zahlen werden erst zerlegt, ehe man sie durch 2 theilt.

a. Wie oft ist 2 in 36 enthalten?
Die nächste Hauptzahl unter 36 ist 20; 36 = 20 + 16; 2 ist in 20 10mal und in 16 8 mal, in 36 also 10 + 8 od. 18mal enthalten.

b. Wie viel ist die Hälfte von 54?
Die nächste Hauptzahl (von 2) unter 54 ist 40; 54 = 40 + 14; die Hälfte von 40 ist 20, und die Hälfte von 14 ist 7; die Hälfte von 54 ist 20 + 7 oder 27.

Mit 3.

In welchen Zahlen von 1 bis 30 geht 3 auf? Wie oft ist 3 in diesen Zahlen enthalten? Wie viel beträgt der dritte Theil von jeder?

In welchen Zahlen geht 3 nicht auf? Wie viel ist der dritte Theil von 1 Apfel? von 2 Aepfeln? von 1? von 2?

Wie suchst du den dritten Theil von 10? (10 = 9 + 1; der dritte Theil von 9 ist 3, und der dritte Theil von 1 ist 1/3; der dritte Theil von 10 ist 3 1/3.) — Nur einige Aufgaben dieser Art.

Welche Zehnerzahlen werden am leichtesten durch 3 getheilt? (30, 60, 90.) Diese Zahlen heißen darum die Hauptzahlen von 3. Sucht von ihnen den dritten Theil!

Die übrigen Zahlen werden erst zerlegt, ehe man sie durch 3 theilt.

a. Wie oft ist 3 in 51 enthalten?
Die nächste Hauptzahl (von 3) unter 51 ist 30; 51 = 30 + 21; 3 ist in 30 10mal und in 21 7mal, in 51 also 10 + 7 oder 17mal enthalten.

b. Wie viel beträgt der dritte Theil von 87?
Die nächste Hauptzahl (von 3) unter 87 ist 60; 87 = 60 + 27; der dritte Theil von 60 = 20 und von 27 = 9; 20 + 9 = 29.
So auch mit 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 87. Die Operationen in Verbindung.

a. 48 + 3 × 7 =?
3 × 7 = 21; 48 + 21 = 69; also ist 48 + 3 × 7 = 69.

b. $75 - 7 \times 8 = ?$
$7 \times 8 = 56$; $75 - 50 = 25$, und $25 - 6 = 19$; also ꝛc.

c. $4 \times 7 + 5 \times 7 = ?$
$4 \times 7 = 28$, und $5 \times 7 = 35$; $28 + 35 = 63$; also ꝛc.
Oder: $4 \times 7 + 5 \times 7 = 9 \times 7$, $9 \times 7 = 63$.

Schriftl.
$$\begin{array}{r} 4 \times 7 = 28 \\ + 5 \times 7 = 35 \\ \hline 4 \times 7 + 5 \times 7 = 63 \end{array}$$

§. 88. Zerlegung der Produktzahlen in ihre Faktoren.

$4 = 2 \times 2$
$6 = 3 \times 2$ und $= 2 \times 3$
$8 = 4 \times 2$ und $= 2 \times 4$
So fort bis
$100 = 50 \times 2$ und $= 2 \times 50$
$= 25 \times 4$ und $= 4 \times 25$
$= 20 \times 5$ und $= 5 \times 20$
$= 10 \times 10$.

§. 89. Decimeter und Centimeter und ihre decimale Schreibung.

a.

Das mit ziemlich starken Strichen in Decimeter abgetheilte Meter steht an der Wandtafel. Durch etwas schwächere Striche theilt der Lehrer das erste Decimeter wieder in 10 gleiche Theile, läßt diese von den Kindern zählen und sagt, daß diese Theile Centimeter heißen. Die Schüler sprechen:

1 dm = 10 cm

Gleiches geschieht nach und nach mit allen 10 Decimetern, und dabei heißt es:

2 dm = 2 × 10 oder 20 cm
3 dm = 3 × 10 oder 30 cm
u. s. w. bis
10 dm = 10 × 10 oder 100 cm
1 Meter = 100 Centimeter.

Zu einem Schüler: Zeige uns mit diesem Stäbchen 4 Centimeter! 6 cm! 8 cm! — Zeige uns 1 dm + 2 cm und sage zugleich, wie viel Centimeter es sind! (1 dm + 2 cm = 10 + 2 oder 12 cm.) Eben so 2 dm + 4 cm! 3 dm + 5 cm! ꝛc.

b.

Die Decimeter sind Zehntelmeter. Welche Theile von dem Meter sind nun aber die Centimeter? (Die Centimeter sind Hundertelmeter.) Die Veranschaulichung an der Wandtafel benützend:

$^{1}/_{10}$ m = $^{10}/_{100}$ m
$^{2}/_{10}$ m = 2 × 10 oder $^{20}/_{100}$ m
$^{3}/_{10}$ m = 3 × 10 oder $^{30}/_{100}$ m
u. s. w. bis
$^{10}/_{10}$ m = 10 × 10 oder $^{100}/_{100}$ m

Zu einem Schüler: Zeige du uns $^{1}/_{100}$ Meter! $^{3}/_{100}$ Meter! $^{5}/_{100}$ Meter! $^{7}/_{100}$ Meter; — Zeige uns das Stück, welches $^{1}/_{10} + ^{1}/_{100}$ Meter groß ist und sage uns zugleich, wie viel 100tel es beträgt! ($^{1}/_{10} + ^{1}/_{100} = ^{10}/_{100} + ^{1}/_{100}$ oder $^{11}/_{100}$.) Eben so: $^{1}/_{10} + ^{5}/_{100}$! $^{2}/_{10} + ^{3}/_{100}$! rc.

c.

Nun sollt ihr auch erfahren, wie man die Centimeter oder Hundertelmeter schreibt. Unter der Hand des Lehrers entsteht folgende Zeichnung, hier im verkleinerten Maßstabe:



$1\,^{m} + ^{1}/_{10}\,^{m} + ^{1}/_{100}\,^{m}$, geschrieben: $1\,,_{1}\,_{1}\,^{m}$.

Was die große Ziffer 1 vor dem Komma und die erste kleine Ziffer 1 nach dem Komma bedeuten, wißt ihr schon: $1\,^{m} + ^{1}/_{10}\,^{m}$, 1 Meter und 1 Decimeter. Die zweite kleine Ziffer 1 bedeutet $^{1}/_{100}$ Meter oder 1 Centimeter.

Wir lesen aber nicht $^{1}/_{10}\,^{m} + ^{1}/_{100}$ Meter, sondern $^{11}/_{100}$ Meter; auch nicht 1 Decimeter und 1 Centimeter, sondern 11 Centimeter. Wie wird es also im Ganzen gelesen? ($1\,^{m} + ^{11}/_{100}\,^{m}$, $1\,^{m}$ + 11 Centimeter.)

Die Veranschaulichung weiter auszudehnen, wird dem Lehrer überlassen.

Angeschrieben:	Gelesen:
$1,_{11}\,^{m}$	$1^{11}/_{100}\,^{m}$ oder $1\,^{m}$ u. $11\,^{cm}$
$1,_{12}\,^{m}$	$1^{12}/_{100}\,^{m}$ oder $1\,^{m}$ u. $12\,^{cm}$
$2,_{15}\,^{m}$	$2^{15}/_{100}\,^{m}$ oder $2\,^{m}$ u. $15\,^{cm}$
$5,_{23}\,^{m}$	$5^{23}/_{100}\,^{m}$ oder $5\,^{m}$ u. $23\,^{cm}$

u. s. w.

§. 90. Die decimale Schreibung der Münzen.

Welcher Theil ist 1 von 100? ($^{1}/_{100}$.) Welcher Theil ist nun auch 1 Pfennig von 1 Mark? (1 Pf. ist $^{1}/_{100}$ von 1 Mark.) 1 Pf. ist $^{1}/_{100}$ Mark.

Wie viele Hundertelmark sind 2 Pf? (2 Pf. sind $^{2}/_{100}$ ℳ.) 3 Pf? 7 Pf.? 12 Pf.? 23 Pf.? 36 Pf. u. s. w.

Wie kann man also anstatt 1 Mark und 1 Pf. auch sagen? (1 ℳ. + $^{1}/_{100}$ ℳ.) Anstatt 1 Mark und 7 Pf.? (1 ℳ. + $^{7}/_{100}$ ℳ.) Anstatt 2 ℳ. u. 12 ₰.? rc.

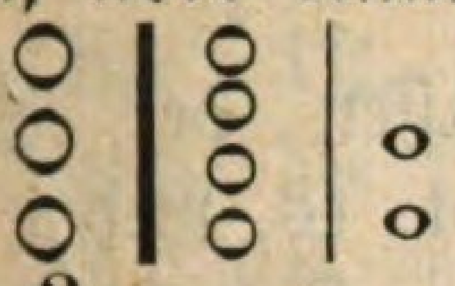
Wie schreibt man 1 Meter und $^{11}/_{100}$ Meter? (1, Komma, 11). Wie wird man also auch 1 Mark und $^{11}/_{100}$ Mark schreiben? (1, Komma, 11).

Leset nun, was ich jetzt anschreibe!

Angeschrieben:	Gelesen:
$1,_{12}$ ℳ.	1 + $^{12}/_{100}$ ℳ., 1 ℳ. 12 ₰.
$1,_{36}$ ℳ.	1 + $^{36}/_{100}$ ℳ., 1 ℳ. 36 ₰.
$2,_{45}$ ℳ.	2 + $^{45}/_{100}$ ℳ., 2 ℳ. 45 ₰.
$5,_{60}$ ℳ.	5 + $^{60}/_{100}$ ℳ., 5 ℳ. 60 ₰.
$8,_{04}$ ℳ.	8 + $^{4}/_{100}$ ℳ., 8 ℳ. 4 ₰.

u. s. w.

Veranschaulicht wird es, wenn man bei geeigneter Vorrichtung Markstücke, Zehnpfennigstücke und einfache Pfennige, geordnet in drei Reihen, über einander stellt.



3 , 4 2 ℳ = 3 ℳ + 4 × 10 oder 40 ₰ + 2 ₰ = 3 ℳ 42 ₰.
$= 3 + {}^{4}/_{10} + {}^{2}/_{100}$ ℳ $= 3 + {}^{42}/_{100}$ ℳ.

§. 91. Die decimale Schreibung der Hohlmaße.

Das Verfahren ist das nämliche wie bei den Münzen. 100 Liter = 1 Hektoliter. (Hekto heißt Hundert; Hekto-Liter = 100 Liter.)

1 lt = $^{1}/_{100}$ Hl	1 Hl + 5 lt = 1 Hl + $^{5}/_{100}$ Hl
4 lt = $^{4}/_{100}$ „	3 Hl + 12 lt = 3 Hl + $^{12}/_{100}$ Hl
9 lt = $^{9}/_{100}$ „	8 Hl + 27 lt = 8 Hl + $^{27}/_{100}$ Hl
15 lt = $^{15}/_{100}$ „	10 Hl + 40 lt = 10 Hl + $^{40}/_{100}$ Hl
32 lt = $^{32}/_{100}$ „	15 Hl + 72 lt = 15 Hl + $^{75}/_{100}$ Hl

Angeschrieben:	Gelesen:	
$1,_{12}$ Hl	1 + $^{12}/_{100}$ Hl,	1 Hl 12 lt
$5,_{24}$ „	5 + $^{24}/_{100}$ „	5 Hl 24 lt
$8,_{60}$ „	8 + $^{60}/_{100}$ „	8 Hl 60 lt
$4,_{05}$ „	4 + $^{5}/_{100}$ „	4 Hl 5 lt

u. s. w.

§. 92. Zusammenstellung und Wiederholung.

Zum Schlusse schreibt man eine Reihe von Zahlen mit zwei Decimalstellen an die Wandtafel und läßt dieselben, indem man einmal das Zeichen ^{m}, dann das Zeichen ℳ und dann das Zeichen Hl beifügt, wiederholt und zwar jedesmal auf zweierlei Weise lesen. Z. B.:

$1,_{45}$ ^{m}
$9,_{64}$ ^{m}
$16,_{72}$ ^{m}
$45,_{90}$ ^{m}
$32,_{08}$ ^{m}

Zuerst $1^{45}/_{100}$ ^{m}, $9^{64}/_{100}$ ^{m}, $16^{72}/_{100}$ ^{m} ꝛc.; dann: 1 ^{m} 45 ^{cm}, 9 ^{m} 64 ^{cm} ꝛc. Eben so mit dem Zeichen ℳ und mit dem Zeichen Hl.

§. 93. Wenn der Schüler später der decimalen Schreibweise überall, wo sie anwendbar ist, ausschließlich sich bedienen soll, und wenn, wie wohl angenommen werden darf, es leichter geht, eine Vorstellung neu zu gewinnen, als eine bereits eingelebte durch eine neue zu verdrängen, so muß die Form, in welcher dem Schüler die arithmetische Bezeichnung der mehrfach benannten Zahlen zuerst vor Augen kommt, die decimale einfach benannte sein. Die decimale Darstellung muß zur Grundlage werden.

Durch die vorstehenden Uebungen soll der Schüler z. B. die arithmetische Bezeichnung: 3,85 ℳ als drei Mark fünfundachtzig Pfennig auffassen und in Folge dessen auch drei Mark fünfundachtzig Pfennig als 3,85 ℳ sich vorstellen lernen. Mehr will und soll auf dieser Stufe nicht erzielt werden.

Für Präparandenschulen.

§. 94. Vorbemerkung.

Ohne deutliche Zahlenbegriffe, ohne klares Auffassen der Zahlenverhältnisse, ohne Sicherheit in den Zahlenoperationen gibt es weder einen gewandten Rechner, noch einen guten Rechenlehrer. Der Schulpräparand soll beides werden. Das zweckmäßigste Mittel, das hiezu als nothwendig Bezeichnete sich anzueignen, ist die durch das Normativ vorgeschriebene allseitige Behandlung der Zahlen von Eins bis Tausend. Es ist daher in der Präparandenschule wenigstens vom ersten Hundert jede Zahl mehr oder weniger ausführlich, im Ganzen aber erschöpfender als in der Volks- oder deutschen Schule zu behandeln. Der Präparand soll das Verhältniß einer Zahl nicht nur zu denjenigen kleineren Zahlen auffassen, von denen sie ein reines Vielfaches, sondern auch zu solchen, von denen sie ein gemischtes Vielfaches ist; deßgleichen soll er das Verhältniß nicht nur derjenigen kleineren Zahlen zu ihr bestimmen, welche einfache Theile, sondern auch derjenigen, welche mehrfache Theile von ihr sind.

---

§. 95. Beispielsweise Behandlung der Zahl 24.

a. Nach dem arithmetischen oder Unterschieds-Verhältniß.

1. Die Zahl 24 der Reihe nach in 23 + 1, 22 + 2, 21 + 3 ꝛc. zu zerlegen, ist für Präparanden zu leicht und nimmt zu viel Zeit in Anspruch. Besser ist es, der Lehrer nennt in vermischter Aufeinanderfolge einen Posten um den andern und läßt den fehlenden möglichst rasch von einem der Schüler angeben. Z. B. 24 ist 19 +? (24 ist 19 + 5) 13! (24 ist 13 + 11) 8! (24 ist 8 + 16) ꝛc.

2. Wie viel muß man zu 17 legen um 24 zu erhalten? (3+4 oder 7.) Wie viel zu 9? (1 + 14 oder 15.) ꝛc.

3. Wie viel ist 24 — 7? 24 — 19? 24 — 12? ꝛc.

4. Um wie viel ist 24 größer als 9? Um wie viel ist 16 kleiner als 24? Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 15 und 24? zwischen 24 und 11?

b. Nach dem geometrischen oder Theilverhältniß.

1. Die Zahl 24 und ihre Faktoren.

$24 = 12 \times 2$	$2 = \frac{1}{12} \times 24$
$= 8 \times 3$	$3 = \frac{1}{8} \times 24$
$= 6 \times 4$	$4 = \frac{1}{6} \times 24$
$= 4 \times 6$	$6 = \frac{1}{4} \times 24$
$= 3 \times 8$	$8 = \frac{1}{3} \times 24$
$= 2 \times 12$	$12 = \frac{1}{2} \times 24$

Auf diese Uebung hat der Schüler sich vorzubereiten. Er muß das Vorstehende in ein Heft eingetragen haben und auf jede Frage darüber rasch und sicher antworten können. Z. B.

a. Das Wievielfache ist 24 von 8? von 4? von 12? ꝛc.
b. Welcher Theil von 24 ist 6? 2? 8? 3? ꝛc.
c. Wie heißen die einzelnen Faktoren von 24? (2, 3, 4, 6, 8, 12. Oder: 12, 8, 6, 4, 3, 2.)
d. Nenne die Faktorenpaare von 24? (2 u. 12, 3 u. 8, 4 u. 6.)
e. Wie viel beträgt $^3/_4$ ($^5/_6$, $^2/_3$, $^7/_8$) von 24?

2. Die Zahl 24 und die übrigen kleineren Zahlen.

a. Das Wievielfache ist 24 von 9? (24 ist 18 + 6; 18 ist 2 × 9, und 6 ist $^2/_3$ × 9; 24 ist also $2^2/_3$ × 9 oder das $2^2/_3$fache von 9.)
b. Was für ein (mehrfacher) Theil ist 9 von 24? (9 ist 3 × 3, und 24 ist 8 × 3; 3 ist $^1/_8$ von 24, 9 also $^3/_8$ von 24.)

Auf dieselbe Weise wie zwischen 24 und 9 wird das Verhältniß auch zwischen 24 und 16, 24 u. 18, 24 u. 20 ꝛc. und so überhaupt immer das Verhältniß zwischen der behandelten größeren Zahl und denjenigen kleineren Zahlen bestimmt, welche ein gemeinschaftliches Maß mit ihr haben.

Hie und da werden auch einige Aufgaben mit der angewandten Zahl gegeben, hier z. B.: Wie hoch kommen 24 Kgr, wenn 12 (8, 6, 4, 3, 2) Kgr 8 Mark kosten? 24 Personen verdienen 20 Mark, wie viel davon kommt auf 12 (6, 3) derselben?

Gehen diese Uebungen frisch und rasch von Statten, was nach wenigen Unterrichtsstunden der Fall sein wird, und wird bei den Primzahlen vorzugsweise oder auch blos das arithmetische und bei den Produktzahlen vorzugsweise das geometrische Verhältniß in Betracht gezogen; so können in jeder Stunde durchschnittlich 5 Zahlen, sämmtliche Zahlen von 1 bis 100 also in etwa 20 Stunden oder 5 Wochen behandelt werden.

Zu bemerken ist noch, daß nach jedem Zehner die bis dahin vorgenommenen Zerfällungen der Produktzahlen in ihre Faktoren zu wiederholen sind, und daß sich die Schüler darauf vorzubereiten haben.

---

§. 96. Von den Produkt- und Primzahlen.

Nimmt man die Eins, die absolute Einheit, wiederholt zu sich selbst, so entstehen die Zahlen in ihrer Reihenfolge. 1, 2 × 1 = 2, 3 × 1 = 3, 4 × 1 = 4 u. s. f.

Man kann aber auch jede andere Zahl als Einheit setzen und, indem man sie wiederholt zu sich nimmt, Vielfache von ihr bilden. Daher gibt es auch Zahlen, welche noch aus anderen Zahlen entstehen können, als aus Eins. Z. B. 4 und 6. Die Zahl 4 kann auch entstehen aus 2 × 2, und die Zahl 6 aus 3 × 2 und 2 × 3.

Diejenigen Zahlen, welche sich aus keiner andern Zahl erzeugen lassen, als aus Eins, heißen Primzahlen. Diejenigen Zahlen dagegen, welche auch durch Vervielfachung einer andern Zahl entstehen können, werden Produktzahlen genannt.

Die Zahl 5 läßt sich nur bilden, indem die Eins wiederholt zu sich genommen wird. Sie ist daher eine Primzahl. Die Zahl 6 hingegen, die

nicht nur aus 6 × 1, sondern auch aus 3 × 2 und 2 × 3 entstehen kann, ist eine Produktzahl. Jede Zahl (außer Eins), durch deren Vervielfachung eine andere gewisse Zahl entstehen kann, ist ein Faktor derselben. Die 2, 3mal genommen, gibt 6. Mithin ist 2 ein Faktor von 6. Da aber 3 × 2 = 2 × 3, und 6 also auch aus 2 × 3 entstehen kann, so ist nicht nur 2, sondern auch 3 ein Faktor von 6, woraus überhaupt folgt, daß jede Produktzahl wenigstens zwei Faktoren hat.

Zwei Faktoren einer Zahl, von denen der eine den andern bedingt, nennt man ein Faktorenpaar. Manche Produktzahlen haben nur ein Faktorenpaar, andere haben deren mehr. Die Zahl 6 hat nur das Factorenpaar 2 × 3 oder 3 × 2; die Zahl 12 hat zwei, nämlich 2 × 6 und 3 × 4.

Eine Zahl, welche in einer andern ohne Rest enthalten ist, von derselben also mehrmal, ohne daß ein Rest bleibt, weggenommen oder weggemessen werden kann, nennt man das Maß derselben. Und eine Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile eine andere Zahl ohne Rest getheilt werden kann, nennt man den Theiler derselben.

3 ist in 15 5mal, und 5 ist in 15 3mal ohne Rest enthalten. 3 und 5, die Faktoren von 15, sind also auch die Maße von 15.

Zerlegt man 15 in 3 gleiche Theile, so kommt auf jeden Theil 5; zerlegt man 15 in 5 gleiche Theile, so kommt auf jeden Theil 3. Man mag also 15 in 3 oder in 5 gleiche Theile zerlegen, so entfällt auf den Theil eine ganze Zahl. 15 ist durch 3 und 5 theilbar *).

3 und 5, die Faktoren von 15, sind also zugleich die Maße und Theiler von 15.

Die Faktoren von 12 sind 2, 3, 4, 6. Alle diese Zahlen sind daher auch in 12 ohne Rest enthalten, und 12 ist durch sie theilbar. Sie sind die Maße und Theiler von 12.

Hieraus geht zugleich hervor, daß in den Primzahlen keine andere Zahl (außer der Eins) aufgeht, und daß sie, da 1 nicht theilt, nur durch sich selbst theilbar sind.

Da aus einer Zahl durch ihre Vervielfachung eine ganze Reihe anderer Zahlen entstehen kann, so muß es auch Zahlenreihen und demnach auch Zahlenpaare geben, in denen eine und dieselbe Zahl ohne Rest enthalten ist, und die eben darum eine und dieselbe Zahl als Maß oder Theiler gemeinschaftlich haben.

Die Zahlen 4, 6, 8, 10 z. B. sind Vielfache von 2; 2 geht daher auch in allen diesen Zahlen auf. Mithin ist 2 das gemeinschaftliche Maß, der gemeinschaftliche Theiler derselben.

21 und 35 sind Produktzahlen von 7; 7 geht daher sowohl in 21

---

*) Theilbar, im weitern Sinne des Wortes, ist 15 durch jede Zahl. 15 durch 2 getheilt = $7^1/_2$, 15 durch 16 getheilt = $^{15}/_{16}$. Theilbar, im engern Sinne des Wortes, sind Zahlen nur dann, wenn die Theile weder Brüche, noch gemischte Zahlen, sondern ganze Zahlen sind. Und in diesem Sinne ist 15 außer durch sich selbst nur noch theilbar durch 3 und 5.

als in 35 auf; 21 und 35 haben 7 zum gemeinschaftlichen Maße oder Theiler.

Sehr häufig haben zwei oder mehrere gegebene Zahlen mehr als ein gemeinschaftliches Maß. In 8 und 12 geht nicht nur 2 auf, sondern auch 4; die Zahlen 8 und 12 haben also zwei gemeinschaftliche Maße oder Theiler. In 24, 36 und 60 sind 2, 3, 4, 6 und 12 ohne Rest enthalten. Hier gibt es also fünf gemeinschaftliche Theiler. Der größte davon ist 12.

Wie überaus wichtig es ist, das größte gemeinschaftliche Maß gegebener Zahlen schnell, wie mit einem Blick, zu erkennen, wird sich später hundertmal zeigen. Hier nur ein Beispiel. 39 Meter kosten 27 ℳ; wie hoch kommen 52 Meter? Die Aufgabe sei im Kopfe zu rechnen. Kennt man die gemeinschaftlichen Maße von 39 und 52 nicht, so muß man zuerst berechnen, was 1 Meter kostet. Man muß also den 39 Theil von 27 ℳ suchen und ihn dann 52mal nehmen. Wie schwierig! Wie leicht rechnet sich's dagegen, wenn man das größte gemeinschaftliche Maß von 39 und 52 kennt! Dasselbe ist 13. Man geht daher von 39 Meter auf 13 Meter und von 13 Meter auf 52 Meter. Also hat man in diesem Falle nur den 3. Theil von 27 ℳ zu suchen und denselben nur 4mal zu nehmen.

Fragen.

1) Was sind Primzahlen? 2) Wie heißen alle Primzahlen zwischen 1 und 100? 3) Was sind Produktzahlen? 4) Was sind Faktoren? 5) Was sind Faktorenpaare? 6) Was versteht man unter dem Maße oder Theiler einer Zahl? 7) Was heißt: eine Zahl ist durch 7 theilbar? 8) Durch welche Zahlen ist 36 theilbar? Durch welche 57? 75? 84? 96? 9) Was versteht man unter einem gemeinschaftlichen Maße oder Theiler? 10) Welche gemeinschaftliche Maße haben die Zahlen 48 und 72 und welches ist der größte?

S. Aufgabensammlung des Verf. für Lehrerbildungsanstalten.

Zweiter Cursus.

Die Grundrechnungsarten in größeren Zahlen.

Erste Abtheilung.

Die Zahlen von Eins bis Tausend.

I.

Auffassen, Lesen und Schreiben der Zahlen.

§. 97. Vorbemerkung.

Die Zahlen von 1 bis 100 sind bekannt. Aus ihnen sind die Zahlen von 100 bis 1000 zusammengesetzt. Ihre Veranschaulichung durch Striche, Kugeln ꝛc. fällt deshalb weg. Dafür ist nöthig, daß der Schüler veranlaßt werde, sie mit den allseitig angeschauten Zahlen von 1 bis 100 zu messen und die Menge ihrer Einheiten (Einer, Zehner und Hunderter) sich klar vorzustellen. Zu diesem Zwecke lassen wir zunächst von einem Hundert zum andern aufwärts zählen. Damit der Schüler aber nicht gedankenlos fortschreite, nicht Zahlennamen ohne Inhalt nenne, so fordern wir ihn öfters auf, inne zu halten, die Stufe, bei der er sich befindet, zu bestimmen und sowohl den schon zurückgelegten, als den noch vorliegenden Weg in's Auge zu fassen. Nach Diesem und nach einigen anderen Uebungen gehen wir zum Lesen und Schreiben, zum Messen der Zahlen mit dem Zehner und dann zu den Grundrechnungsarten über.

§. 98. Auffassen der Zahlen bis Tausend.

Zuerst zählen wir zum ersten Hundert wieder alle Zahlen von 1 bis 100.
100, 101, 102, 103, 104, 105, 106 —

Halt! Bei welcher Zahl stehen wir jetzt? Woraus ist die Zahl 106 zusammengesetzt? (Aus 1 Hunderter und 6 Einern.) Zu welchem Hunderter gehören die 6 Einer? (Zum zweiten Hunderter.) Und zu

welchem Zehner dieses Hunderts gehören sie? (Zum ersten Z.) Wie viele Einer fehlen noch an diesem ersten Zehner? (Noch 4.) Und wie viele Zehner fehlen noch am zweiten Hundert? (Noch 9.) Weiter!

107, 108, 109, 110, 111, 112, 113 —

Halt! 113 = 1 Hunderter, 1 Zehner und 3 Einer. Die 3 Einer gehören zum 2ten Zehner des 2ten Hunderts; es fehlen noch 7 Einer, bis der 2te Zehner voll ist, und noch 8 Zehner, bis das 2te Hundert voll ist.

Sind wir in dieser Weise bis 200 gekommen, so werden dann wieder alle Zahlen von 1 bis 100 zu 200 gezählt. So geht es fort, bis das Tausend voll ist. Dabei wird immer in jedem Hundert öfters Halt gemacht und, wie angegeben, verfahren. Bei der Zahl 357 heißt es: 357 = 3 Hunderter, 5 Zehner und 7 Einer. Die 7 Einer gehören zum 6ten Zehner des 4. Hunderts; es fehlen noch 3 Einer, bis der 6te Zehner voll ist, und noch 4 Zehner, bis der 4te Hunderter voll ist. — So fort bis 1000.

§. 99. Fortsetzung.

a. Wie viel muß man legen

1) zu 180 (zu 140, zu 176, zu 165), um 200 zu erhalten?
2) zu 270 (zu 250, zu 268, zu 284), um 300 zu erhalten?
u. s. w. bis
3) zu 920 (zu 948, zu 850, zu 825 ꝛc.) um 1000 zu erhalten?

b.

1000 = 900 + ?	1000 = 940 + ?	1000 = 999 + ?
= 800 + ?	= 830 + ?	= 998 + ?
= 700 + ?	= 720 + ?	= 997 + ?
= 600 + ?	= 660 + ?	u. s. f. bis
= 500 + ?	= 550 + ?	= 950 + ?

c. Welche Zahl hat 5 Zehner und 8 Einer? Welche hat 7 Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer?

Welche Zahl hat

2 H., 4 Z. u. 3 E.?	3 H., 1 Z. u. 9 E.?	5 H., 7 Z. u. 4 E.?
6 H., 9 Z. u. 5 E.?	8 H., 8 Z. u. 8 E.?	9 H., 3 Z. u. 6 E.?

§. 100. Das Lesen der Zahlen.

H	Z	E.	
1	0	1	= 1 H., 0 Z., 1 E. = einhundert und eins.
8	5	0	= 8 H., 5 Z., 0 E. = 8×100+5×10+0×1 = 800+50 od. 850.
4	7	6	= 4 H., 7 Z., 6 E. = 4×100+7×10+6×1 = 400+70+6 od. 476.

u. s. w.; zuletzt noch

1000 = 10 H., 0 Z., 0 E. = 10×100 oder eintausend.

So zuerst, dann ohne Hilfslinien.

204 = 2 H., 0 Z., 4 E. = zweihundertundvier.
740 = 7 H., 4 Z., 0 E. = siebenhundertundvierzig.
583 = 5 H., 8 Z., 3 E. = fünfhundertdreiundachtzig.
u. s. w.

§. 101. Das Schreiben der Zahlen.

a. Innerhalb gezogener Linien.

	H	Z	E
Der Lehrer diktirt: 3 H., 6 Z., 8 E. =	3	6	8
8 H., 0 Z., 3 E. =	8	0	3
2 H., 7 Z., 0 E. =	2	7	0
u. s. w.			
Einhundert und Eins = 1 H., 0 Z., 1 E. =	1	0	1
Zweihundert und zwanzig = 2 H., 2 Z., 0 E. =	2	2	0
Dreihundertfünf und vierzig = 3 H., 4 Z., 5 E. =	3	4	5

u. s. w.

b. Frei, also ohne Hilfslinien.

Der Lehrer diktirt zuerst wieder: 2 H., 7 Z., 4 E.; 5 H., 0 Z., 3 E. xc., dann so: Dreihundertachtundzwanzig, neunhundertsiebenundachtzig xc. Dabei wird streng darauf gesehen, daß die Schüler die gleichnamigen Einheiten genau unter einander setzen, und das Zahlenschreiben so lange fortgesetzt, bis die nöthige Sicherheit darin gewonnen ist.

Die von den Schülern niedergeschriebenen Zahlen werden zuletzt von ihnen auch gelesen. Jeder Schüler eine Zahl.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. III. Heft.

§. 102. Das Messen mit dem Zehner.

a. Das Messen der reinen Hunderter.

100 = 10 × 10 oder 10 Zehner; also ist
200 = 2 × 10 × 10 = 20 × 10 oder 20 Zehner,
300 = 3 × 10 × 10 = 30 × 10 oder 30 Zehner,
400 = 4 × 10 × 10 = 40 × 10 oder 40 Zehner,
u. s. w.

b. Das Messen der Hunderter mit Zehnern.

100 = 10 × 10; also ist
110 = 10 × 10 + 1 × 10 = 11 × 10; 110 = 11 Z.
120 = 10 × 10 + 2 × 10 = 12 × 10; 120 = 12 Z.
130 = 10 × 10 + 3 × 10 = 13 × 10; 130 = 13 Z. xc.
210 = 20 × 10 + 1 × 10 = 21 × 10; 210 = 21 Z.
250 = 20 × 10 + 5 × 10 = 25 × 10; 250 = 25 Z.
u. s. w.

c. Das Messen der Hunderter mit Zehnern und Einern.

100 = 10 × 10; also ist

101 = 10 × 10 + 1 = 10 Z. 1 E.	345 = 34 × 10 + 5 = 34 Z. 5 E.
104 = 10 × 10 + 4 = 10 Z. 4 E.	896 = 89 × 10 + 6 = 89 Z. 6 E.
207 = 20 × 10 + 7 = 20 Z. 7 E.	534 = 53 × 10 + 4 = 53 Z. 4 E.
402 = 40 × 10 + 2 = 40 Z. 2 E.	683 = 68 × 10 + 3 = 68 Z. 3 E.

u. s. w.

§. 103. Die mehrfache Leseweise einer Zahl.

$200 = 2 \times 100 = 2$ Hunderter,
$= 20 \times 10 = 20$ Zehner,
$= 200 \times 1 = 200$ Einer.

$340 = 3 \times 100 + 4 \times 10 = 3$ Hunderter $+ 4$ Zehner,
$= 34 \times 10 = 34$ Zehner,
$= 300 \times 1 + 40 \times 1 = 340 \times 1 = 340$ Einer.

$578 = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 = 5$ H. $+ 7$ Z. $+ 8$ E.,
$= 57 \times 10 + 8 \times 1 = 57$ Zehner $+ 8$ Einer,
$= 500 \times 1 + 70 \times 1 + 8 \times 1 = 578 \times 1 = 578$ E.

Dann kürzer:

$485 = 4$ Hunderter $+ 8$ Zehner $+ 5$ Einer,
$= 48$ Zehner $+ 5$ Einer,
$= 485$ Einer.

Es ist dieß für die Folge wichtig und daher recht wohl zu üben.

§. 104. Vorbemerkung zu den Grundrechnungsarten.

Betrachten wir irgend eine Rechenaufgabe, wie das Leben sie uns bietet, so ergibt sich, daß in allen Fällen eine Zahl zu suchen ist, die entweder mehr, oder weniger beträgt, als eine gewisse gegebene Zahl. Diese ist daher, um die zu suchende Zahl zu erhalten, in entsprechender Weise zu vermehren oder zu vermindern. Das Vermehren, sowie das Vermindern einer Zahl kann aber auf zweierlei Weise geschehen.

Man kann eine Zahl um verschiedene andere Zahlen, oder wiederholt um sich selbst vermehren.

a. $7 + 5 = 12$; $5 + 4 + 3 = 12$. (Zusammenzählen.)

b. $4 + 4 + 4 = 12$; $3 \times 4 = 12$. (Vervielfachen.)

Man kann eine Zahl um verschiedene, oder immer nur um gleiche Theile von ihr vermindern.

a. $12 - 5 = 7$; $12 - 5 - 4 = 3$. (Abziehen.)

b. $12 - 4 - 4 - 4 = 0$; $12 = 3 \times 4$. (Theilen.)

(Da $12 = 3 \times 4$, so ist 4 in 12 3mal enthalten, und $^1/_3$ von $12 = 4$.)

So entwickeln sich diejenigen Hauptoperationen, welche allem Rechnen zu Grunde liegen und deßhalb die 4 Grundrechnungsarten oder Species heißen, nämlich das Zusammenzählen oder Addiren und die davon abgeleitete kürzere Weise: das Vervielfachen oder Multipliciren, das Abziehen oder Subtrahiren und die davon abgeleitete kürzere Weise: das Theilen oder Dividiren.

Nach dem Grade ihrer Schwierigkeit und nach altherkömmlicher Weise werden sie in folgender Ordnung behandelt: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren.

II.

Addiren oder Zusammenzählen.

A. Mündlich.

§. 105. Uebersicht.

1) 106 + 4	2) 300 + 200	3) 98 + 6
104 + 8	400 + 207	90 + 30
157 + 6	500 + 340	80 + 46
130 + 40	200 + 452	75 + 50
450 + 36	107 + 300	68 + 46
126 + 20	350 + 200	
234 + 44	148 + 500	

Es sind hier nur die leichteren Fälle aufgeführt; die schwierigeren kommen auf einer späteren Stufe vor.

§. 106. Verfahren.

Unter 1 wiederholen sich die nämlichen Fälle wie im ersten Hundert. Wie man z. B. 34 + 44 addirt, so auch 234 + 44; 234 + 40 = 274, + 4 = 278.

Bei 2 ist die Addition eine ganz unmittelbare. 300 + 200 = 500; 148 + 500 = 648.

Die meiste Uebung verlangen die Aufgaben unter 3.

98 + 6 = ? 98 + 6 = 98 + 2 + 4; 98 + 2 = 100, + 4 = 104.

90 + 30 = ?

a. 90+30=9 Z. + 3 Z.; 9 Z. + 3 Z. = 12 Z. = 120; 90 + 30 = 120.

b. 90 + 30 = 90 + 10 + 20; 90 + 10 = 100, + 20 = 120.

80 + 46 = ?

80 + 46 = 80 + 40 + 6; 80 + 40 = 120, + 6 = 126.

75 + 50 = ?

a. 70 + 50 = 120; also 75 + 50 = 125.

b. 75 + 50 = 50 + 75; 50 + 70 = 120, + 5 = 125.

68 + 46 = ?

a. 60 + 40 = 100; 8 + 6 = 14; 100 + 14 = 114.

b. 68 + 40 = 108, + 6 = 114.

Eine Schule zählt 72 Knaben und 75 Mädchen, wie viele Schüler also?

Jemand nimmt für Weizen 300 *M.*, für Roggen 275 *M.* ein; wie viel im Ganzen?

Eine vortreffliche Uebung, besonders als Vorübung zum Zifferrechnen, ist das wiederholte Zuzählen mit zwei oder mehreren verschiedenen Zahlen.

Mit zwei Zahlen. Z. B.

2+3=5+2=7+3=10+2=12+3=15+2=17+3=20 ꝛc.

3+4=7+3=10+4=14+3=17+4=21+3=24+4=28 ꝛc.

Mit drei Zahlen. Z. B.

3+5=8+7=15+3=18+5=23+7=30+3=33+5=38+7 ꝛc.
6+7=13+8=21+6=27+7=34+8=42+6=48+7=55+8 ꝛc.

Mit sämmtlichen Grundzahlen.

1+2=3+3=6+4=10+5=15+6=21+7=28+8 ꝛc.
2+4=6+6=12+8=20+10=30+1=31+3=34+5 ꝛc.

Alle diese Uebungen im Chor und von einzelnen Schülern bis zur Schlagfertigkeit. Jeder Schüler muß in jedem Augenblicke fortfahren können.

---

§. 107. Mehrfach benannte Zahlen.

130 ℳ 80 ₰. + 25 ℳ = 155 ℳ 80 ₰.
7 Monat 13 Tg. + 12 Tg. = 7 Mon. 25 Tg.
8 Schock 36 Stück + 18 Stück = 8 Schock 54 Stück.
4 Hl 60 lt + 3 Hl 20 lt = 7 Hl 80 lt.

---

70 ₰. + 54 ₰. =? 70 ₰. + 54 ₰. = 124 ₰. = 100 ₰. + 24 ₰. od. 1 ℳ 24 ₰. Oder: An 70 ₰. fehlen noch 30 ₰. zur Mark. Diese 30 ₰. nehme ich von 54 ₰. und mache die Mark voll. Ich rechne also: 70 ₰. + 54 ₰. = 70 ₰. + 30 ₰. + 24 ₰. = 1 ℳ 24 ₰.

80 ^{cm} + 65 ^{cm} =? 80 ^{cm} + 65 ^{cm} = 145 ^{cm} = 1 ^{m} 45 ^{cm}. Oder?
94 lt + 70 lt =? 94 lt + 70 lt = 164 lt = 1 Hl 64 lt. Oder?

Ein Reisender wohnt mehrere Tage in einem Gasthofe; für das Zimmer muß er 15 ℳ, für Zehrung 30 ℳ 45 ₰. bezahlen; wie v. zusammen?

Aufg. z. Kopfr.

B. Schriftlich.

§. 108. Ohne Uebergang in höhere Ordnungen.

Beispiel 1. 30 + 20 + 40 =?

Um die Zahlen leichter überblicken und zusammenzählen zu können, so setzen wir sie in gerader Linie untereinander. Dann machen wir einen kleinen wagrechten Strich.

30	a. 40 + 20 = 60, 60 + 30 = 90.
20	b. 40 = 4 Z. + 0 E., 20 = 2 Z. + 0 E., 30 = 3 Z. + 0 E.;
40	0 + 0 + 0 E. = 0 E.; 4 Z. + 2 Z. = 6 Z. + 3 = 9 Z.;
90	9 Z. + 0 E. = 90 E.; 40 + 20 + 30 = 90.

Wir haben nun die Zahlen **zusammengezählt**. Wir haben sie **addirt**. Denn **zusammenzählen** heißt **addiren**, und **addiren** heißt **zusammenzählen**; wir haben also addirt oder zusammengezählt. — Die Zahlen, welche man addirt oder zusammenzählt, nennt man **Posten**. Aus wie viel Posten besteht unsere Rechnung? Wie heißt der **erste** Posten, von oben nach unten gezählt? Wie der **zweite** ꝛc. Wie viel machen die

drei Posten zusammen? (90.) Das ist die Summe. Was ist mehr: 30 + 20 + 40, oder 90? Die Summe ist nur eine Zahl und diese eine Zahl ist genau so groß, wie die addirten Zahlen miteinander. Durch das Addiren oder Zusammenzählen wird also eine Zahl gefunden, die allein so viel beträgt, als zwei oder mehrere Zahlen zusammengenommen.

Beispiel 2. 21 + 34 + 43 = ?

Ausrechnung.

a. 21	21 = 20 + 1 = 2 Z. + 1 E.		b. 21
34	34 = 30 + 4 = 3 Z. + 4 E.		34
43	43 = 40 + 3 = 4 Z. + 3 E.		43
90			98
+ 8			
98			

a. 40+30=70, +20=90; 3+4=7, +1=8; 90+8=98.

b. 3 E. + 4 E. = 7 E., + 1 E. = 8 E.; diese 8 Einer schreiben wir sogleich unter die Einer, in die erste Stelle.

4 Z. + 3 Z. = 7 Z., + 2 Z. = 9 Z.; die 9 Zehner schreiben wir unter die Zehner, in die zweite Stelle.

9 Zehner + 8 Einer = 98 Einer; 21 + 34 + 43 = 98.

Es leuchtet ein, daß die erste Additionsweise auf das gewöhnliche (abgekürzte) Verfahren zweckmäßig vorbereitet, das richtige Verständniß desselben vermittelt und die sichere Ueberzeugung gewinnen läßt, daß die Partialsummen zusammen genommen wirklich die Summe aller einzelnen Posten bilden. Man wende sie daher recht häufig an.

Besondere Sorgfalt ist darauf zu verwenden, daß die einzelnen Posten in ihren Stellen völlig richtig, d. i. genau senkrecht so unter einander gesetzt werden, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc. zu stehen kommen. Auch halte man die Schüler dazu an, daß sie zur Probe für die Richtigkeit die Posten einmal von unten nach oben und einmal von oben nach unten addiren, und diktire von Zeit zu Zeit eine Aufgabe.

Aufg. z. Zifferr.

§. 109. Mit Uebergang in höhere Ordnungen.

Beispiel 1. 46 + 8 + 9 = ?

Ausrechnung.

46	46 + 8 + 9 = 4 Z. + 6 E. + 8 E. + 9 Einer.
8	9 E. + 8 E. = 17 E., + 6 E. = 23 E. oder 2 Z. + 3 Einer;
9	die 3 Einer schreiben wir unter die Einer, in die erste Stelle; die
63	2 Zehner zählen wir zu den 4 Zehnern. 2 Z. + 4 Z. = 6 Z.

Also ist 40 + 6 + 8 + 9 oder 46 + 8 + 9 = 6 Z. + 3 E. = 63.

Beispiel 2. $327 + 268 + 379 = ?$

Ausrechnung.

a. 327	(= 300 + 20 + 7)	b. 327
268	(= 200 + 60 + 8)	268
379	(= 300 + 70 + 9)	379
800		974
150		
24		
974		

a. $300+200=500$, $+300=800$; $70+60=130$, $+20=150$; $9+8=17$, $+7=24$; $800+150+24=974$.

b. 9 E. + 8 E. = 17 E., + 7 E. = 24 E. oder 4 E. (notirt) und 2 Z.; die 2 Zehner zähle ich sogleich zu den Zehnern.

2 Z. + 7 Z. = 9 Z., + 6 Z. = 15 Z., + 2 Z. = 17 Z. oder 7 Z. (notirt) und 1 Hunderter; den Hunderter zähle ich zu den Hundertern in der dritten Reihe.

1 H. + 3 H. = 4 H., + 2 H. = 6 H., + 3 H. = 9 Hunderter. 9 H. + 7 Z. + 4 E. = 974 E. Die Summe von 327 + 268 + 379 = 974.

Wenn der Schüler über die Operation klar und geläufig sich aussprechen kann, so wird zum Schnellrechnen übergegangen, wobei die Benennungen, welche den Stellenwerth der Ziffern bezeichnen, als: Einer, Zehner, Hunderter, weggelassen werden.

$9 + 8 = 17$, $+ 7 = 24$; 2 im Sinn; $2 + 7 = 9$, $+ 6 = 15$, $+ 2 = 17$; 1 im Sinn; $1 + 3 = 4$, $+ 2 = 6$, $+ 3 = 9$. Summe 974.

§. 110. Addiren benannter Decimalzahlen.

1) $8{,}_{4}$ m
$+ 6{,}_{5}$ m
$14{,}_{9}$ m

Lesen: $8^4/_{10}$ m oder 8 m 4 dm
und $6^5/_{10}$ m oder 6 m 5 dm.

Rechnen:

a. $^5/_{10}$ m + $^4/_{10}$ m = $^9/_{10}$; Komma; 6 m + 8 m = 14 m.

b. 5 dm + 4 dm = 9 m; Komma; 6 m + 8 m = 14 m.

$8^4/_{10}$ m + $6^5/_{10}$ m = $14^9/_{10}$ m oder 14 m 9 dm.

Ihr seht ein, warum wir das Komma haben setzen müssen. Löschen wir es weg, so steht als Summe von $8^4/_{10} + 6^5/_{10}$ Meter 149 Meter, was offenbar unrichtig ist. Das Komma trennt die Theile von den Ganzen.

2)	3)	4)
$4{,}_{32}$ m	$15{,}_{54}$ ℳ.	$37{,}_{18}$ Hl
$+ 5{,}_{46}$ m	$+ 26{,}_{38}$ „	$+ 48{,}_{56}$ „
$9{,}_{78}$ m	$41{,}_{92}$ ℳ.	$85{,}_{74}$ Hl

Zu 2. Wie heißen die beiden Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen? ($4^{32}/_{100}$ m oder 4 m 32 cm, und $5^{46}/_{100}$ m oder 5 m 46 cm.)

Wir addiren zuerst die Centi- oder Hundertelmeter und dann die ganzen Meter.

$6 + 2 = 8$; $4 + 3 = 7$; $46 + 32 = 78$; das sind 78 Centi- oder Hundertelmeter. Nun setzen wir sogleich das Komma. (Warum?) $5^{m} + 4^{m} = 9^{m}$.

$4{,}32^{m} + 5{,}46^{m} = 9{,}78^{m}$, d. i. 9^{m} und 78^{cm}.

So werden auch die beiden andern Aufgaben gerechnet.

Aufg. z. Zifferr.

§. 111. Angewandte Aufgaben.

Mündlich und schriftlich.

Beispiel 1. Der Centner Hopfen wurde um 85 ℳ gekauft; dann schlug derselbe um 25 ℳ auf; wie viel kostete er nun? (110 ℳ)

Auflösung. Wie theuer wurde der Ctr. Hopfen zuerst gekauft? Um wie viel schlug derselbe nachher auf? Wann sagt man von einer Sache, daß sie aufgeschlagen habe? Wann, daß sie abgeschlagen habe? Was heißt also: der Ctr. Hopfen schlug um 25 ℳ auf? Wie viel kostete derselbe, ehe er aufschlug? Wie viel also, nachdem er um 25 ℳ aufgeschlagen hatte? (85 ℳ + 25 ℳ) Was ist daher mit den beiden Zahlen zu thun?

Beispiel 2. A kauft eine Wiese; 800 ℳ bezahlt er sogleich dafür und 175 ℳ bleibt er schuldig; wie theuer hat er die Wiese gekauft? (Um 975 ℳ)

Aufl. Was sagt uns die Aufgabe von dem Manne, der hier (der Kürze wegen) A genannt wird? Was sollen wir suchen? Wie viel hat A sogleich bezahlt? Wie viel mußte er später noch bezahlen? Wie viel hat er alsdann für die Wiese im Ganzen bezahlt? (800 ℳ + 175 ℳ) Was muß man daher mit den beiden Zahlen thun, um zu finden, wie theuer A die Wiese gekauft hat?

Beipiel 3. Von einem Ballen Tuch wurden 36 Mtr. abgeschnitten und 48 Mtr. blieben übrig; wie groß war derselbe? (84^{m}.)

Aufl. Wie viel wurde von dem Ballen Tuch abgeschnitten? Um wie viel wurde derselbe dadurch kleiner? Und wie viel Meter betrug er alsdann noch? Was müßte man thun, damit der Ballen wieder so groß würde, wie zuvor? Und wie groß würde er dann sein? (48 + 36 Mtr. groß.) Wie findet man also, wie groß der Ballen Tuch anfangs gewesen ist?

Die Schüler müssen durch katechetische Behandlung der angewandten Aufgaben zur klaren Einsicht gebracht werden, warum mit den gegebenen Zahlen, um die verlangte Antwort zu erhalten, gerade diese Operation und keine andere vorzunehmen sei.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

III.

Subtrahiren oder Abziehen.

A. Mündlich.

§. 112. Uebersicht.

1) 108 — 4
269 — 7
112 — 8
340 — 9
150 — 20
280 — 36
195 — 40
486 — 73

2) 500 — 200
405 — 300
630 — 400
748 — 300

3) 260 — 120
809 — 406
869 — 523

4) 500 — 30
300 — 6
600 — 54
400 — 150
300 — 108
400 — 245
160 — 80
120 — 36

§. 113. Verfahren.

Wie bei dem Addiren, so wiederholen sich auch hier unter 1 die nämlichen Fälle wie im ersten Hundert. Die Hunderter der Vollzahl bleiben überall unverändert.

Bei 2 erleiden bloß die Hunderter eine Veränderung und ist daher die Subtraktion eine unmittelbare.

Eine umständlichere Behandlung verlangen die Fälle unter 3 und 4.

869 — 523 = ? (Die Aufgabe wird an die Wandtafel notirt.)

a. 869 — 523 = 869 — (500 + 20 + 3).
868 — 500 = 369;
369 — 20 = 349;
349 — 3 = 346.
Also ist 869 — 523 = 346.

b. 869 — 523 = (8 H. — 5 H.) + (6 Z. — 2 Z.) + (9 E. — 3 E.)
8 H. — 5 H. = 3 H.;
6 Z. — 2 Z. = 4 Z.; zusammen 3 H. + 4 Z.
9 E. — 3 E. = 6 E.; also bleiben 3 H. 4 Z. u. 6 E. od. 346 E.

500 — 30 = ?

a. 500 = 400 + 100; 400 + 100 — 30 = 400 + 70 = 470.

b. 500 = 5 H.; 30 = 3 Z. Um die 3 Z. wegnehmen zu können, so verwandle 1 H. in Zehner; 5 H. = 4 H. + 10 Z.; 4 H. + 10 Z. — 3 Z. = 4 H. + 7 Z. oder 470 E.; 500 — 30 = 470.

300 — 6 = ?

a. 300 = 200 + 100; 200 + 100 — 6 = 200 + 94 oder 294.

b. Um die 6 E. von den 3 H. wegnehmen zu können, so verwandle ich 1 H. in 10 Z., und 1 Z. davon in Einer. 3 H. = 2 H. + 10 Z. = 2 H. + 9 Z. + 10 E. Hievon 6 E. weg, so bleiben 2 H. + 9 Z. + 4 E. oder 294 E.; 300 — 6 = 294.

600 — 54 = ?

600 — 54 = 600 — (50 + 4); 600 — 50 = 550, und 550 — 4 = 546.

400 — 245 = ?

400 — 245 = 400 — (200 + 40 + 5); 400 — 200 = 200; 200 — 40 = 160, und 160 — 5 = 155; 400 — 245 = 155.

460 — 80 = ?

a. 460 — 80 = 460 — (60 + 20); 460 — 60 = 400, 400 — 20 = 380.

b. 460 — 80 = 46 Z. — 8 Z. = 38 Z. oder 380.

720 — 48 = ?

720 — 48 = 720 — (40 + 8); 720 — 40 = 680, und 680 — 8 = 672.

Jemand nimmt für ein Paar Pferde, die er verkauft, 1000 ℳ ein; für 875 ℳ davon kauft er sich ein anderes Paar. Wie viel Geld bleibt ihm übrig?

Unter 120 Schülern sind 64 Mädchen, wie viel Knaben also?

Zuzählen und Abziehen in Verbindung.

Aufsteigend.

8 zu, 5 ab: 12 + 8 = 20 — 5 = 15 + 8 = 23 — 5 = 18 + 8 = 26 — 5 = 21 + 8 ꝛc. — 9 zu, 6 ab! 11 zu, 7 ab!

Absteigend.

8 ab, 5 zu: 120 — 8 = 112 + 5 = 117 — 8 = 109 + 5 = 114 — 8 = 106 + 5 = 111 ꝛc. — 9 ab, 6 zu! 11 ab, 7 zu!

Jemand nimmt 50 ℳ und dann wieder 80 ℳ ein und gibt davon 95 ℳ aus; wie viel bleibt ihm?

§. 114. Mehrfach benannte Zahlen.

80 ℳ 25 ₰. — 30 ℳ = 50 ℳ 25 ₰.
5 Hl 70 lt — 64 lt = 5 Hl 6 lt.
12 m 50 cm — 7 m 15 cm = 5 m 35 cm.

Wie viel sind 8 ℳ — 60 ₰.? (8 ℳ = 7 ℳ + 100 ₰.; davon 60 ₰. weg, bleiben 7 ℳ 40 ₰.)

Von 12 ℳ gibt Jemand 5 ℳ 85 ₰. aus; wie viel bleibt ihm? (12 ℳ — 5 ℳ = 7 ℳ, u. 7 ℳ — 85 ₰. = 6 ℳ 15 ₰.)

Eine Frau geht mit einem Zehnmarkstück auf die Messe und bringt 4 ℳ 80 ₰. wieder mit heim; wie viel hat sie ausgegeben?

B. Schriftlich.

§. 115. Ohne Borgen.

Beispiel: 785 — 542?

Man schreibt die Zahlen wie beim Addiren unter einander, doch so, daß die kleinere Zahl unter die größere zu stehen kommt.

$$\begin{array}{r} 785 \\ 542 \\ \hline 243 \end{array}$$

785 — 542 = (700 — 500) + (80 — 40) + (5 — 2).
2 E. v. 5 E. bleiben 3 E.; 4 Z. v. 8 Z. bleiben 4 Z.; 5 H. v. 7 H. bleiben 2 H. Es bleiben also 2 H., 4 Z. und 3 E. oder 243 E.; 785 — 542 = 243.

Dann: 2 von 5 bleibt 3; 4 v. 8 bleibt 4; 5 v. 7 bleibt 2.

Abziehen heißt subtrahiren und subtrahiren heißt abziehen. Wir haben also zwei Zahlen von einander abgezogen oder subtrahirt. 785 ist die volle Zahl und wird daher die Vollzahl (Minuend) genannt. 542 heißt hier, weil sie abgezogen wird, der Abzug oder die Abzugszahl (der Subtrahend). Die Zahl 243 nennt man, weil sie übrig bleibt, den Rest. Da dieselbe zugleich anzeigt, um wie viel sich 785 und 542 von einander unterscheiden; so wird sie auch der Unterschied (die Differenz) genannt.

Aufg. z. Ziffern.

§. 116. Mit Borgen.

Beispiel 1. 30 — 17 = ?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10} \\ 3.0 \\ 17 \\ \hline 13 \end{array} = \begin{array}{r} 3.0 \\ 17 \\ \hline 13 \end{array}$$

Von 30 soll 17 abgezogen werden. 30 = 3 Z. und 0 E.; 7 E. von 0 E. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 3 Z. einen Zehner. 1 Z. = 10 E. Für 3 Z. stehen jetzt 2 Z. und 10 E. (20 + 10). Nun ist es möglich, die 7 E. abzuziehen. 7 E. von 10 E. bleiben 3 E., und 1 Z. von 2 Z. bleibt 1 Z. Also ist 30 oder 20 + 10 weniger 17 = 10 + 3 oder 13.

Beispiel 2. 83 — 38 = ?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 13} \\ 8.3 \\ -38 \\ \hline 45 \end{array} = \begin{array}{r} 70 + 13 \\ 30 + 8 \\ \hline 40 + 5 \end{array} = \begin{array}{r} 8.3 \\ -38 \\ \hline 45 \end{array}$$

83 = 8 Z. + 3 E.; 38 = 3 Z. + 8 E.; 8 E. von 3 E. abzuziehen, geht nicht. Ich borge daher bei den 8 Z. einen Z. und zeige dieß durch einen Punkt hinter der 8 an. Der geborgte Zehner = 10 E. 3 E. waren schon vorhanden, 10 E. habe ich dazu entlehnt; also habe ich nun 13 Einer. Anstatt 8 Z. + 3 E. haben wir jetzt 7 Z. + 13 E., was eben so viel ist. Nun ziehe ich 3 Z. 8 E. von 7 Z. 13 E. ab. 8 E. von 13 E. bleiben 5 E., und 3 Z. von 7 Z. bleiben 4 Z. Es bleiben also 4 Z. + 5 E. oder 45 E.; 83 — 38 = 45.

Probe. Man zählt den Rest mit dem Abzug zusammen. Ist richtig abgezogen, so kommt wieder die Vollzahl.

83	Vollzahl
38	Abzug
45	Rest

5 + 8 = 13; 3 oben, 1 hinüber; 1 + 4 = 5, + 3 = 8; 8 oben. Richtig.

Beispiel 3. 753 — 468 = ?

Ausrechnung.

```
 14 13
 7.5.3     abgekürzt:   7.5.3
 4 6 8                  4 6 8
 -----                  -----
 2 8 5                  2 8 5
```

Von 753 soll 468, d. i. von 7 H. 5 Z. und 3 E. sollen 4 H. 6 Z. und 8 E. abgezogen werden. 8 E. von 3 E. abzuziehen geht nicht. Ich borge mir daher bei den 5 Zehnern 1 Zehner; 1 Z. + 3 E. = 13 Einer. Anstatt 7 H. + 5 Z. + 3 E. habe ich jetzt 7 H. + 4 Z. + 13 E., was eben so viel ist. 8 E. von 13 E. bleiben 5 E.

6 Z. von 4 Z. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 7 Hundertern 1 Hunderter. 1 H. und 4 Z. = 14 Z. Anstatt 7 H. und 4 Z. haben wir jetzt 6 H. und 14 Z., und das ist eben so viel. 6 Z. von 14 Z. bleiben 8 Z.

4 H. von 6 H. bleiben 2 H.

Der Rest beträgt also 2 H., 8 Z. und 5 E. = 285 E. oder 285.

Wir fassen nun die Ausrechnung, wie sie vor uns steht, nochmal in's Auge.

Die 4 H. hätten wir ohne Weiteres abziehen können; nicht so die 6 Z. und 8 E. Um auch diese abziehen zu können, so haben wir in der Vollzahl 1 Hunderter in Zehner und 1 Zehner in Einer verwandelt. 7 H. + 5 Z. = 6 H. + 15 Z.; 15 Z. + 3 E. = 14 Z. + 13 E. Also sind 7 H. + 5 Z. + 3 E. = 6 H. + 14 Z. + 13 E. Zieht man hievon 4 H., 6 Z. und 8 E. ab, so bleiben 2 H., 8 Z. und 5 E. oder 285 Einer.

Probe: 5 + 8 = 13; 3 oben, 1 im S.; 1 + 8 + 6 = 15; 5 oben, 1 im S.; 1 + 2 + 4 = 7.

Beispiel 4. Beispiel 5.

```
 10                             9
                              10.10
 3.0 7       3.0 7            6.0 0        6.0.0
 2 4 3   =   2 4 3            4 3 2    =   4 3 2
 -----       -----            -----        -----
   6 4         6 4            1 6 8        1 6 8
```

Zu Nr. 5. 2 E. von 0 E. abzuziehen, geht nicht. Einen Zehner kann ich nicht borgen, denn es sind keine da. Ich borge daher bei den 6 Hundertern 1 Hunderter; es bleiben also noch 5 H.; dieß deute ich durch einen Punkt hinter 6 an. Der entlehnte Hunderter hat 10 Zehner. Für 6 H. stehen nun 5 H. + 10 Z. Von diesen 10 Z. nehme ich 1 Z. weg; es bleiben also noch 9 Z., und das deute ich durch einen Punkt bei 10 (oder 0) an. Der entlehnte Zehner hat 10 Einer. Anstatt 6 H. habe ich jetzt 5 H. 9 Z. 10 E., was eben so viel ist. Davon ziehe ich nun 4 H. 3 Z. und 2 E. ab.

Aufg. z. Zifferr.

§. 117. Subtrahiren benannter Decimalzahlen.

1) $36,_8$ m	Lesen:	$36^8/_{10}$ m oder 36 m 8 dm
— $12,_6$ m	weniger	$12^6/_{10}$ m oder 12 m 6 dm
$24,_2$ m	Rechnen:	

a. $^6/_{10}$ m von $^8/_{10}$ m bleiben $^2/_{10}$ m; Komma; 12 m von 36 m bl. 24 m.
b. 6 dm von 8 dm bleiben 2 dm; Komma; 12 m von 36 m bl. 24 m.
$36^8/_{10}$ m — $12^6/_{10}$ m = $24^2/_{10}$ m oder 24 m und 2 dm.

2) $18,_{75}$ m	3) $4.5,_{8.2}$ ℳ.	4) $2.6,_{5.0}$ Hl
— $9,_{32}$ m	— $2\,8,_{4\,5}$ ℳ.	— $1\,7,_{3\,6}$ Hl
$9,_{43}$ m	$1\,7,_{3\,7}$ ℳ.	$9,_{1\,4}$ Hl

Zu 2. Lesen: $18^{75}/_{100}$ m oder 18 m 75 cm — $9^{32}/_{100}$ m oder 9 m 32 cm.

Wir ziehen zuerst die Centi- oder Hundertelmeter von einander ab, also 32 von 75.

2 von 5 bleibt 3, und 3 von 7 bleibt 4. Es bleiben also 43 Centi= oder Hundertelmeter. Nun setzen wir das Komma, und ziehen dann auch die 9 m von den 18 m ab. 9 von 18 bleibt 9.

$18^{75}/_{100}$ m — 9 $^{32}/_{100}$ m = 9 $^{43}/_{100}$ m oder 9 m 43 cm.

Dem ähnlich werden die beiden anderen Aufgaben behandelt.

Aufg. z. Zifferr.

§. 118. Angewandte Aufgaben.

Mündlich und schriftlich.

Aufg. 1. Ein Fäßchen hält 58 lt; ein anderes hält 120 lt, wie viel also mehr? (62 Liter.)

Aufl. Wie viel Liter hält das eine und wie viel das andere Fäßchen? Und was sollen wir suchen? Auf welche Weise läßt sich finden, um wie viel 12 mehr ist als 7? (a. Ich sehe zu, wie viel ich zu 7 legen muß, um 12 zu erhalten. b. Ich ziehe 7 von 12 ab.) Wie kannst du also auch finden, wie viel 120 lt mehr sind als 58 lt? (a. Zu 58 muß ich 2 + 40 + 20 oder 62 legen, um 120 zu erhalten. b. 120 — 50 = 70, 70 — 8 = 62. Also rc.)

Wie rechnet ihr es auf der Schiefertafel?

Aufg. 2. A bezahlte für den Centner 106 ℳ. und muß denselben um 18 ℳ. billiger wieder abgeben; wie viel löst er? (88 ℳ.).

Aufl. Wie viel hat A für den Centner bezahlt? Löst er dafür wieder 106 ℳ.? Mehr, oder weniger? Wie viel weniger? Wie viel löst er also dafür? (106 ℳ. — 18 ℳ.)

Aufg. 3. Eine Waare wurde um 96 ℳ. eingekauft und um 125 ℳ. wieder verkauft; wie viel wurde daran gewonnen? (29 ℳ.)

Aufl. Wie wurde die Waare eingekauft? Wie verkauft? Wurde für dieselbe also mehr oder weniger gelöst, als sie gekostet hat? Wie viel sind 125 ℳ. mehr als 96 ℳ.? Wie findet man dieß am besten im Kopfe, und wie rechnet man es auf der Tafel?

Aufg. z. Kopf= u. Zifferr.

IV.

Multipliciren oder Vervielfachen.

§. 119. Vorbemerkung.

Multipliciren heißt vervielfachen. Das ist die gewöhnliche Erklärung, die Erklärung dem Wortsinne nach. Die Zahl 4 durch 3 multipliciren, heißt suchen, wie viel das 3fache von 4 beträgt. Um das 3fache von 4 zu erhalten, so müssen wir 4 dreimal nehmen. Daher heißt multipliciren zweitens: eine gegebene Zahl so oftmal nehmen, als eine andere anzeigt. In unserm Beispiele zeigt 3 an, daß 4 dreimal, nämlich 1mal + 1mal + 1mal, also eben so oft genommen werden soll, als man 1 nehmen muß, um 3 zu erhalten. Demgemäß kann man drittens auch sagen: multipliciren heißt, aus dem Multiplicanden eine neue Zahl so entstehen lassen, wie der Multiplikator aus der Eins entsteht. Die erste dieser drei Erklärungen entspricht nur dann der Sache, wenn der Multiplicator eine ganze Zahl ist; denn nur in diesem Falle ist das Produkt ein (reines) Vielfaches von dem Multiplikanden. Die beiden anderen Erklärungen passen für alle Fälle. Unter ihnen ist es aber wieder die letztere, welche die Operation am bestimmtesten bezeichnet.

Beim Addiren und Subtrahiren mit reinen Zahlen hatten wir es nur mit eigentlichen Zahlengrößen und eben deßhalb auch beim Addiren und Subtrahiren benannter Zahlen nur mit benannten Zahlen zu thun. Beim Multipliciren und, wie wir später sehen werden, auch beim Dividiren ist dieß nicht so. Unter den drei Zahlen, die wir bei einer vollendeten Multiplikation vor uns haben, sind nur zwei eigentliche Zahlengrößen; die dritte zeigt an, wie sich beide zu einander verhalten. Zum Beispiel. Die Aufgabe $3 \times 4 = ?$ verlangt, daß eine Zahl gesucht werde, welche 3mal so groß ist als 4. $3 \times 4 = 12$. Die Zahl, welche 3mal so groß ist, als die Zahl 4, ist also 12. Schon der Ausdruck ist bezeichnend. Wir sprechen hier von 4 und von 12; bei 3 heißt es „3mal". In der Aufgabe sagt uns 3, wie vielmal so groß als 4 die zu suchende Zahl sein soll, und nach der Ausrechnung sagt sie uns, wie vielmal so groß als 4 die gefundene Zahl ist. Sie zeigt also an, wie sich 12 zu 4 verhält; sie bezeichnet das Verhältniß dieser Zahlen zu einander. Demnach ist hier 3 eine Verhältnißzahl; 4 und 12 dagegen sind die eigentlichen Zahlengrößen. So ist es in allen Fällen. Der Multiplikand und das Produkt sind Zahlengrößen, der Multiplikator ist eine Verhältnißzahl. Daher kommt es auch, daß beim Rechnen mit benannten Zahlen nur der Multiplikand und das Produkt benannte Zahlen sind, der Multiplikator aber eine reine Zahl ist. Anders hat es schon gar keinen Sinn. Es kann z. B. heißen 5×47 Pfg. $= 235$ Pfg. Was ist aber 5 Meter mal 47? oder 5 Meter mal 47 Pfg.? Zwar scheint es, daß beim Rechnen mit der angewandten Zahl, z. B. in der Regeldetri-Aufgabe: 1 Meter zu 47 Pfg., was kosten 5 Meter? die

Zahl 47 Pfg. durch die Zahl 5 Meter zu multipliciren sei. Dem ist jedoch nicht so. Indem ich schließe: „Wenn 1 Mtr. 47 Pfg. kostet, so kosten 5 Meter 5 mal 47 Pfg.", wird die Zahl 5 Meter ihrer Benennung (Meter) entkleidet und in eine reine Zahl verwandelt.

Maßgebend für den Stufengang ist hier die Zahl der Stellen des Multiplikators, und dieser ist entweder einstellig oder zweistellig, oder drei- und mehrstellig. Die hierdurch sich ergebenden Hauptübungsstufen zerfallen wieder in verschiedene Unterabtheilungen, welche jedoch in ihrer Aufeinanderfolge am besten aus der Darstellung selbst ersehen werden.

A. Mündlich.

§. 120. Uebersicht.

1) 3 × 4	2) 3 × 200	3) 10 × 8
5 × 30	4 × 180	10 × 40
4 × 68	4 × 246	10 × 36

§. 121. Verfahren.

Zunächst wird das Einmaleins wiederholt; dann:

5 × 30 = ?
30 = 3 Z.; 5 × 30 = 5 × 3 Z.; 5 × 3 Z. = 15 Z. = 150; 5 × 30 = 150.

4 × 68 = ?
4 × 68 = 4 × 60 + 4 × 8; 4 × 60 = 240, u. 4 × 8 = 32; 240 + 32 = 272.

3 × 200 = ? 3 × 200 = 600.

4 × 180 = ?
a. 4 × 100 = 400; 4 × 80 = 320; 400 + 320 = 720; 4 × 180 = 720.
b. 4 × 18 Z. = 72 Z. = 720.

4 × 246 = ?
a. 4 × 246 = 4 × 200 + 4 × 40 + 4 × 6; 4 × 200 = 800; 4 × 40 = 160; 800 + 160 = 960; 4 × 6 = 24; 960 + 24 = 984.
b. 4 × 246 = 4 × 240 + 4 × 6 = 960 + 24 = 984.

10 × 8 = ? 10 × 8 = 80.

10 × 40 = ?
10 × 40 = 10 × 4 Z.; 10 × 4 Z. = 40 Z. = 400; 10 × 40 = 400.

10 × 36 = ?
10 × 36 = 10 × 30 + 10 × 6; 10 × 30 = 300, 10 × 6 = 60; 300 + 60 = 360; 10 × 36 = 360.

Ist in den vorstehenden Uebungen die erforderliche Sicherheit und Fertigkeit erreicht, so werden dann von den Zahlen 11 bis 19, deren Produkte innerhalb des ersten Hunderts unsere Schüler bereits kennen, und

von den Zahlen 20, 30, 40 ꝛc., deren Produkte die Hauptzahlen bei dem Theilen sind, Reihen bis zum Zehnfachen derselben gebildet und dem Gedächtnisse nach und nach eingeprägt.

1×11= 11	So	1×19= 19	1×20= 20	So	1×90= 90
2×11= 22	fort	2×19= 38	2×20= 40	fort	2×90=180
3×11= 33	bis	3×19= 57	3×20= 60	bis	3×90=270
ꝛc.		ꝛc.	ꝛc.		ꝛc.
10×11=110		10×19=190	10×20=200		10×90=900

In geeignetem Anschlusse:

1 Dtz. = 12 Stck.	1 Mdl. = 15 Stck.	1 Schck. = 60 Stck.
2 „ = 24 „	2 „ = 30 „	2 „ = 120 „
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
1 *M.* = 100 *ß.*	1 m = 100 cm	1 Hl = 100 lt
2 *M.* = 200 *ß.*	2 m = 200 cm	2 Hl = 200 lt
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Eben so mit Centner und Pfund.

---

1 Hl Wein zu 54 *M.*; was kosten 2, 4, 6, 8, 10 Hl?
Ein Schüler bezahlt monatlich 36 *M.* Kostgeld, wie viel in 3, 5, 7, 9 Monaten?

§. 121. Mehrfach benannte Zahlen.

Wie viel Monate sind 7 Jahr 9 Mon.? (1 J. = 12 Mon.; 7 J. = 7 × 12 oder 84 Mon.; 84 Mon. + 9 Mon. = 93 Mon.)

5 Mdl. 8 Stck. = ? Stck.	4 *M.* 72 *ß.* (5 *M.* 6 *ß.*) = ? *ß.*
6 Schck. 24 Stck. = ? Stck.	8 m 65 cm (6 m 40 cm) = ? cm
4 Std. 45 Min. = ? Min.	7 Hl 56 lt (9 Hl 5 lt) = ? lt

---

2 × 4 *M.* 32 *ß.* = 8 *M.* 64 *ß.*
3 × 9 m 24 cm = 27 m 72 cm
4 × 3 Hl 15 lt = 12 Hl 60 lt

1 Lesebuch kostet 1 *M.* 12 *ß.*; wie viel kosten 5 Lesebücher?
1 Flasche Wein zu 4 *M.* 18 *ß.*; wie hoch kommen 4 Flaschen?

B. Schriftlich.

§. 122. Verfahren.

Beispiel: 1. 32 × 3 = ?
(32 ist 3mal zu nehmen, mit 32 zu multipliciren.)

a. 32	Kurz:	b. 32
32		×3
32		96
96		

a. 3 × 32 = 32 + 32 + 32; 2 E. + 2 E. + 2 E. oder 3 × 2 E. = 6 E.; 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. od. 3 × 3 Z. = 9 Z; 9 Z. + 6 E. = 96 E.

b. Ich setze die Zahl 32 nur einmal. Daß sie 3mal genommen werden soll, zeige ich durch die Ziffer 3 darunter an. Nun spreche ich sogleich: 3 × 2 E. = 6 E., und setze die 6 E. in die erste Stelle, unter die 2 E.; eben so spreche ich jetzt sogleich: 3 × 3 Z. = 9 Z., und schreibe 9 in die zweite Stelle. Also ist 3 × 32 = 9 Z. + 6 E. = 96.

Wir haben nun die Zahl 32 dreimal genommen und 96 erhalten. 96 ist daher das 3fache von 32. Wenn man das 2fache, oder das 3fache, oder das 4fache, also überhaupt ein Vielfaches von einer Zahl sucht und es auf die zweite, nämlich auf die kürzere Weise thut; so vervielfacht oder multiplicirt man sie. Wir haben sonach die Zahl 32 vervielfacht oder multiplicirt und zwar durch 3. Die Zahl 32, welche multiplicirt worden ist, wird Multiplikand genannt, und die Zahl 3, welche anzeigt, wie oft die 32 genommen worden ist, Multiplikator. Die Zahl 96, die sich hieraus ergeben hat, ist das Produkt.

Beispiel 2. 36 × 4 = ?

Ausrechnung.

a.	Kurz:	b.
36		36
36		4
36		144
36		
144		

a. 4 × 36 = 36 + 36 + 36 + 36; 6 E. + 6 E. + 6 E. + 6 E. oder 4 × 6 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E. Die 4 E. schreibe ich unter die E.; die 2 Z. behalte ich im Sinne und zähle sie zu den Zehnern. 3 Z. + 3. Z. + 3 Z. + 3 Z. oder 4 × 3 Z. = 12 Z., und 2 Z. dazu = 14 Z. oder 1 H. + 4 Z. Die 4 Z. setze ich in die zweite Stelle, unter die Zehner; den Hunderter schreibe ich in die dritte Stelle. Also ꝛc.

b. Ich schreibe die Zahl 36 nur einmal und zeige, daß sie 4mal genommen werden soll, durch die Zahl 4 darunter an. 4 × 36 = 4 × 3 Z. + 4 × 6 E. Ich rechne zuerst 4 × 6 E., dann 4 × 3 Z.; 4 × 6 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E. Wie beim Addiren schreibe ich auch jetzt nur die 4 E. und behalte die 2 Z. im Sinne. 4 × 3 Z. = 12 Z.; 12 Z. + 2 Z. = 14 Z. = 1 H. + 4 Z.; die 4 Z. setze ich in die zweite Stelle, den Hunderter in die dritte.

1 H. 4 Z. und 4 E. = 144 E.; 4 × 36 = 144.

Beispiel 3. 139 × 5 = ?

Ausrechnung.

```
1 3 9
  × 5
-----
6 9 5
```

5 × 9 E. = 45 E. = 4 Z. und 5 E. (5 E. hingeschrieben, die 4 Z. im Sinne behalten); 5 × 3 Z. = 15 Z., + 4 Z. = 19 Z. = 1 H. + 9 Z. (9 Z. hingeschrieben, 1 H. im Sinne behalten); 5 × 1 H. = 5 H., + 1 H. = 6 H. (6 H. hingeschrieben.) Also ist 5 × 139 = 695.

Später kurz: 5 × 9 ist 45 (5 untergesetzt); 5 × 3 ist 15, + 4 ist 19 (9 untergesetzt); 5 × 1 ist 5, + 1 ist 6 (6 untergesetzt).

So werden nun sämmtliche Aufgaben, welche ausführlich behandelt worden sind, nochmal, oder noch einigemal gerechnet.

---

§. 123. Angewandte Aufgaben.

Von 4 Arbeitern verdient jeder 154 ℳ.; wie viel verdienen sie zusammen?

Aufl. Jeder der 4 Arbeiter verdient 154 ℳ.; 2 derselben verdienen also 2 × 154 ℳ., 3 verdienen 3 × 154 ℳ., und die 4 verdienen 4 × 154 ℳ. Man setzt also 154 ℳ. und nimmt sie 4mal (mult. sie mit 4).

Ausr. 154 ℳ. × 4 = 616 ℳ. oder 154 ℳ. × 4 = 616 ℳ.

Aufg. z. Zifferr.

§. 124. Benannte Decimalzahlen aufzulösen.

Angeschr. Gelesen und aufgelöst:

1,3 m = 1 m + 3 dm; 1 m = 10 dm; 10 dm + 3 dm = 13 dm.
2,4 m = 2 m + 4 dm; 2 m = 2×10 od. 20 dm, + 4 dm = 24 dm.

So fort, bis die Schüler lesen: 6,4 m = 6 m 4 dm = 64 dm.

1,04 m = 1 m + 4 cm; 1 m = 100 cm; 100 cm + 4 cm = 104 cm.
2,48 m = 2 m 48 cm; 2 m = 200 cm; 200 cm + 48 cm = 248 cm.

Fortgesetzt wie oben.

1,25 ℳ. = 1 ℳ. 25 ₰.; 1 ℳ. = 100 ₰.; 100 ₰. + 25 ₰. = 125 ₰.
3,88 ℳ. = 3 ℳ. 88 ₰.; 3 ℳ. = 300 ₰.; 300 ₰. + 88 ₰. = 388 ₰.

Fortgesetzt wie oben.

1,50 Hl = 1 Hl 50 lt; 1 Hl = 100 lt; 100 lt + 50 lt = 150 lt
4,72 Hl = 4 Hl 72 lt; 4 Hl = 400 lt; 400 lt + 72 lt = 472 lt

Fortgesetzt wie oben.

1,32 Ctr. = 1 Ctr. 32 ℔.; 1 Ctr. = 100 ℔.; 100 ℔. + 32 ℔. = 132 ℔.
3,86 Ctr. = 3 Ctr. 86 ℔.; 3 Ctr. = 300 ℔.; 300 ℔. + 86 ℔. = 386 ℔.

Fortgesetzt, wie oben.

V.

Dividiren oder Theilen.

§. 125. Ueber die beiden Divisionsformen.

Man unterscheidet ein Dividiren im Sinne des Theilens und ein Dividiren im Sinne des Enthaltenseins. Der Unterschied ist sehr

wesentlich und zwar sowohl in Bezug auf die Operation, als in Bezug auf die Bedeutung der dabei vorkommenden Zahlen.

a. In Bezug auf die Operation. Ist z. B. 12 durch 4 zu dividiren, und ich thue es im S. des Enthaltenseins, so habe ich zu suchen, aus wie viel mal 4 die 12 besteht. Ich muß also 12 in 4 + 4 + 4, d. i. 3 × 4 zerlegen. So finde ich, daß 4 in 12 3mal enthalten ist. Will ich aber im S. des Theilens dividiren, also suchen, wie viel der 4. Theil von 12 beträgt; so muß ich 12 in 4 gleiche Theile, d. i. in 3 + 3 + 3 + 3 oder 4 × 3 zerlegen, woraus sich ergibt, daß $^1/_4$ von 12 = 3. Uebrigens ist in beiden Fällen das Resultat (in Betreff der Ziffer) dasselbe. 4 in 12 = 3, und $^1/_4$ von 12 = 3. Es hat dieß aber seinen natürlichen Grund. $^1/_4$ von 4 = 1; also ist $^1/_4$ von 12 so vielmal 1, als 4 in 12 enthalten ist. Da nun 4 in 12 3mal enthalten ist, so muß $^1/_4$ von 12 auch 3 × 1 oder 3 betragen.

b. In Bezug auf die Bedeutung der Zahlen. Das Dividiren im S. des Enthaltenseins ist ein Messen. Es wird gesucht, wie oft eine Zahl an der andern angelegt oder von ihr weggenommen werden kann. Der Divisor ist das Maß, der Dividend das zu Messende. Daher sind beide ihrem Wesen nach gleich und nur ihrer Größe nach verschieden. Beim Rechnen mit benannten Zahlen sind Divisor und Dividend gleichartig benannt. Beiden muß eine und dieselbe Münz-, Maß- und Gewichtseinheit zu Grunde liegen. Darum können wir ohne Weiteres suchen, wie oft 4 alte bayer. Pfd. in 12 dergleichen Pfd., aber nicht, wie oft 4 alte bayer. Pfd. in 12 Zollpfund enthalten sind. Beim Rechnen mit reinen Zahlen sind Divisor und Dividend reine Zahlengrößen. Sie müssen es sein, weil überhaupt nur Größen durch einander gemessen werden können. Und der Quotient? Derselbe sagt, wie vielmal so groß der Dividend ist, als der Divisor. Er zeigt also das Verhältniß beider zu einander an. Daher ist er keine Zahlengröße, sondern eine das „Wie oft" oder „Wievielmal" andeutende Verhältnißzahl und eben darum auch beim Rechnen mit benannten Zahlen eine unbenannte Zahl. Rechnungen mit der angewandten Zahl scheinen zwar das Gegentheil zu beweisen. In der That ist es aber doch so. Ein Beispiel wird es zeigen. Braucht man 5 Mtr. Zeug zu einem Kleide, so geben 75 Mtr. so vielmal 1 Kleid, als 5 Mtr. in 75 Mtr. enthalten sind. 5 Mtr. sind in 75 Mtr. 15mal enthalten, also — so schließen wir weiter und verwandeln dadurch die reine Zahl in eine benannte — geben 75 Mtr. 15 × 1 Kleid oder 15 Kleider.

Steht gewöhnlich:	Sollte stehen:
5 Mtr. | 75 Mtr. | 15 Kleider.	5 Mtr. | 75 Mtr. | 15mal.
	15×1 Kl. = 15 Kl.

Beim Dividiren im S. des Theilens wird der Dividend in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zerlegt, und der Quotient zeigt an, wie viel ein Theil beträgt. Da überhaupt nur Größen theilbar sind, so muß auch der Dividend eine solche sein. Dieser ist daher beim Rechnen mit reinen Zahlen eine reine Zahlengröße und beim Rechnen mit benann-

ten Zahlen eine benannte Zahl. Dasselbe ist auch der Quotient; denn der Theil kann seinem Wesen nach nichts Anderes sein, als was das Ganze ist. $^1/_4$ von 12 = 3, $^1/_4$ von 12 Mrk. = 3 Mrk. Das Ganze und der Theil stehen aber in einem gewissen Verhältnisse zu einander. Die Funktion, dieß zu bestimmen, hat hier der Divisor. Er sagt, in wie viel gleiche Theile das Ganze zu zerlegen ist, und ist die Theilung ausgeführt, so zeigt er an, welcher oder der wie vielte Theil der Quotient vom Dividenden ist. Wird also im S. des Theilens dividirt, so steht der Divisor als Verhältnißzahl. Beim Rechnen mit benannten Zahlen ist er eben deßwegen unbenannt, und beim Rechnen mit angewandten Zahlen wird diejenige Zahl, die als Divisor zu nehmen ist, zuvor, nämlich durch die Auflösung, erst in eine reine Zahl verwandelt. Wenn man z. B. zu 15 Kleidern 75 Mtr. braucht, so ist zu 1 Kleide der 15. Theil davon erforderlich. Steht daher

nicht so:	sondern so:
15 Kleider | 75 Mtr. | 5 Mtr.	15 | 75 Mtr. | 5 Mtr.

Der Unterschied zwischen den beiden Divisionsformen in Bezug auf die Bedeutung der Zahlen ist also, um es kurz zu sagen, der: bei der Division im S. des Enthaltenseins sind Divisor und Dividend Zahlengrößen, der Quotient hingegen ist eine Verhältnißzahl; bei der Division im S. des Theilens sind Dividend und Quotient die Zahlengrößen und der Divisor ist die Verhältnißzahl.

In diesem Cursus werden übrigens die 2 Divisionsformen so eng als möglich mit einander verbunden.

Der Stufengang ist dem bei der Multiplikation eingehaltenen analog. Was beim Multipliciren der Multiplikator ist, das ist beim Dividiren der Divisor. Dort war für den Stufengang die Anzahl der Stellen des Multiplikators maßgebend; hier entscheidet die Anzahl der Stellen des Divisors. Diese Andeutung mag genügen. Das Nähere ergibt sich aus der Durchführung selbst.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß, dem mehr und mehr zunehmenden Gebrauche gemäß, im vorliegenden Werke der Divisor rechts neben das Divisionszeichen (:) gestellt wird. 24 : 4 = 6 heißt also: 24 dividirt oder getheilt durch 4 = 6; 4 ist in 24 6mal enthalten, der 4. Theil von 24 = 6. In den Aufgabenheftchen für die Volksschule soll jedoch der senkrechte Strich (4 | 24 = 6) beibehalten werden.

A. Mündlich und schriftlich.

§. 126. Vorbemerkung und Uebersicht.

Der Schüler muß unter allen Umständen dahin gebracht werden, jede Zahl bis Tausend durch jede Grundzahl auch frei im Kopfe sicher und fertig zu dividiren. Die Sicherheit beruht auf der klaren Einsicht, wie eine Zahl in jedem gegebenen Falle zu zerlegen sei, damit der zu suchende Theil ohne Schwierigkeit gefunden werden könne; die Fertigkeit ist die Frucht der Uebung und wird um so leichter erzielt, je mehr man sich der Kürze be-

fleißigt. Da die Zerlegung einer Zahl in ihre theilbaren Bestandtheile nach dem Divisor sich richtet, so muß dieselbe für jeden Divisor, hier also für jede Grundzahl, besonders eingeübt werden. Demgemäß führen wir unsere Schüler zuerst in das Dividiren durch 2 ein, dann in das durch 3 u. s. f.

In diesem Cursus dehnen sich diese Uebungen bis zur Zahl 200 und außerdem, wie die nachstehende Uebersicht zeigt, nur noch auf solche höhere Zahlen aus, welche sich ganz unmittelbar theilen oder sehr leicht zerlegen lassen.

1 : 4	140 : 2	400 : 2	400 : 10
3 : 4	180 : 4	960 : 3	570 : 10
15 : 4	164 : 5	884 : 4	365 : 10

(1 getheilt durch 4; 3 getheilt durch 4, 15 getheilt durch 4 2c.)

§. 127. Das Dividiren durch Zwei.

a. Der Quotient ist eine Grundzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

In welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 auf?
In 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.
Wie viel ist die Hälfte von 2, von 8, von 6, von 12? 2c.
Wie oft ist 2 enthalten in 4, in 10, in 2, in 12, in 8? 2c.
Wie viel beträgt die Hälfte von 12 Liter? (6 Liter.)
Wie oft sind 2 Liter in 12 Liter enthalten? (6 mal.)

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Wie heißen die Zahlen von 1 bis 20, in welchen 2 nicht aufgeht?
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Theilen. Wie viel ist die Hälfte von 1?

½ (Die Hälfte von 1 = ½.)

Wie theilen sich 2 Kinder in 1 Apfel? Wie viel bekommt jedes? Wie theilen sie 3 Aepfel? (Sie theilen zuerst 2 Aepfel und dann einen.) Wie viel bekommt jedes? — Wie theilen sie 5 Aepfel? 2c.

Wie suchst du die Hälfte von 7? ($7 = 6 + 1$; die Hälfte von 6 ist 3, und die Hälfte von 1 ist ½; die Hälfte von 7 ist 3½.)

Dieß bis zur völligen Sicherheit und Fertigkeit!

Enthaltensein. Wie oft ist 2 in 1 enthalten?

• • • •|• • 2 ist in 4 2mal enthalten.
• • • • 2 ist in 2 1mal „
• • • 2 ist in 1 ½mal „

2 ist in 1 nicht ganz, nicht einmal enthalten; 2 liegt in 1 nur mit dem halben Theil; 2 ist in 1 ½mal enthalten. Legt man ein Stäbchen von 2 Decimeter auf eine Linie von 1 Decimeter, so fällt von dem Stäbchen nur der halbe Theil in die Linie. 2 Decimeter sind also in 1 Decimeter nur ½mal enthalten. 2 liegt in 1 ½mal.

Wie oft liegt 2 in 5, in 9, in 7, in 3? ꝛc. (5 = 4 + 1; 2 liegt in 4 2mal und in 1 $^1/_2$mal, in 5 also 2$^1/_2$mal.)

Wie viel ist die Hälfte von 9 Meter? (4$^1/_2$ Meter.) Wie oft sind 2 Meter in 9 Meter enthalten? (4$^1/_2$ mal.)

(Schriftlich.)

In Reihen: 2 ist in 1 $^1/_2$ mal enthalten.
2 ist in 2 1 mal „
2 ist in 3 1$^1/_2$mal „
2 ist in 4 2 mal „
u. s. w.

b. Der Quotient ist eine Zehnerzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

Bildet das Einmaleins von 2 Zehnern oder 20! (1 × 20 = 20, 2 × 20 = 40 u. s. w.) Welche Zahlenreihe hat sich ergeben?

20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200.

Diese Zahlen nennen wir die Hauptzahlen von 2. Welches sind die Hauptzahlen von 2 im ersten Hundert? Im zweiten Hundert? — Nun theilen wir sie durch 2.

Theilen.

Wie viel ist die Hälfte von 2 Z. oder 20? (Die Hälfte von 2 Z. = 1 Z.; die Hälfte von 20 ist 10.) Von 4 Z. oder 40? (Die Hälfte von 4 Z. = 2 Z.; die Hälfte von 40 = 20) u. s. w.

So fort bis: die Hälfte von 200 ist 100.

Zuletzt gebe man Fragen, bis die Antwort rasch erfolgt. Wie viel ist die Hälfte von 20? (Die Hälfte von 20 ist 10.) Von 120? (Die Hälfte von 120 ist 60.) ꝛc.

Enthaltensein.

Wie oft ist 2 in 2 enthalten? (1mal.) Wie oft in 2 Z. oder 20? (10mal, also 10mal so oft.) Wie oft liegt 2 in 4? (2mal.) Wie oft in 4 Z. oder 40? (10 × 2 oder 20mal) u. s. w. bis 2 ist in 200 100mal enthalten.

Auch dieß bis zur Fertigkeit.

Wie viel beträgt die Hälfte von 140 Liter? (70 Liter.) Wie oft sind 2 Liter in 140 Liter enthalten? (70mal.)

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Welches ist die nächste Hauptzahl von 2 unter 32? (20.) Unter 75? (60.) Unter 125? (120.) Unter 194? (180) ꝛc.

Zerlege die Zahl, welche ich nenne, in die nächste niedere Hauptzahl von 2 und in den Rest! 27! (27 = 20 + 7.) 32! (32 = 20 + 12) 45! (45 = 40 + 5!) 58! (58 = 40 + 18) u. s. f.

Theilen.

Wie viel ist die Hälfte von 96? (Die nächste Hauptzahl unter 96 ist 80; ich zerlege daher 96 in 80 + 16; $^1/_2$ von 80 = 40, und von 16 = 8; 40 + 8 = 48.)

Wie viel beträgt die Hälfte von 175? (175 = 160 + 15; die Hälfte von 160 = 80, von 15 = $7\frac{1}{2}$; 80 + $7\frac{1}{2}$ = $87\frac{1}{2}$.)

Alle diese Uebungen sind bis zur Schlagfertigkeit fortzusetzen, zuerst innerhalb des ersten Hunderts, dann innerhalb des zweiten.

Enthaltensein.

Wie oft ist 2 in 72 enthalten? (72 = 60 + 12; 2 liegt in 60 30mal und in 12 6mal, in 72 also 30 + 6 oder 36mal.)

Wie oft liegt 2 in 125? (125 = 120 + 4 + 1; 2 liegt in 120 60mal und in 4 2mal; 60 + 2 = 62; 2 liegt in 1 $\frac{1}{2}$mal; 2 liegt in 125 also $62\frac{1}{2}$mal.)

Wie viel beträgt die Hälfte von 154 Pfd.? (154 Pfd. = 140 Pfd. + 14 Pfd.; die Hälfte von 140 Pfd. = 70 Pfd., und die Hälfte von 14 Pfd. = 7 Pfd.; 70 Pfd. + 7 Pfd. = 77 Pfd.; die Hälfte von 154 Pfd. = 77 Pfd.)

Wie oft sind 2 Pfd. in 154 Pfd. enthalten? (154 Pfd. = 140 Pfd. + 14 Pfd.; 2 Pfd. sind in 140 Pfd. 70mal und in 14 Pfd. 7mal, in 154 Pfd. also 70 + 7 oder 77mal enthalten.)

Bei beiden Divisionsformen wird also die zu theilende Zahl auf gleiche Weise zerlegt und ergeben sich auch gleiche Resultate. Aber die Resultate haben eine verschiedene Benennung, und diese hängt von der Frage, von der Aufgabe ab. Die beiden Divisionsformen werden daher am besten in Verbindung mit einander behandelt, doch ist streng darauf zu halten, daß die Auflösung im Ausdrucke der Frage entspreche.

(Schriftlich.)

1)	$\frac{1}{2}$ von 72 = ?		2 in 72 = ?
	$\frac{1}{2}$ von 60 = 30	oder	2 in 60 = 30 ×
	$\frac{1}{2}$ von 12 = 6		2 in 12 = 6 ×
	$\frac{1}{2}$ von 72 = 36		2 in 72 = 36 ×
2)	$\frac{1}{2}$ von 135 = ?		2 in 135 = ?
	$\frac{1}{2}$ von 120 = 60	oder	2 in 120 = 60 ×
	$\frac{1}{2}$ von 15 = $7\frac{1}{2}$		2 in 15 = $7\frac{1}{2}$ ×
	$\frac{1}{2}$ von 135 = $67\frac{1}{2}$		2 in 135 = $67\frac{1}{2}$ ×

Diese schriftliche Darstellung fördert das Kopfrechnen und ist die zweckmäßigste Vorbereitung für das Dividiren im größeren Zahlenkreise. Es muß aber darauf gesehen werden, daß jede Ziffer in die rechte Stelle komme und die Darstellung ein Bild der Ordnung sei. Der Lehrer lasse recht viele Zahlen von 20 bis 200 in dieser Weise zu 2 theilen.

§. 128. Das Dividiren durch Drei.

a. Der Quotient ist eine Grundzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

In welchen Zahlen von 1 bis 30 geht 3 auf?

In 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

Man fragt, wie viel der 3te Theil davon betrage, und wie oft 3 darin enthalten sei.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Die Zahlen, welche jetzt zur Behandlung kommen, sind:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Theilen. Wie viel ist der dritte Theil von 1?

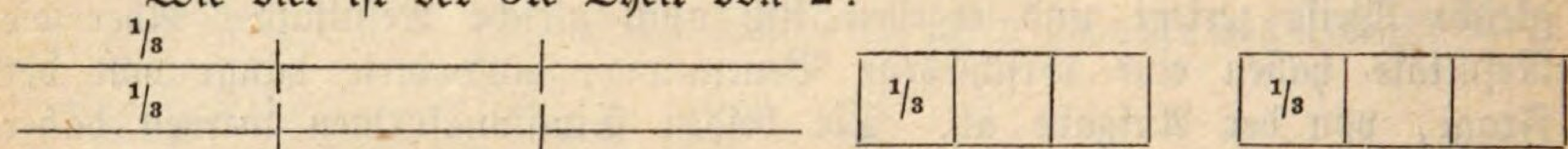


(Der 3te Theil von 1 = 1/3.)

Wie theilen sich 3 Kinder in 1 Lebkuchen? Wie viel bekommt jedes? — Wie theilen sie 4 Aepfel? (Sie theilen zuerst 3 Aepfel und dann einen.) Wie viel bekommt jedes? — Wie theilen sie 7 Aepfel? u. s. w.

Wie suchst du den 3ten Theil von 4? (4 = 3 + 1; der 3te Theil von 3 ist 1, und der dritte Theil von 1 ist 1/3; der 3te Theil von 4 ist also 1 1/3.) — Wie viel ist der 3te Theil von 7, 10, 13 rc.

Wie viel ist der 3te Theil von 2?



Der dritte Theil von 1 + 1 = 1/3 + 1/3 oder 2/3; der dritte Theil von 2 = 2/3.

Wie theilen 3 Kinder 2 Lebkuchen miteinander? Wie theilen sie 5 Lebkuchen? Wie 8 Aepfel?

Wie suchen wir also den 3ten Theil von 5? (5 = 3 + 2; der dritte Theil von 3 ist 1, und der dritte Theil 2 ist 2/3; also ist der 3te Theil von 5 = 1 2/3. — Wie suchst du den 3ten Theil von 8? von 11? von 14? rc.

Zuletzt Zahlen außer der Ordnung bis zur Fertigkeit.

Enthaltensein. Wie oft ist 3 in 1, in 2 enthalten?

• • • • • • | • • •	3 ist in 6 2 mal enthalten.
• • • • • •	3 ist in 3 1 mal "
• • • •	3 ist in 1 1/3mal "
• • • • •	3 ist in 2 2/3mal "

Legt man ein Stäbchen von 3 Decimeter auf eine Linie von 1 Decimeter, so fällt von demselben nur 1/3 in die Linie; legt man das Stäbchen auf eine Linie von 2 Decimeter, so fallen von demselben 2/3 in die Linie. 3 Decimeter sind in 1 Decm. 1/3mal, in 2 Decm. 2/3mal enthalten. 3 liegt in 1 1/3mal, in 2 2/3mal.

Wie oft liegt nun 3 in 4, in 13, in 16, in 5? rc. (4 = 3 + 1; 3 liegt in 3 1mal und in 1 1/3mal, in 4 also 1 1/3mal.)

Wie viel beträgt der 3te Theil von 13 Liter? (4 1/3 Liter.)

Wie oft sind 3 Liter in 13 Liter enthalten? (4 1/3mal.)

(Schriftlich.)

In Reihen. Der 3te Theil von 1 = $^1/_3$
Der 3te Theil von 2 = $^2/_3$
Der 3te Theil von 3 = 1
Der 3te Theil von 4 = $1^1/_3$
u. s. f.

b. Der Quotient ist eine Zehnerzahl.

(Mündlich.)

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

Durch 3 theilen wir jetzt auch 3 Z., 6 Z., 9 Z., 12 Z., 15 Z., 18 Z. oder 30, 60, 90, 120, 150, 180. Wir nennen diese Zahlen Hauptzahlen von 3. Welche hievon kommen im ersten Hundert vor? welche im zweiten?

Theilen.

$^1/_3$ von 3 Z. = 1 Z.; $^1/_3$ von 30 ist 10.
$^1/_3$ von 6 Z. = 2 Z.; $^1/_3$ von 60 ist 20.
$^1/_3$ von 9 Z. = 3 Z.; $^1/_3$ von 90 ist 30.
u. s. w. bis
$^1/_3$ von 18 Z. = 6 Z.; $^1/_3$ von 180 ist 60.

Wie viel beträgt der 3. Theil von 60, 30, 90, 120, 180, 150?

Enthaltensein.

3 liegt in 3 1mal, in 3 Z. oder 30 10mal, also 10mal so oft.
3 liegt in 6 2mal, in 6 Z. oder 60 10 × 2 oder 20mal.
3 liegt in 9 3mal, in 9 Z. oder 90 10 × 3 oder 30mal.
u. s. w.

Wie vielmal ist 3 enthalten in 30, in 120, 60, 180, 90, 150?

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Wie heißt die nächste Hauptzahl von 3 unter 42? (30.) Unter 55? (30.) Unter 100? (90.) Unter 84? (60.) Unter 132! u. s. w.

Zerlege die Zahl, welche ich nenne, in die nächste niedere Hauptzahl von 3 und in den Rest. 48! (48 = 30 + 18.) 125! (125 = 120 + 5.) 84! (84 = 60 + 24.) u. s. w.

Theilen.

Wie viel ist der 3te Theil von 144? (144 = 120 + 24; der 3te Theil von 120 ist 40 und von 24 = 8; 40 + 8 = 48.)

Wie viel beträgt $^1/_3$ von 200? (200 = 180 + 20; der 3. Theil von 180 = 60 und von 20 = $6^2/_3$; 60 + $6^2/_3$ + $66^2/_3$.)

Enthaltensein.

Wie oft ist 3 in 87 enthalten? (87 = 60 + 27; 3 ist in 60 20mal und in 27 9mal, in 87 also 29mal enthalten.)

Wie oft liegt 3 in 164? (164 = 150 + 14; 3 liegt in 150 50mal und in 14 $4^2/_3$mal, in 164 also $54^2/_3$mal.)

(Schriftlich.)

$^1/_3$ von 175 = ?	3 in 167 = ?
$^1/_3$ von 150 = 50	3 in 150 = 50 ×
$^1/_3$ von 25 = $8^1/_3$	3 in 17 = $5^2/_3$ ×
$^1/_3$ von 175 = $58^1/_3$	3 in 167 = $55^2/_3$ ×

§. 129. Das Dividiren durch die übrigen Grundzahlen.

Wie die Zahlen von 1 bis 200 durch 2 und durch 3, so werden sie auch durch 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 dividirt.

Gang und Verfahren sind aus dem Bisherigen ersichtlich. Bei dem Theilen durch 4 wird hiernach folgender Stufengang eingehalten:

a. Der Quotient ist eine Grundzahl.

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37.
2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38.
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39.

b. Der Quotient ist eine Zehnerzahl.

aa. Der Dividend wird nicht zerlegt.

40, 80, 120, 160, 200.

bb. Der Dividend wird zerlegt.

Die Zahlen zwischen 40 und 80, zwischen 80 und 120, zwischen 120 und 160, zwischen 160 und 200.

§. 130. Die übrigen Fälle.

400 : 2 = ? $^1/_2$ von 400 = 200; 2 ist in 4 2mal, in 4 H. 100mal so oft, also 100 × 2 oder 200mal enthalten.

960 : 3 = ? $^1/_3$ von 900 = 300, von 60 = 20, von 960 also = 320. 3 ist in 9 3mal, in 900 100mal so oft, also 300mal &c.

884 : 4 = ? 884=800+80+4; $^1/_4$ von 800=200; $^1/_4$ von 80=20, zusammen 220, und $^1/_4$ von 4=1; 220+1=221; also &c.

400 : 10 = ? $^1/_{10}$ von 100=10, von 400=4×10 oder 40. Oder 400=40 Zehner; $^1/_{10}$ von 1 Z.=1 E., von 40 Z. = 40 Einer.

570 : 10 = ? 570=57 Z.; $^1/_{10}$ von 57 Zehnern = 57 Einer; $^1/_{10}$ von 570 = 57.

365 : 10 = ? 365 = 36 Z. + 5 E.; $^1/_{10}$ hievon = $36^5/_{10}$ (36,5.)

Das Theilen durch 10 ist bis zur Schlagfertigkeit zu üben. $^1/_{10}$ von 500 = 50; $^1/_{10}$ von 1000 = 100; $^1/_{10}$ von 654 = $65^4/_{10}$ &c.

---

4 Geschwister erben 192 M., welche sie gleichheitlich zu theilen haben; wie viel kommt auf einen Theil?

3 Frauen kaufen 144 m Zeug um 117 ℳ.; wie viel Zeug erhält jede davon, und wie viel muß jede bezahlen?

7 Hl Wein kosten 126 ℳ.; wie hoch kommt 1 Hl?

$^3/_4$ Schock = ? Stck. (Wir suchen zuerst, wie viel Stück $^1/_4$ Schock hat; 1 Schock = 60 Stck.; $^1/_4$ Schck. = 15 Stck.; $^3/_4$ Schck. = 3 × 15 oder 45 Stck.)

Verwandelt eben so $^3/_4$ ℳ. in Pfg., $^4/_5$ Hl in Liter, $^7/_{10}$ Mtr. in Centimeter, $^3/_4$ Ctr. in Pfund.

---

2 Arbeiter verdienen mit einander 25 ℳ.; wie viel erhält jeder? (Die Hälfte von 25 ℳ. = $12^1/_2$ ℳ. = 12 ℳ. 50 ₰.)

4 Ctr. Waare kosten 75 ℳ.; wie hoch kommt der Ctr.?

5 Hl Weizen zu 124 ℳ.; wie viel kostet 1 Hl?

§. 131. Mehrfach benannte Zahlen.

5 Männer haben 55 ℳ. 80 ₰. zu theilen; wie viel erhält jeder? (Sie theilen zuerst die 55 ℳ. und dann die 80 ₰. Von den 55 ℳ. erhält jeder 11 ℳ. und von den 80 ₰. 16 Pfennige. Also 2c.)

$^1/_2$ von 24 ℳ. 36 ₰. = ?	$^1/_5$ von 45 Ctr. 60 Pfd. = ?
$^1/_3$ von 60 ℳ. 45 ₰. = ?	$^1/_8$ von 64 Schck. 24 Stck. = ?
$^1/_4$ von 52 ℳ. 88 ₰. = ?	$^1/_{10}$ von 120 Hl 70 lt = ?

Für 7 m Zeug bezahlte Jemand 42 ℳ. 84 ₰., wie viel für 1 m?

2 Personen haben 150 ℳ. 72 ₰. zu theilen; die eine soll 1 Theil davon erhalten, die andere 2 Theile. Wie viel kommt auf jede? (Die 150 ℳ. 72 ₰ werden in 3 gleiche Theile getheilt; die eine Person erhält $^1/_3$, die andere $^2/_3$.)

Schriftlich.

§. 132. Im Sinne des Theilens.

Beispiel 1. $^1/_3$ von 69 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
     Z E       Z E             Z E   Z E
a.   6 9 : 3 = 2 3       b.  3 | 6 9 | 2 3
     6 :                         6 :
     ---                         ---
       9                           9
       9                           9
     ---                         ---
```

In beiden Fällen wird zuerst die zu dividirende Zahl (der Dividend) angeschrieben. Bei b wird dann ein senkrechter Strich vor und ein solcher hinter dieselbe gemacht, und es kommt nun der Divisor links, der Quotient rechts davon zu stehen. Die Schüler üben nicht beide Formen, sondern entweder die eine, oder die andere ein. Hier wird die zweite im Auge behalten.

Wir sollen $^1/_3$ von 69 suchen. Wir müssen also 69 in 3 gleiche Theile theilen. Darum setzen wir vor die Zahl 69 die Zahl 3.

69 = 6 Z. 9 E. Die Frage ist also: Wie viel beträgt $^1/_3$ von 6 Z. und von 9 E.?

Theilt man 6 Z. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 2 Z.; diese setzen wir rechts. In die Stelle der Einer aber setzen wir einen Punkt. Getheilt sind nun 3 × 2 Z. oder 6 Z. Was getheilt ist, setzen wir unter und ziehen es ab. Wir setzen also 6 Z. unter 6 Z.; 6 Z. von 6 Z. geht auf. Also ist kein Zehner mehr übrig. Nun sind noch 9 E. zu theilen. Bevor wir sie theilen, ziehen wir sie herunter.

Theilt man 9 E. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 3 E. Die setzen wir wieder rechts. Wir haben nun abermals 3 × 3 E. oder 9 E. getheilt. 9 E. von 9 E. geht auf.

$^1/_3$ von (6 Z. + 9 E.) sind also 2 Z. + 3 E. oder 23 E.; der dritte Theil von 69 = 23.

Rechne ich 40 + 29 = 69, so habe ich addirt. Rechne ich 69 − 29 = 40, so habe ich subtrahirt. Rechne ich 3 × 23 = 69, so habe ich multiplicirt. Rechne ich aber: $^1/_3$ von 69 = 23, so habe ich dividirt. In diesem Falle ist die Zahl 69 das Ganze, der Dividend; die Zahl 23 ist $^1/_3$ von 69, sie ist der gesuchte Theil, der Quotient; und die Zahl 3, welche anzeigt, wie die Zahl 69 zu theilen war, ist der Theiler, der Divisor.

Beispiel 2. 96 : 4 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
    Z E   Z E
 4 |9 6 | 2 4
   |8 : |
   -----
    1 6
    1 6
   -----
```

Der 4. Theil von 9 Z. = 2 Z.; 2 Z. sind der 4. Theil von 4 × 2 oder 8 Z.; 8 Z. von 9 Z. ab, bleibt 1 Zehner. Von den 9 Z. + 6 E. sind jetzt 8 Z. getheilt, und 1 Z. 6 E. sind noch zu theilen. Den Zehner verwandeln wir in Einer und führen die 6 E. dazu herunter, gibt 16 E.; der 4. Theil von 16 E. = 4 E.; 4 × 4 E. = 16 E.; geht auf. Also rc.

Beispiel 3. 684 : 2 = ? Beispiel 4. $^1/_5$ von 360 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
    H Z E   H Z E
 2 |6 8 4 | 3 4 2
   |6 : : |
   -------
      8 :
      8 :
   -------
        4
```

```
    H Z E   Z E
 5 |3 6 0 | 7 2
   |3 5 : |
   -------
      1 0
      1 0
   -------
```

Beispiel 3 bedarf keiner Erklärung. Bei 4 heißt es: der 5. Theil von 3 H. ist nicht 1 Hunderter. Ich verwandle daher die 3 H. in Zehner

und nehme die 6 Zehner dazu. 3 H. = 30 Z.; 30 Z. + 6 Z. = 36 Z.; der 5. Theil von 36 Z. = 7 Z. u. s. w.

Beispiel 5. 840 : 6 =? Beispiel 6. 1/4 von 856 =?

Ansatz und Ausrechnung:

```
    HZE  HZE              HZE  HZE
  6|840 |140            4|836 |209
   |6 : :                |8 : :
   ----                  ----
    24 :                   3 :
    24 :                   0 :
    ----                  ----
      0                    36
      0                    36
    ----                  ----
```

Der 6. Theil von 8 H. ist 1 H., und 2 H. bleiben übrig. Diese verwandeln wir in Zehner und nehmen die 4 Z. dazu, gibt 24 Z.; der 6. Theil von 24 Z. = 4 Z.; ein Rest bleibt hier nicht. Nun setzen wir auch die 0 herunter; der 6. Theil von 0 E. = 0 E.

Der 4. Theil von 8 H. = 2 H.; 4 × 2 H. = 8 H.; 8 H. von 8 H. geht auf. Nun sind noch 3 Z. + 6 E. zu theilen. Wir führen zuerst die 3 Z. herunter. Der 4. Theil von 3 Z. ist nicht 1 Z., also 0 Z.; 4 × 0 Z. = 0 Z., Rest 3 Z; dazu nun auch die 6 E., gibt 36 E. u. s. w.

§. 133. Im Sinne des Enthaltenseins.

Beispiel 1. 3 in 69 =?

Ansatz und Ausrechnung.

```
  3|69 |23
   |6 :
   ----
     9
     9
   ----
```

69 = 6 Z. + 9 E.; 3 ist in 6 E. 2mal, in 6 Z. also 20mal. Dieß schreiben wir hinter den Strich, aber nur die Ziffer 2; für die 0 setzen wir einen Punkt. 3 ist 20mal enthalten in 20 × 3; 2 × 3 = 6, 20 × 3 = 60 oder 6 Z.; die 6 Z. schreiben wir unter die 6 Z.

Nun suchen wir, wie oft 3 in den 9 E. liegt. Wir setzen daher die 9 E. herunter. 3 ist in 9 E. 3mal. Die 3 schreiben wir hinter 2, an die Stelle des Punktes. 3 ist 3mal enthalten in 3×3 oder 9; 9 unter 9.

3 ist in 6 Z. 20mal, in 9 E. 3mal, in 69 also 23mal enthalten.

Beispiel 2. 978 : 7 =?

Ansatz und Ausrechnung.

```
  7|973 |139
   |7 : :
   ----
    27 :
    21 :
    ----
     63
     63
    ----
```

973 = 9 H. + 7 Z. + 3 E. Wie oft ist 7 darin enthalten? 7 ist in 9 E. 1mal, in 9 H. also 100mal. Wir schreiben nur die Ziffer 1; für die 2 Nullen setzen wir zwei Punkte, einen in die Zehnerstelle und einen in die Einerstelle. 7 ist 100mal enthalten in 100 × 7; 100 × 1 = 1 H., 100 × 7 = 7 H.; 7 H. von 9 H. ab, bleiben 2 H. Nun ist noch zu suchen, wie oft 7 in 2 H., 7 Z. und 3 E. enthalten ist.

2 H. = 20 Z.; 20 Z. + 7 Z., welche wir dazu herunter setzen, = 27 Z.; 7 ist in 27 E. 3mal, in 27 Z. also 30mal enthalten. Wir schreiben nur die Ziffer 3 und zwar in die Zehnerstelle hinter 1; 7 ist 30mal enthalten in 30 × 7; 3 × 7 = 21, 30 × 7 = 21 Z.; 21 Z. von 27 Z. bleiben 6 Z. Nun ist noch zu suchen, wie oft 7 in 6 Z. + 3 E. enthalten ist.

6 Z. + 3 E. = 63 E.; 7 ist in 63 E. 9mal enthalten. Diese 9 setzen wir in die Einerstelle hinter 3; 7 ist 9mal enthalten in 9 × 7 oder 63.

Also ist 7 in 9 H. 7 Z. und 3 E. 100 + 30 + 9 oder 139mal enthalten.

So werde längere Zeit bei jeder Ausrechnung gesprochen. Auf den Vortheil, alle Einheiten bloß als Einerzahlen zu behandeln, kommt der Schüler nach und nach von selbst. Man hat nicht nöthig, es zu fördern. Vielmehr sei der Lehrer besorgt, daß dieß nicht zu bald und nicht in dem Maße geschehe, daß das Bewußtsein von dem wirklichen Werth der Ziffern, von der eigentlichen Zahlengröße, ganz verschwinde.

Mit einstelligem Divisor werden beide Divisionsformen eingeübt. Später wird bloß im Sinne des Enthaltenseins dividirt. Die Ausdrucksweise, deren man sich gewöhnlich bedient, z. B. „3 in 27 geht 9mal" ist streng genommen, auch nur dieser Divisionsform angemessen. Uebrigens wissen die Schüler bereits, daß sich bei beiden Formen gleiche Resultate ergeben. Man kann es ihnen auch leicht begreiflich machen. Der 6. Theil von 6 ist 1; also ist der 6. Theil von irgend welcher Zahl so vielmal 1, als 6 in derselben enthalten ist.

Aufg. z. Zifferr.

§. 134. Niedere Sorten auf höhere zurückzuführen.

Mark und Pfennige.

a. Frei im Kopfe.

100 ₰. = 1 ℳ.	110 ₰. = 1 ℳ. 10 ₰.	101 ₰. = 1 ℳ. 1 ₰.
200 ₰. = 2 ℳ.	120 ₰. = 1 ℳ. 20 ₰.	105 ₰. = 1 ℳ. 5 ₰.
300 ₰. = 3 ℳ.	130 ₰. = 1 ℳ. 30 ₰.	112 ₰. = 1 ℳ. 12 ₰.
400 ₰. = 4 ℳ.	170 ₰. = 1 ℳ. 70 ₰.	164 ₰. = 1 ℳ. 64 ₰.
500 ₰. = 5 ℳ.	210 ₰. = 2 ℳ. 10 ₰.	203 ₰. = 2 ℳ. 3 ₰.
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

b. Angeschrieben: 6,24 ℳ. = 624 ₰.; 624 ₰. = 6,24 ℳ.

(Gelesen: 6 ℳ. 24 ₰. = 624 ₰., und 624 = 6 ℳ. 24 ₰.)

Um 624 Pfg. in Mark zu verwandeln, schneidet man rechts 2 Stellen (die Einer und Zehner) ab; dann stehen links vom Komma die Hunderter

der Pfennige, die ganzen, und rechts die übrigen Pfennige, die Hundertel=Mark.

Angeschrieben:	Gelesen:
245 ₰. = 2,45 ℳ.	245 ₰. = 2 ℳ. 45 ₰. oder $2^{45}/_{100}$ ℳ.
972 ₰. = 9,72 ℳ.	972 ₰. = 9 ℳ. 72 ₰. oder $9^{72}/_{100}$ ℳ.
560 ₰. = 5,60 ℳ.	560 ₰. = 5 ℳ. 60 ₰. oder $5^{60}/_{100}$ ℳ.
805 ₰. = 8,05 ℳ.	805 ₰. = 8 ℳ. 5 ₰. oder $8^{5}/_{100}$ ℳ.
u. s. w.	u. s. w.

Eben so mit Meter u. Centim., Hektol. und Liter, Centner und Pfd.

---

§. 135. Das Meter mit allen seinen Unterabtheilungen.

a. An der Wandtafel ist ein Meter in Decimeter und ein Decimeter hievon in Centimeter abgetheilt.

Wie heißen (auf die Decimeter zeigend) diese Theile? Und wie (auf die Centimeter zeigend) heißen diese?

Hier habe ich ein Centimeter langes Streifchen Papier, und das ist (mit der Feder) auch wieder in 10 gleiche Theile abgetheilt. (Vorgezeigt.) Diese sehr kleinen Theile heißen Millimeter.

Das in 10 Millimeter abgetheilte Centimeter wird auf das erste Centimeter an der Wandtafel geklebt. Hierauf tritt ein Schüler vor, zeigt hin, und es heißt nun, indem derselbe zuerst von Centimeter zu Centimeter, dann von Decimeter zu Decimeter weiter deutet, theils einzeln, theils im Chor:

1 Centim. = 10 Millimeter	1 Decim. = 100 Millimeter.
2 ^{cm} = 2 × 10 oder 20 ^{mm}	2 ^{dm} = 2 × 100 oder 200 ^{mm}
3 ^{cm} = 3 × 10 oder 30 ^{mm}	3 ^{dm} = 3 × 100 oder 300 ^{mm}
s. f. bis	s. f. bis
1 ^{dm} = 10 × 10 oder 100 ^{mm}	1 ^{m} = 10 × 100 oder 1000 ^{mm}.

Also ist, unter Hinweisung auf die Veranschaulichung:

1 ^{m} = 1000 ^{mm}, 1 Ganzes = 1000 Tausendtel;
1 ^{dm} = 100 ^{mm}, 1 Zehntel = 100 „
1 ^{cm} = 10 ^{mm}, 1 Hundertel = 10 „

Zeige du uns das Stück, welches 3 ^{cm} groß ist! Wie viel Millimeter beträgt es? rc. — Welches Stück ist 4 ^{dm} groß? Wie viel Millimeter enthält dasselbe? rc.

Frei im Kopf: Wie viel Millimeter sind 2 (5, 7, 4) ^{cm}? Wie viel Millimeter sind 2 (4, 6, 8, 3) ^{dm}?

b. Welcher Theil von dem Meter ist das Decimeter? In welche Stelle nach dem Komma werden die Decimeter geschrieben?

Welcher Theil von dem Meter ist das Centimeter? Welcher Theil ist es von dem Decimeter? In welche Stelle nach dem Komma werden die Centimeter geschrieben?

Welcher Theil von dem Meter ist 1 Millimeter? Welcher Theil ist 1 Millimeter von dem Centimeter? In welche Stelle nach dem Komma wird man daher die Millimeter setzen?

Angeschrieben:	Gelesen und verwandelt:
1,1 m	1 m + 1 dm oder $1^1/_{10}$ m
1,01	1 m + 1 cm oder $1^1/_{100}$ m
1,001	1 m + 1 mm oder $1^1/_{1000}$ m
1,234	1 m + (200 + 30 + 4 =) 234 mm oder $1^{234}/_{1000}$ m
4,576	4 m + (500 + 70 + 6 =) 576 mm oder $4^{576}/_{1000}$ m
	u. s. w.

Leset es nochmal, aber ohne die Benennung „Meter“ beizufügen! (1 Ganzes und 1 Zehntel, 1 G. und 1 Hundertel, 1 G. und 1 Tausendtel, 1 G. und 234 Tausendtel ꝛc.)

§. 136. Kilogramm und Gramm.

Beide Gewichte werden vorgezeigt. — Sowie das Meter = 1000 Millimeter, so ist das Kilogramm = 1000 Gramm.

1 Gramm	= $^1/_{1000}$ Kilogramm;	$^1/_{1000}$ Kilogr.	=	1	Gramm.
2 „	= $^2/_{1000}$ „ ;	$^2/_{1000}$ „	=	2	„
8 „	= $^8/_{1000}$ „ ;	$^8/_{1000}$ „	=	8	„
24 „	= $^{24}/_{1000}$ „ ;	$^{24}/_{1000}$ „	=	24	„
153 „	= $^{153}/_{1000}$ „ ;	$^{153}/_{1000}$ „	=	153	„

Angeschr.	Gelesen:
2,005 Kgr	2 + $^5/_{1000}$ Kgr oder 2 Kgr + 5 gr
4,086 „	4 + $^{86}/_{1000}$ Kgr oder 4 Kgr + 86 gr
7,365 „	7 + $^{365}/_{1000}$ Kgr oder 7 Kgr + 365 gr
ꝛc.	u. s. w.

Zweite Abtheilung.

Die Zahlen über Tausend.

I.

§. 137. Numeriren bis zur Million.

Numeriren heißt zählen, Zahlen lesen und Zahlen schreiben. Wir beginnen mit dem Aufbau nochmal bei den Einern und führen ihn fort bis zur Million. Der Lehrer wird von einer Stufe zur andern nicht eher übergehen, bis die Schüler im Lesen und Schreiben der Zahlen in dem bis dahin erweiterten Umfange sicher sind. Zur Erleichterung kann immer so verfahren werden, wie bei dem Lesen und Schreiben der Zahlen bis Tausend. (§§. 100 u. 101.)

1) 1 × 1 = 1 Einer, geschrieben 1.
   2 × 1 = 2 Einer, „ 2.
   3 × 1 = 3 Einer, „ 3.
   ꝛc.

2) 10 mal 1 Einer = 1 Zehner.

Ein Zehner ist 10mal so groß, als 1 Einer; daher kommt die Ziffer 1, wenn sie einen Zehner gelten soll, um eine Stelle mehr zur Linken, nämlich in die zweite Stelle.

1 Zehner, mit Ziffern geschrieben = 10.
10 × 2 Einer = 2 Zehner, geschrieben 20.
10 × 3 Einer = 3 Zehner, " 30.
10 × 4 Einer = 4 Zehner, " 40 ꝛc.
36 = 3 Zehner + 6 Einer, " 36 ꝛc.

So viel Einer eine Ziffer an sich (oder in der ersten Stelle) bedeutet, so viele Zehner bedeutet sie in der zweiten Stelle.

3) 10mal 1 Zehner = 1 Hunderter.

Ein Hunderter ist 10mal so groß, als 1 Zehner; darum wird derselbe auch um eine Stelle weiter links geschrieben, als 1 Zehner. Die Zehner stehen in der zweiten Stelle; die Hunderter kommen also in die dritte.

1 Hunderter, mit Ziffern geschrieben = 100.
10 × 2 Zehner = 2 Hunderter, geschrieben 200.
10 × 3 Zehner = 3 " " 300.
10 × 4 Zehner = 4 " " 400 ꝛc.
Vierhundert und acht = 4 H. und 8 E. = 408.
Achthundert und fünfzig = 8 H. und 5 Z. = 850.
3 hundert fünfundachtzig = 3 H., 8 Z., 5 E. = 385 ꝛc.

So viele Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Hunderter bezeichnet sie an der dritten Stelle.

4) 10 × 1 Hunderter = 1 Tausender.

Ein Tausender ist wieder 10mal so groß, als 1 Hunderter; deßhalb wird ein Tausender wieder um eine Stelle weiter links geschrieben, als ein Hunderter. Die Hunderter stehen an der dritten Stelle; die Tausender kommen also in die vierte.

1 Tausender, mit Ziffern geschrieben = 1000.
10 × 2 Hunderter = 2 Tausender, geschrieben 2000.
10 × 3 Hunderter = 3 " " 3000.
10 × 4 Hunderter = 4 " " 4000.
ꝛc.

So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Tausender bezeichnet sie an der vierten Stelle.

3tausend und 400 = 3 T., 4 H., 0 Z., 0 E. = 3400.
8tausend 470 = 8 T., 4 H., 7 Z., 0 E. = 8470.
5tausend 895 = 5 T., 8 H., 9 Z., 5 E. = 5895.
7tausend und 3 = 7 T., 0 H., 0 Z., 3 E. = 7003.

Uebung im Schreiben und Lesen vierstelliger Zahlen!

---

4) 10 × 1 Tausender = 1 Zehntausender.

Ein Zehntausender ist das Zehnfache von einem Tausender. Die einfachen Tausender stehen in der vierten Stelle; die Zehntausender kommen also in die fünfte.

Ein Zehntausender mit Ziffern geschrieben = 10000.
10 × 2 Tausender = 2 Zehnt. (od. 20tausend) = 20000.
10 × 3 Tausender = 3 Zehnt. (od. 30tausend) = 30000 ꝛc.

So viele Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viele Zehntausender bezeichnet sie in der fünften Stelle.

26tausend = 2 Zt., 6 T., 0 H., 0 Z., 0 E. = 26000.
62tausend und 500 = 6 Zt., 2 T., 5 H., 0 Z., 0 E. = 62500.
75tausend 820 = 7 Zt., 5 T., 8 H., 2 Z., 0 E. = 75820.
57tausend 468 = 5 Zt., 7 T., 4 H., 6 Z., 8 E. = 57468.

Uebung im Schreiben und Lesen fünfstelliger Zahlen!

In dieser Weise geht man von den Zehntausendern in die Hunderttausender und von den Hunderttausendern in die Millionen über, überall sogleich eine Uebung im Schreiben und Lesen der Zahlen anstellend.

§. 138. Fortsetzung.

a. In welcher Stelle stehen die Einer? die Hunderter? die Zehner? die einfachen Tausender? die Hunderttausender? ꝛc.

1 1 1 1 1 1 1

An die Wandtafel geschrieben.

Hier steht die Ziffer 1 siebenmal. Welche davon steht in der ersten Stelle? in der vierten Stelle? in der 2. Stelle? ꝛc.

Nun sagt mir, was jede 1 in der Ordnung von der rechten Hand gegen die linke bedeutet!

Die 1 in der ersten Stelle gilt 1 Einer. Die 2 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner, also 10mal 1 Einer. Die 1 in der dritten Stelle gilt 1 Hunderter, also 10mal 1 Zehner ꝛc.

Mithin gilt jede 1 um eine Stelle weiter links immer zehnmal so viel, als die 1, welche ihr zur Rechten steht.

So noch mit einigen andern Ziffern!

Aus dem Bisherigen wird erkannt, daß jede Ziffer einen Werth an sich (einen absoluten Werth) und einen Stellenwerth hat.

Die Ziffer 5 bedeutet für sich allein stehend 5 Einer oder 5 × 1; in der zweiten (50) bedeutet sie 5 Zehner oder 50 × 1; in der dritten Stelle (500) gilt sie 5 Hunderter oder 50 Zehner oder 500 × 1 u. s. f.

b. Woraus besteht die Zahl 4756? Antw.: Aus 4 T., 7 H., 5 Z. und 6 E.

28193! Antw.: Aus 2 ZT., 8 T., 1 H., 9 Z. und 3 E.
u. s. w.

c. Welche Zahl besteht aus 3 T., 9 H., 4 Z. u. 2 E.? Antw.: 3942.
Welche aus 7 ZT., 5 T., 8 H., 3 Z. u. 6 E.? (75836.)

d. 47 Einer, wie viel Zehner? 68 Z., wie viel Hunderter?
52 H., wie viel Tausender? 36 T., wie viel Zehntausender?
75 ZT., wie viel HT.? 24 HT., wie viel Millionen?

---

e. Der Lehrer diktirt mehr- und wenigerstellige Zahlen in bunter Mischung und läßt sie von den Schülern wohlgeordnet unter einander schreiben.

f. Zuletzt schreibt man selbst Zahlen an und läßt sie lesen. Z. B.
4567 = 4 Tausender, 5 Hunderter, 6 Zehner und 7 Einer;
= 4 × 1000 + 5 × 100 + 6 × 10 + 7 × 1;
= 4tausend 5hundert sieben und sechzig.

73.048 = 7 Zehntausender, 3 Tausender, 0 Hunderter 2c.
= 7 × 10 oder 70tauf. + 3tauf., zuf. 73tauf. und 48.
542.763 = 5 Hunderttausender, 4 Zehnt., 2 Tausender 2c.
= 5 × 100 oder 500tausend + 4 × 10 oder 40tausend
+ 2 tausend = 542 tausend 763.
3'875.216 = 3 Millionen, 8 Hunderttauf., 7 Zehnt., 5 Tauf. 2c.
= (3 × 1 Million oder) 3 Millionen, 875 tausend 216.

Auch das Zahlenlesen muß so lange fortgesetzt werden, bis die erforderliche Fertigkeit darin erreicht ist. Zur Erleichterung mag man sich, wie hier oben, einige Zeit lang des Punktes bedienen.

Anm. Jede Zahl kann eigentlich auf so vielfache Weise ausgesprochen oder gelesen werden, als sie Stellen hat. Z. B.

37584 = 3 Zehnt., 7 T., 5 H., 8 Z. und 4 E.
= 37 Tausender, 5 H., 8 Z. und 4 E.
= 375 Hunderter, 8 Z. und 4 E.
= 3758 Zehner und 4 Einer.
= 37584 Einer oder 37584.

§. 139. Billionen und Trillionen 2c.

Obgleich diese Zahlengrößen im Leben niemals wirklich vorkommen, sondern höchstens hie und da einmal genannt werden; so wollen wir den Zehnerbau bis zu denselben, der Vollständigkeit wegen, hier fortführen.

10 Einermillionen = 1 Zehnermillion,
10 Zehnermillionen = 1 Hundertermillion,
10 Hundertermillionen = 1 Tausendermillion,
10 Tausendermillionen = 1 Zehntausendermillion,
10 Zehntausendermillionen = 1 Hunderttausendermillion,
10 Hunderttausendermillionen = 1 Billion.

Da die Einermillionen in der 7. Stelle stehen, so nehmen die Zehnermillionen die 8., die Hundertermillionen die 9. 2c., die einfachen Billionen also die 13. Stelle ein.

Zur Erleichterung im Lesen und Schreiben dient die Abtheilung der Ziffern in Gruppen von drei zu drei, und zwar in folgender Art:

3''725.491'860.578 =

3 Billionen 725tausend 491 Millionen 860tausend 578.

In gleicher Weise, wie aus den Millionen die Billion, wird aus den Billionen die Trillion und aus den Trillionen die Quatrillion aufgebaut. Die Zahl

5'''371.468''925.376'529.874

heißt: 5 Trillionen, 371tausend 468 Billionen, 925 tausend 376 Millionen, 529tausend 874.

Welch eine große Zahl schon eine Billion ist, läßt sich daraus abnehmen, daß 1 Billion Weizenkörner etwa 145000 bayer Scheffel oder 322418 Hektoliter gibt. Würde Jemand täglich 18 Stunden lang und in jeder Sekunde 5 Körner zählen, so hätte er etwa 8450 Jahre lang damit zu thun.

§. 140. Die römischen Ziffern.

Die Form und Bedeutung der gewöhnlichen römischen Zahlzeichen oder Ziffern ist folgende:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Einen Stellenwerth haben diese Ziffern nicht; sondern so oft die Ziffer I neben einander steht, so oft bedeutet sie Eins; so oft die Ziffer X neben einander steht, so oft bedeutet sie Zehn u. s. w.

II = 1 + 1 oder 2.	CC = 100 + 100 oder 200.
III = 1 + 1 + 1 oder 3.	CCC = 3 × 100 oder 300.
XX = 10 + 10 oder 20.	MM = 1000 + 1000 oder 2000.
XXX = 3 × 10 oder 30.	MMM = 3 × 1000 oder 3000.

Steht eine geringere Ziffer vor einer größeren, so wird sie davon abgezogen.

IV = 5 — 1 oder 4.	XC = 100 — 10 oder 90.
IX = 10 — 1 oder 9.	VD = 500 — 5 oder 495.
VL = 50 — 5 od. 45.	CM = 1000 — 100 oder 900.

Steht aber die geringere Ziffer nach der größeren, so wird sie dazu gezählt.

VI = 5 + 1 oder 6.	CX = 100 + 10 oder 110.
XI = 10 + 1 „ 11.	DV = 500 + 5 „ 505.
LV = 50 + 5 „ 55.	MC = 1000 + 100 „ 1100.

Einige Beispiele zur Uebung.

VI = 6	XV = 15
IV = 4	XVI = 16
VIIII = 9	XIV = 14
IX = 9	XXIV = 24
XXXI = 31	CXXV = 125
XXIX = 29	CCCXXXVII = 337
XXXVIII = 38	DLXVIII = 568
LXXXVIIII = 89	DCCCXIIII = 814

MDCCCLXXVII = 1877.

II.

Addiren.

A. Kopfrechnen.

§. 141. Zahlen mit einer geltenden Stelle.

a. Ohne Uebergang in höhere Ordnungen.

Mit 3 + 2.

3 E. + 2 E. = 5 E.; 3 + 2 = 5.
3 Z. + 2 Z. = 5 Z.; 30 + 20 = 50.
3 H. + 2 H. = 5 H.; 300 + 200 = 500.
s. f. bis
3 Millionen + 2 Mill. = 5 Millionen.

Eben so mit 2 + 4, 4 + 3, 3 + 5, 5 + 4.

Jetzt spricht, nachdem das zu addirende Zahlenpaar genannt ist, der Schüler allein. Auch das Sprechen im Chor ist hier am Platze. Der Lehrer nennt z. B. die Zahlen 2 + 4, und die Schüler fahren fort:

2 E. + 4 E. = 6 E.; 2 + 4 = 6.
2 Z. + 4 Z. = 6 Z.; 20 + 40 = 60 u. s. w.

Das Sprechen, nämlich das Sprechen im Zusammenhange von Seite der Schüler muß immer mehr vorherrschen. Andererseits sehe man darauf, daß es nicht in eine Vielwortmacherei ausarte. Alles, was gesprochen wird, muß in Bezug auf die Sache erschöpfend, in Bezug auf die Darstellung wohlgeordnet, möglichst kurz und präcis sein. Wo fünf Worte oder Wörter ausreichen, sollen nicht sechs gebraucht werden.

b. Mit Uebergang in höhere Ordnungen.

8 + 5.

8 E. + 5 E. = 13 E. = 1 Z. + 3 E.; 8+5=13.
8 Z. + 5 Z. = 13 Z. = 1 H. + 3 Z.; 80+50=130.
8 H. + 5 H. = 13 H. = 1 T. + 3 H.; 800+500=1300=1.300.

So fort bis

8 Millionen + 5 Mill. = 13 Millionen.

Eben so mit 8 + 7, 9 + 8, 6 + 7 + 8, 7 + 8 + 9.

§. 142. Zahlen mit mehr als einer geltenden Stelle.

Uebersicht.

1.	2.	3.
250+40	360+80	350+470
460+28	470+75	570+368
845+30	654+90	688+254
936+56	585+48	900+580+65

Die Fälle unter 1 sind Wiederholungen; die Hunderter bleiben unverändert. 936 + 56! 936 + 50 = 986, + 6 = 992. Bei 2 und 3 kommen Uebergänge aus niederen Ordnungen in höhere vor.

Verfahren.

Die Schüler erhalten die Aufgabe ohne jede Anleitung zur Berechnung. Sie müssen zu der geeigneten Art und Weise auf dem Wege des Selbstsuchens gelangen. Nur wenn sie Um- oder Irrwege einschlagen, sind ihnen Fingerzeige zu geben, im letzteren Falle jedoch nie, ohne ihnen zuvor das Irrige ihres Verfahrens zum Bewußtsein gebracht zu haben. Wo das Behalten der gegebenen Zahlen schwierig ist und die Ausführung der Operation hierdurch beeinträchtigt wird, werde die Aufgabe anfangs an die Wandtafel notirt, später von einzelnen Schülern oder im Chor ein oder einigemal wiederholt.

360 + 80! 360 + 80 ist (da 60 + 80 = 140) = 440.
470 + 75! 470 + 70 = 540, + 5 = 545.
645 + 90! 645 + 90 ist (da 45 + 90 = 135) = 735.
582 + 48! 582 + 40 = 622, + 8 = 630.
350 + 470! 350 + 400 = 750, 750 + 70 = 820.

678 + 254! 678 + 200 = 878, 878 + 50 = 928, + 4 = 932.
900 + 580 + 65 = ?
900 + 580 = 1480, 1480 + 60 = 1540, + 5 = 1545.

Wiederholtes Zuzählen gleicher und verschiedener Zahlen. In beiden Fällen findet ein stufenweiser Fortschritt vom Leichteren zum Schwierigern statt.
Erste Stufe: 100+12=112, 112+12=124, 124+12=136 ꝛc.
Zweite Stufe: 100+12=112+12=124+12=136+12=148 ꝛc.
Dritte Stufe: 100, 112, 124, 136, 148, 160, 172, 184 ꝛc.

40+50=90+40=130+50=180+40=220+50=270+40=310 ꝛc.
30+25=55+30= 85+25=110+30=140+25=165+30=195 ꝛc.
12+15=27+12= 39+15= 54+12= 66+15= 81+12=93 ꝛc.

Rechenvortheile werden hier überhaupt da angewendet, wo ein oder beide Posten nahe an runde Zahlen grenzen. Z. B.
99 + 87 = 99 + 1 + 86 = 100 + 86 = 186.
548 + 397 = 548 + 400 − 3 = 948 − 3 = 945.
197 + 106 = 200 + 103 = 303.

Ein Weinhändler kauft 1 Faß rothen Wein für 860 ℳ und 1 Faß weißen Wein für 585 ℳ; wie viel hat er im Ganzen zu zahlen?

Preußen hat etwa 26 Millionen Einwohner, Bayern 5 Mill.; wie viel Einwohner haben beide Königreiche zusammen?

§. 143. Mehrfach benannte Zahlen.

18 ℳ 70 ₰. + 7 ℳ 56 ₰. = ?

Die Aufgabe wird, um sie dem Gedächtnisse einzuprägen, von den Schülern einigemal wiederholt. Wie kann man sie rechnen? (Mit der höheren Sorte, oder mit der niederen beginnend.) Ausgeführt! — Dabei wird sich ergeben, daß man die Sorten am besten in der Ordnung addirt, in welcher man sie nennt, hier also zuerst 18 ℳ + 7 ℳ, dann 70 ₰. + 56 ₰.

14 ℳ 80 ₰. + 9 ℳ 75 ₰.	12 m 90 cm + 10 m 64 cm
32 ℳ 65 ₰. + 7 ℳ 50 ₰.	3 J. 10 Mon. + 2 J. 8 Mon.
8 Hl 40 lt + 4 Hl 96 lt	7 Mon. 18 Tg. + 4 Mon. 24 Tg.
5 Ctr. 75 Pfd. + 3 Ctr. 70 Pfd.	6 Schck. 40 St. + 8 Schck. 56 Stck.

Aufg. z. Kopfr.

B. Tafelrechnen.

§. 145. Verfahren.

Aufgabe: 768 + 1825 + 96 + 5867 + 973 = ?

Die Summanden werden genau so untergesetzt, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc. stehen.

Ansatz:

768
1825
96
5867
973
9529

Ausrechnung: 3 E. + 7 E. = 10 E. + 6 = 16 E. + 5 E. = 21 E. + 8 E. = 29 E. oder 9 E. (notirt) + 2 Z.; 2 Z. + 7 Z. = 9 Z. u. s. w. Dann kurz: 3 + 7 = 10, + 6 = 16, + 5 = 21, + 8 = 29; (9 untergesetzt, 2 im Sinn); 2 + 7 = 9 + 6 = 15 u. s. w.

Der Lehrer versäume nicht, von Zeit zu Zeit Aufgaben mit Zahlen in bunter Mischung zur Uebung im Zahlenschreiben zu diktiren und mitunter auch Aufgaben mit so vielen Posten zu geben, daß die Summe einer senkrechten Reihe mehr als 100 beträgt. Ist dieselbe z. B. 124 E., so enthält sie 12 Z. + 4 E.; beträgt sie 124 Z., so enthält sie 12 H. + 4 Z.; in beiden Fällen wird 4 untergesetzt und 12 zur nächsten Reihe gezählt.

Aufg. Die Ausgaben einer Gemeinde betragen für die Erbauung eines neuen Schulhauses 10764 ℳ, für Herstellung einer Brücke 475 ℳ, für Anschaffung einer Feuerlöschmaschine 1236 ℳ und für verschiedene andere Bedürfnisse 850 ℳ; wie viel im Ganzen? (13325 ℳ)

Aufl. Wie viel muß die Gemeinde für ihr neues Schulhaus bezahlen? Wie viel für das Schulhaus und die Brücke? (10764 ℳ + 475 ℳ) Wie viel für das Schulhaus, für die Brücke, für die Löschmaschine und Anderes zusammen? (10764 + 475 + 1236 + 850 ℳ)

Was muß also mit den gegebenen Zahlen geschehen, um die verlangte Antwort zu erhalten? Ausrechnung!

Aufg. z. Ziffern.

§. 146. Aufgaben mit benannten Decimalzahlen.

Angeschrieben:		Gelesen und verwandelt:
3,45 ℳ	= 345 ₰.	3 ℳ 45 ₰. = 300 + 45 = 345 ₰.
9,78 „	= 978 „	9 ℳ 78 ₰. = 900 + 78 = 978 ₰.
8,94 „	= 894 „	8 ℳ 94 ₰. = 800 + 94 = 894 ₰.
2 1	2 1	
22,17 ℳ	2217 ₰.	= 22,17 ℳ

Gerechnet:

Wir addiren zuerst die in Pfg. ausgedrückten Posten. 4 + 8 = 12, + 5 = 17; 7 geschr., 1 hinüber u. s. w. Summe 2217 ₰. = 22 ℳ 17 ₰.

Nun zählen wir die in Mark ausgedrückten Posten zusammen.
4 + 8 = 12, + 5 = 17; 7 geschrieben, 1 hinüber;
1 + 9 = 10, + 7 = 17, + 4 = 21; 1 geschr., 2 hinüber; Komma!
2 + 8 = 10, + 9 = 19, + 3 = 22. Summa: 22 ℳ 17 ₰.

Addirt und hinübergezählt wurde auf der einen Seite wie auf der andern. Nur hat sich auf der einen Seite die Summe sogleich in Mark

und Pfennigen, auf der andern zunächst in Pfennigen ergeben, welche wir erst in Mark verwandeln mußten. Wie werden wir nun dergleichen Aufgaben immer rechnen?

Antwort: So wie sie stehen, also ohne die Zahlen noch einmal anzuschreiben. Die Mark und Pfg. lesen oder denken wir uns bloß als Pfennige, addiren wie gewöhnlich, setzen sogleich Komma unter Komma und erhalten so auch sogleich das fertige Resultat.

3,75 m	1,245 m	8,65 Hl	26,582 Kgr
6,08	0,896	27,87	7,845
14,60	2,510	6,08	35,704
7,57	4,843	53,50	0,960
32,00 m	9,485 m	96,10 Hl	71,091 Kgr

Aufg. z. Zifferr.

III.

Subtrahiren.

A. Kopfrechnen.

§. 146. Gang und Verfahren.

1. Ohne höhere Ordnungen in niedere aufzulösen.

Mit 5—2.

5 Einer — 2 E. = 3 Einer; 5 — 2 = 3.
5 Zehner — 2 Z. = 3 Zehner; 50 — 20 = 30.
5 Hunderter — 2 H. = 3 Hunderter; 500 — 200 = 300.
5 Tausender — 2 T. = 3 Tausender; 5000 — 2000 = 3000.
5 ZT. — 2 ZT. = 3 ZT.; 50.000 — 20.000 = 30.000.
5 HT. — 2 HT. = 3 HT.; 500.000 — 200.000 = 300.000.
5 Mill. — 2 Mill. = 3 Millionen.

Alles unmittelbar.

Eben so mit 6 — 4, 7 — 3, 8 — 7, 9 — 6.

2. Höhere Ordnungen werden in niedere aufgelöst.

1 Z. — 3 E. = 10 E. — 3 E. = 7 E.; 10 — 3 = 7.
1 H. — 4 Z. = 10 Z. — 4 Z. = 6 Z.; 100 — 40 = 60.
1 T. — 5 H. = 10 H. — 5 H. = 5 H.; 1000—500=500.
1 ZT. — 6 T. = 10 T. — 6 T. = 4 T.; 10000—6000=4000.
1 HT.—8 ZT.=10 ZT.—8 ZT=2 ZT.; 100000—80000=20000.
1 Mill.—7 HT.=10 HT.—7 HT.=3HT.; 1000000—700000=300000.

Uebersicht der übrigen Fälle.

1.	2.	3.	4.
1000— 80	4000—800	4000—2500	360—80
1000— 5	7000— 40	5000—1725	540—75
1000— 65	2000— 8	6400—2800	132—50
1000—464	6000—572	9200—4850	244—68

Verfahren.

1000 — 80! 1000 = 900 + 100; 100 — 80 = 20; 900+20=920; also ist 1000 — 80 = 920. Dann kurz: 1000 — 70 = 930, 1000 — 40 = 960; 1000 — 60 = 940 ꝛc.

1000 — 5! 1000 = 900 + 100; 100 — 5 = 95; 900 + 95 = 995; also ist 1000 — 5 = 995. Dann kurz: 1000 — 1 = 999; 1000 — 7 = 993; 1000 — 3 = 997 ꝛc.

1000 — 464! 1000 -- 400 — 600; 600 — 60 = 540, — 4 = 536.

7000 — 40!
7000=6000+1000; 1000—40=960; 6000+960=6960.

5000 — 1725 = ?
5000—1000=4000; 4000—700=3300; 3300—20=3280, und 3280—5=3275.

Von der Vollzahl wird also bei mehrstelliger Abzugszahl zuerst die Ziffer der höchsten Ordnung, von dem Reste die Ziffer der nächstniedrigeren Ordnung u. s. w. abgezogen.

In dieser Weise sind besonders die Fälle unter 4 bis zur Schlagfertigkeit zu üben.

120 — 50! 120 — 50 (12 Z. — 5 Z.) = 70.
230 — 70! 230 — 70 (23 Z. — 7 Z.) = 160. Oder: da 130 — 70 = 60, so ist 230 — 70 = 160.
360 — 80! 360 — 80 (36 Z. — 8 Z.) = 280. Oder: da 160 — 80 = 80, so ist 360 — 80 = 280.
540 — 75! 540 — 70 = 470; 470 — 5 = 465.
132 — 50! 132 — 50 ist (da 130 — 50 = 80) = 82.
244 — 68! 244 — 60 = 184, und 184 — 8 = 176.

Wiederholtes Abziehen einer und derselben Zahl; Reihenbildung.

1000—20=980	1000—40=960	1000—60=940
980—20=960	960—40=920	940—60=880
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.
8000—800=7200	3000—150=2850	2400—120=2280
7200—800=6400	2850—150=2700	2280—120=2160
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

200—8=192	4000—125=3875
192—8=184	3875—125=3750
ꝛc.	ꝛc.

Gelegentlich:
Wie viel muß man zu 6570 legen, um 10000 zu erhalten?
Wie viel ist 1 Million mehr als 725000?
Wie viel ist 10000—4? 20000—45? 30000—600?

---

1 Kilogr. = 1000 Gramm. Bis zur Fertigkeit:
1 Kgr — 300, 800, 600, 160, 350, 670, 175, 464, 525 gr.
3 Kgr — 800 gr! 2 Kgr + 1000 gr — 800 gr = 2 Kgr 200 gr.

Aufg. Von 400 Kgr Zucker sind noch 148 Kgr vorhanden; wie viel ist verbraucht worden? (252 Kgr.)

Aufl. Wie viel Kgr Zucker waren es ursprünglich? Wie viel ist davon noch vorhanden? Und was sollen wir suchen? Woran sieht man, daß von einer Sache verbraucht oder weggenommen wurde? (Daran, daß sie weniger geworden ist.) Und wie kann man finden, wie viel von einer Sache verbraucht wurde? (Wenn man untersucht, um wie viel sie weniger geworden ist.) Wie viel muß daher von den 400 Kgr Zucker verbraucht worden sein, da nur noch 148 Kgr davon vorhanden sind? (So viel, als 148 Kgr weniger sind als 400 Kgr.) Wie findest du das? (Durch Zulegen und Abziehen.)

Aufg. A, B und C besitzen mit einander 800 ℳ.; A hat 230 ℳ. und B 350 ℳ.; wie viel hat C? (220 ℳ.)

Aufl. Wie viel Geld besitzen A, B und C mit einander? Wie viel haben A und B zusammen? (230 + 350 = 580 ℳ.) Wie viel Geld wird nun C haben? (So viel, als zu 580 ℳ. auf 800 ℳ. fehlt, oder 800 ℳ. — 580 ℳ.)

Eine Stadt hatte vor Jahren 24000 Einw., jetzt zählt sie 42800; um wie viel ist ihre Einwohnerzahl gewachsen?

Von 1200 Soldaten zu Fuß und 800 zu Pferd kehrten aus einer Schlacht im Ganzen 1645 Mann zurück; wie viel sind gefallen?

---

§. 148. Mehrfach benannte Zahlen.

Von einem Zuckerhut, der 6 Kilogramm wog, wurden 2 Kgr und 470 gr verkauft; wie viel davon ist noch vorhanden?

Aufl. Vorhanden sind noch 6 Kgr — 2 Kgr 470 gr; also abziehen.

Ausr. 6 Kgr — 2 Kgr = 4 Kgr; 4 Kgr = 3 Kgr + 1000 gr; 1000 gr — 470 gr = 530 gr; es sind also noch 3 Kgr + 530 gr vorhanden.

8 Kgr — 5 Kgr 650 gr	120 ℳ. — 70 ℳ. 48 ₰.
10 Kgr — 4 Kgr 275 gr	200 ℳ. — 120 ℳ. 56 ₰.
15 Kgr — 8 Kgr 670 gr	10 Hl — 5 Hl 32 lt

B. Tafelrechnen.

§. 149. Verfahren.

1. Ohne Borgen. Wie viel ist 87259 — 23056?

```
  8 7 2 5 9
— 2 3 0 5 6
-----------
  6 4 2 0 3
```

6 E. von 9 E. bleiben 3 E.; 5 Z. von 5 Z. geht auf, also Null; 0 H. von 2 H. bleiben 2 H. u. s. f. Dann: 6 von 9 bleibt 3, 5 von 5 bleibt 0 u. s. w.

2. Mit Borgen. Wie viel ist 53816 — 27432?

```
  5.3 8.1 6
— 2 7 4 3 2
———————————
  2 6 3 8 4
```

2 E. von 6 E. bleiben 4 E.; 3 Z. von 1 Z. abzuziehen, geht nicht; 1 H. geborgt; 3 Z. von 11 Z. bleiben 8 Z.; 4 H. von 7 H. bleiben 3 H.; 7 T. von 3 T. abzuziehen, geht nicht; 1 ZT. geborgt; 7 T. von 13 T. bleiben 6 T.; 2 ZT. von 4 ZT. bleiben 2 ZT. Dann kurz:

2 von 6 bleibt 4, 3 von 11 bleibt 8, 4 von 7 bleibt 3 u. s. w.

Aufg. Wie viel ist 800000 mehr als 452985?

Aufl. Das finde ich, wenn ich die kleinere Zahl von der größeren abziehe.

```
           9   9   9   9
          10. 10. 10. 10. 10
Ausr.  8.0 0 0 0 0          8.0.0.0.0.0
      —4 5 2 9 8 5    =    —4 5 2 9 8 5
      ————————————         ————————————
       3 4 7 0 1 5          3 4 7 0 1 5
```

5 E. von 0 E. abzuziehen, geht nicht; um die 5 E. abziehen zu können, so müssen wir also borgen. Wir gehen zu den Einern; es sind aber keine da. Nun gehen wir zu den Hundertern; auch da ist nichts.

Eben so wenig können wir von den Tausendern und den ZT. Etwas borgen. Warum? So bleibt also nichts Anderes übrig, als von den 8 HT. einen zu entlehnen.

Den geborgten HT. ziehen wir in die nächste Stelle, in die Stelle der ZT. herüber; da haben wir nun auf einmal 10 ZT. Für 8 HT. steht jetzt: 7 HT. + 10 ZT. Von den 10 ZT. führen wir 1 ZT. in die Stelle der T. herüber; in der 5. Stelle bleiben 9 ZT. zurück, und in der 4. Stelle haben wir jetzt 10 Tausender u. s. w. Anstatt 8 HT. steht zuletzt: 7 HT. 9 ZT. 9 T. 9 H. 9 Z. + 10 E., und das ist eben so viel. Die erste Null ist zur 10 geworden und jede andere, über welche wir hinweg geborgt, zur 9. Nun lassen sich sämmtliche Einheiten der Abzugszahl von denen der Vollzahl ohne Weiteres abziehen.

Hat der Schüler die Sache begriffen, so wird zum Schnellrechnen übergegangen.

```
Aufg. u. Ausr.     1.0.1.0 1.0.1
                 —   4 7 9 0 3 8
                 ———————————————
                     5 3 1 0 6 3
```

Für Aufgaben dieser Art ist die Probe sehr zu empfehlen. 3+8=11; 1 oben, 1 im S.; 1+6+3=10; 0 oben, 1 im S.; 1+0+0=1; 1 oben u. s. w.

Zuweilen wird nach der Ausrechnung einer Aufgabe die Beziehung der Zahlen zu einander, wie folgt, besprochen.

```
  6.5.0.4
— 2 8 5 6
—————————
  3 6 4 8
```

Wie heißt die Vollzahl? Wie die Abzugszahl? Wie viel beträgt der Rest? In welche zwei Posten ist die Zahl 6504 durch das Abziehen zerlegt worden? Wie erhält man aus den beiden Posten die Vollzahl? Wie viel ist 6504—2856? Und wie viel ist 6504—3648? Untersucht es! Wie viel beträgt der Unterschied von 2856 und 6504? Wie viel von 3648 und 6504?

§. 150. Zusammengesetzte Aufgaben.

(8567 + 896 + 89 + 7458) — (4628 + 84 + 10467) = ?

Berechnung.

	8 5 6 7	4 6 2 8
	8 9 6	8 4
	8 9	1 0 4 6 7
	7 4 5 8	1 5 1 7 9
Summa	1 7 0 1 0	
ab	1 5 1 7 9	
Rest	1 8 3 1	

Es kauft Jemand ein in Haus und Feld bestehendes Anwesen um 20400 ℳ.; das Haus verkauft er wieder um 8465 ℳ. und die Felder um 10842 ℳ. Hat er Gewinn oder Verlust, und wie viel?

8 4 6 5 ℳ.	Ankauf	2 0 4 0 0 ℳ.
1 0 8 4 2 „	Erlös	1 9 3 0 7 „
1 9 3 0 7 ℳ.	Verlust	1 0 9 3 ℳ.

§. 151. Aufgaben mit benannten Decimalzahlen.

Angeschrieben:	Gelesen und verwandelt:
6.,2.4 ℳ. = 6.2.4 ₰.	6 ℳ. 24 ₰. = 624 ₰.
— 2,6 8 „ = 2 6 8 „	2 ℳ. 68 ₰. = 268 ₰.
3,5 6 ℳ. 3 5 6 ₰. = 3,56 ℳ.	

Wir ziehen zuerst 268 ₰. von 624 ₰. ab. Als Rest ergeben sich 356 ₰. = 3,56 ℳ. Die in Mark ausgedrückte Voll- und Abzugszahl lesen oder denken wir uns bloß als Pfennige und rechnen dann eben so. 8 von 14 bleibt 6, 6 von 11 bleibt 5, Komma! 2 von 5 bleibt 3. Rest 3,56 ℳ. (3 ℳ. 56 ₰.)

6.8.,4.0 ℳ.	2 0.,5.0 m	8.,2 4.5 m	4.,3 7.0 Kgr	9.,0 8 Hl
—3 9,8 4 „	—1 2,7 5 „	—3,7 2 8 „	—1,8 2 5 „	—4,9 6 „
2 8,5 6 ℳ.	7,7 5 m	4,5 1 7 m	2,5 4 5 Kgr	4,1 2 Hl

IV.

Multipliciren.

1. Der Multiplikator ist einstellig.

A. Kopfrechnen.

§. 152. Gang und Verfahren.

2 × 2 E. = 4 E.; 2 × 2 = 4.
2 × 2 Z. = 4 Z.; 2 × 20 = 40.
2 × 2 H. = 4 H.; 2 × 200 = 400.
2 × 2 T. = 4 T.; 2 × 2000 = 4000.
2 × 2 ZT. = 4 ZT.; 2 × 20.000 = 40.000.
2 × 2 HT. = 4 HT.; 2 × 200.000 = 400.000.
2 × 2 Mill. = 4 Millionen.

Eben so mit 2 × 3, 4 × 2, 3 × 3, 2 × 5.

7 × 6

7 × 60 = ?
7 × 60 = 7 × 6 Z. = 42 Z. = 4 H. + 2 Z. = 420.

7 × 600 = ?
7 × 6 H. = 42 H. = 4 T. + 2 H. = 4200.

7 × 6000 = ?
7 × 6 T. = 42 T. = 4 ZT. + 2 T. = 42.000.

7 × 60000 = ?
7 × 6 ZT. = 42 ZT. = 4 HT. + 2 ZT. = 420.000,

7 × 600.000 = ?
7 × 6 HT. = 42 HT. = 4 Mill. + 2 HT. = 4'200.000.

Eben so mit 3 × 5, 4 × 6, 5 × 7, 6 × 9, 9 × 8.

---

4 × 68 = ? 4 × 68 = 4 × 60 + 4 × 8 = 240 + 32 = 272.

Ist bis zur Schlagfertigkeit zu üben. 6 × 74 = 420 + 24 = 444; 8 × 56 = 400 + 48 = 448; 7 × 35 = 210 + 35 = 245.

6 × 473 = ?
6×400=2400; 6×73=420+18=438; 2400+438=2838.

8 × 195 = ?
a. 8×100=800; 8×95=720+40=760; 800+760=1560.
b. 8×195=8×200—8×5=1600—40=1560.

3 × 5 × 7 = ? (3×5×7=5×7×3=7×3×5.)
a. 5 × 7 = 35; 3 × 5 × 7 = 3 × 35 = 90 + 15 oder 105.
b. 7 × 3 = 21; 5 × 7 × 3 = 5 × 21 = 100 + 5 oder 105.
c. 3 × 5 = 15; 7 × 3 × 5 = 7 × 15 = 70 + 35 oder 105.

Man multiplicirt zuerst zwei der gegebenen Zahlen mit einander und das Produkt hieraus mit der dritten. Das Endprodukt ist das gleiche, in welcher Ordnung man die Faktoren auch mit einander multiplicirt.

B. Tafelrechnen.

§. 153. Verfahren.

```
 6 5 8 3
    × 9
---------
3 9 4 9 8
```

6 × 6583 = 6 × 3 E. + 6 × 8 Z. + 6 × 5 H. + 6 × 6 T.
6 × 3 E. = 18 E. oder 8 E. (schreibend) und 1 Z. (im Sinne.)
6 × 8 Z. = 48 Z., + 1 Z. = 49 Z. oder 9 Z. (schreib.) + 4 H. (im S.)
6 × 5 H. = 30 H., + 4 H. = 34 H. oder 4 H. (schreib.) + 3 T. (im S.)
6 × 6 T. = 36 T., + 3 T. = 39 T. oder 9 T. (schreib.) + 3 ZT. (schr.)
3 ZT. + 9 T. + 4 H. + 9 Z. + 8 E. = 39498; 6×6583 = 39498.

Dann: 6 × 3 = 18; ich schreibe 8 und behalte 1 (im S.);
6 × 8 = 48, + 1 = 49: ich schreibe 9 und behalte 4;
6 × 5 = 30, + 4 = 34; ich schreibe 4 und behalte 3;
6 × 6 = 36, + 3 = 39; ich schreibe 39 aus.

46800 × 3 = ?

a.
```
  4 6 8 0 0
      × 3
-----------
1 4 0 4 0 0
```

b.
```
  4 6 8 0 0
      × 3
-----------
1 4 0 4 0 0
```

Bei b heißt es: Einer und Zehner sind keine da; also können wir auch im Produkte keine erhalten. Wir rechnen daher 3 × 468 H. und ziehen die beiden Nullen dazu herunter. 3×468 H. = 1404 H. = 140400.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

2. Der Multiplikator ist zwei- und mehrstellig.

A. Kopfrechnen.

§. 154. Gang und Verfahren.

10 × 40! 40 = 4 Z.; 10 × 4 Z. = 40 Z. oder 4 H.; 10 × 40 = 400.
10 × 24! 10 × 24 = 10 × 20 + 10 × 4; 10 × 20 = 200, u. 10 × 4 = 40; 200 + 40 = 240; 10 × 24 = 240.
10 × 300! 10 × 3 H. = 30 H. oder 3 T.; 10 × 300 = 3000.
10 × 357! 10 × 300 = 3000; 10 × 57 = 570; 3000 + 570 = 3570.

Eine Zahl wird 10mal genommen, wenn man ihr eine Null anhängt.

---

100 = 10 × 10; 100 × 1 = 10 × 10 × 1.
100 × 4!
a. 100 × 4 = 10 × 10 × 4; 10 × 4 = 40, u. 10 × 40 = 400.
b. 100 × 1 = 100, 100 × 4 = 4 × 100 = 400; 100 × 4 = 400.
100 × 30 = ?
a. 10 × 30 = 300, und 10 × 300 = 3000; 100 × 30 = 3000.
b. 100 × 1 = 100; 100 × 30 = 30 × 100 = 30 H. od. 3000.
100 × 45 = ?
a. 10 × 45 = 450, und 10 × 450 = 4500; 100 × 45 = 4500.
b. 100 × 1 = 100; 100 × 45 = 45 × 100 = 4500.

Eine Zahl wird 10 × 10 oder 100mal genommen, wenn man ihr 2mal eine Null oder 2 Nullen anhängt.

Wie viel ist 10 × 48? 100 × 64? 1000 × 3? 1000 × 36?

---

20 × 7 = ?

20×7 = 10×7 + 10×7 = 2×10×7; 10×7 = 70, u. 2×70 = 140.

Da 2×10 = 10×2, so können wir anstatt 2×10×7 auch 10×2 ×7 rechnen. 2×7 = 14, und 10×14 = 140. So ist es besser.

Eine Zahl wird also 20mal genommen, wenn man sie 2mal nimmt und das Zweifache von ihr 10mal; 30mal, wenn man sie 3mal nimmt und das Dreifache wieder 10mal ꝛc.

200 × 8 = ?

200 × 8 = 100 × 8 + 100 × 8 = 2 × 100 × 8 od. 100×2×8; 2×8 = 16, und 100 × 16 = 1600; 200 × 8 = 1600.

Wie nimmt man eine Zahl 20mal? 200mal? 2000mal? 30mal? ꝛc.
Wie viel ist 70 × 9? 800 × 6? 5000 × 5?

$30 \times 20 = ?$

a. $30 \times 20 = 10 \times 3 \times 20$; $3 \times 20 = 60$, und $10 \times 60 = 600$.

b. $3 \times 2 = 6$; $3 \times 20 = 60$, u. $30 \times 20 = 600$. Man rechnet 3×2 u. hängt dem Facit 2×1 Null an. $40 \times 70 = 2800$; $80 \times 90 = 7200$.

$40 \times 18 = ?$ $4 \times 18 = 72$, und $10 \times 72 = 720$.

$80 \times 64 = ?$ $8 \times 64 = 480 + 32 = 512$, u. $10 \times 512 = 5120$.

$23 \times 8 = ?$ $23 \times 8 = 20 \times 8 + 3 \times 8 = 160 + 24 = 184$.

$32 \times 40 = ?$

a. $32 \times 40 = 30 \times 40 + 2 \times 40 = 1200 + 80 = 1280$.

b. $32 \times 4 = 128$; $32 \times 40 = 10 \times 128 = 1280$.

$18 \times 27 = ?$

a. $10 \times 27 = 270$; $8 \times 27 = 160 + 56 = 216$; $270 + 216 = 486$.

b. $18 = 6 \times 3$; $18 \times 27 = 6 \times 3 \times 27 = 6 \times 81 = 480 + 6 = 486$.

$45 \times 18 = ?$

a. $40 \times 18 = 720$, $5 \times 18 = 90$, $720 + 90 = 810$.

b. $45 = 5 \times 9$; $45 \times 18 = 5 \times 9 \times 18$ oder $= 9 \times 5 \times 18$.

Was ist nun vortheilhafter: zuerst mit 9, oder mit 5 zu multipliciren? Thun wir beides!

$9 \times 18 = 90 + 72 = 162$, $5 \times 162 = 500 + 300 + 10 = 810$.

$5 \times 18 = 90$, und $9 \times 90 = 810$. So ist es besser. Und warum? Weil sich dabei zuerst eine reine Zehnerzahl ergibt.

$36 \times 25 = ?$

$36 = 6 \times 6$ und auch $= 9 \times 4$. Was ist das Vortheilhafteste: 25 zuerst mit 6, oder mit 9, oder mit 4 zu multipliciren? $6 \times 25 = 150$, $9 \times 25 = 225$, und $4 \times 25 = 100$. Das Beste ist also, 36 in 4×9 zu zerlegen und zuerst mit 4 zu multipliciren. $4 \times 25 = 100$, $9 \times 100 = 900$. $48 \times 25 = 12 \times 4 \times 25 = 12 \times 100$ oder 1200; $72 \times 25 = 18 \times 100 = 1800$. $6 \times 395 = 6 \times 400 - 6 \times 5 = 2400 - 30 = 2370$.

$143 \times 4 = (100 \times 4) + (40 \times 4) + (3 \times 4) = 400 + 160 + 12 = 572$.

Wie viel betragen $^3/_4$ von 196? $^7/_8$ von 144? $^8/_9$ von 162?

Wie viel beträgt die Summe von $^4/_5$ und $^6/_7$ aus 175?

Wie groß ist der Unterschied von $^2/_3$ und $^5/_6$ aus 168?

Die Produkte aus den Zahlen von 11 bis 19 mit den Grundzahlen ($1 \times 11 = 11$, $2 \times 11 = 22$ 2c.) werden nochmal eingeübt.

Der Lehrer schreibt eine mehrstellige Zahl an die Wandtafel und läßt sie mit den Grundzahlen der Reihe nach vervielfachen.

§. 155. Aufgaben mit der angewandten und mehrfachbenannten Zahl.

Der Centner Hopfen zu 90 M., wie viel kosten 20 Ctr.?

Jemand verdient monatlich 75 M., wie viel in 1 Jahre?

Das Liter Wein zu 84 Pfg., wie hoch kommt das Hektoliter? (100×84 ₰. $= 8400$ ₰. $= 84$ M. Oder: 100×1 ₰. $= 1$ M., 100×2 ₰. $=$ 2 M., 100×3 ₰. $= 3$ M., also 100×84 ₰. $= 84$ M.)

1 Pfd. Zucker zu 65 Pfg.; wie berechnet sich der Centner?
1 Meter zu 3 *M.* 75 *ℌ.*; was kosten 10 Meter?
1 Liter Wein zu 2 *M.* 50 *ℌ.*, wie viel kostet 1 Hl?

---

15 Tg., wie viel Stunden? 12 Jahre 5 Mon., wie viel Mon.?
18 Schck., wie viel Stück? 2 Jahre 148 Tg., wie viel Tage?

---

1 Meter	= 1000	Millimeter.	1 Kilogramm	= 1000	Gramm.
2 "	= 2000	"	2 "	= 2000	"
3 "	= 3000	"	3 "	= 3000	"
$4^{m}\,580^{mm}$	= 4580	"	5 Kgr 460 gr	= 5460	"
$9^{m}\,625^{mm}$	= 9625	"	8 " 595 "	= 8595	"

1000 Millim.	= 1 Meter	1000 Gramm	= 1 Kilogramm
2000 "	= 2 "	2000 "	= 2 "
3000 "	= 3 "	4000 "	= 4 "
3640 "	= $3^{m} + 640^{mm}$	4340 "	= 4 Kgr 340 gr
7480 "	= $7^{m} + 480^{mm}$	5070 "	= 5 Kgr 70 gr

B. Tafelrechnen.

§. 156. Verfahren.

Die Einsicht von dem Einrücken der Theilprodukte, welche sich ergeben, wenn man mit Zehnern, Hundertern, Tausendern 2c. multiplicirt, wird am leichtesten durch folgende Darstellung gewonnen.

T	H	Z	E
			3
		3	0
	3	0	0
3	0	0	0

In der ersten Stelle bedeutet die Ziffer 3 3 **Einer**. Setzen wir sie in die zweite Stelle (in die Zehnerstelle), so bedeutet sie dann 3 **Zehner**, also 10mal so viel als in der ersten. Setzen wir die 3 aus der ersten Stelle in die dritte Stelle, so bedeutet sie dann 3 **Hunderter**, also 100mal so viel als in der ersten u. s. w. — So auch noch mit andern Ziffern.

Eine Ziffer gilt, wenn sie eine Stelle nach links gerückt (ihr eine Null angehängt) **wird, 10mal so viel, wenn sie 2 Stellen nach links gerückt** (ihr 2mal 1 Null angehängt) **wird, 100mal so viel, wenn sie 3 Stellen nach links gerückt** (ihr 3mal 1 Null angehängt) **wird, 1000mal so viel als vorher.**

§. 157. Fortsetzung.

Der Lehrer diktirt Zahlen und läßt sie sogleich mit 10, 100 ꝛc. multipliciren. Schreibt 34! Multiplicirt mit 10! 34 × 10 = 340
895 mit 10! 895 × 10 = 8950
36 mit 100! 36 × 100 = 3600
2468 mit 100! 2468 × 100 = 246800
u. s. w.

Wie viel ist 23 × 456?

456		456
23	23×456=3×456+20×456.	23
1368	= 3×456 . . . . =	1368
9120	= 20 oder 10 × 2 × 456 . . =	912
10488	= 23×456 . . . . =	10488

Man multiplicirt die Zahl 456 zuerst durch 3; 3 × 456 = 1368. Dieß Ergebniß kommt genau darunter, 8 E. unter 3 E. Nun wird die Zahl 456 durch 20 multiplicirt. Man nimmt sie 2mal und das 2fache 10mal. Das 2fache wird 10mal genommen, indem man ihm eine Null beifügt oder es einfach um eine Stelle weiter gegen die Linke schreibt. 2 × 456 = 912, und 10 × 912 = 9120; 9210 + 1368 = 10488. Also ist 23 × 456 = 10488.

Aufg. 928 × 573 = ?

Die Aufgabe wird an die Wandtafel geschrieben. Da man die Faktoren verwechseln kann, so können wir 928 mit 573, oder 573 mit 928 multipliciren. Wir rechnen zuerst 573mal 928. 573 × 928 = (3 × 928) + (70 × 928) + (500 × 928).

Ausr.		
	928	
	× 573	
3 × 928 =	2784	Produkt der Einer
10 × 7 × 928 =	6496	„ „ Zehner
100 × 5 × 928 =	4640	„ „ Hunderter
573 × 928 =	531744	

Wie viel ist 3 × 928 ? 7 × 928 ? 70 × 928 ? 5 × 928 ? 500 × 928 ? Woher kommt die Zahl 2784? die Zahl 6496? Warum ist diese Zahl um eine Stelle eingerückt? Woher kommt die Zahl 4640? Warum ist dieselbe um 2 Stellen eingerückt?

Nun wird eben so auch 573 mit 928 multiplicirt und dieß zugleich als Probe angesehen.

Aufg. 704 × 7452 = ?

Die Zahl 7452 hat mehr geltende Ziffern als 704; daher setzen wir sie als Multiplikand.

Ausr.		
	7452	
	704	
4 × 7452 =	29808	Produkt der Einer.
100 × 7 × 7452 =	52164..	„ „ Hunderter.
704 × 7452 =	5246208	

Hier ist besonders darauf aufmerksam zu machen, daß die erste Ziffer des jedesmaligen Theilproduktes genau unter diejenige Ziffer des Multiplikators (hier unter 4 und unter 7) gesetzt werde, mit welcher man gerade multiplicirt.

Aufg. 53 × 50! 53 ×50 / 2650 — 50 mal 53 = 10 × 5 × 53. 5 × 53 = 265, 10 × 265 = 2650.

Man multiplicirt also mit 5 und nimmt das 5fache, indem man die Null herunterzieht, 10mal.

564 ×700 / 394800 — 7 × 564 = 3948, 100 × 3948 = 394800.

Wie viel ist 7 × 564? Das Wievielfache ist 3948 von 564? Das Wievielfache von 564 ist zu suchen? Wie oft ist das 7fache einer Zahl zu nehmen, um das 700fache derselben zu erhalten? Wie wird eine Zahl 100mal genommen?

Aufg. 45300 × 72000 = ?

Ausrechnung.

```
    4 5 3 0 0             Oder:    4 5 3 0 0
        7 2 0 0 0                    7 2 . . 0 0 0
  -----------------              -------------------
      9 0 6 0 0 . . .                  9 0 6
  3 1 7 1 0 0 . . . .              3 1 7 1
  -----------------              -------------------
  3 2 6 1 6 0 0 0 0 0              3 2 6 1 6 0 0 0 0 0
```

Erklärung zur zweiten Weise. 45300 = 453 H.; diese sind 72000 oder 1000 × 72mal zu nehmen. Man rechnet nun:

72 × 453 macht 32616.

72 × 453 H. ist 100mal so viel, also 100 × 32616; die Zahl 32616 ist daher 100mal so groß zu machen. Das geschieht, indem wir die zwei Nullen hinter 453 herunterziehen.

Die Zahl 45300 ist aber nicht mit 72, sondern mit 72000, d. i. mit 1000 × 72 zu multipliciren. Also ist das 72fache von 45300 noch 1000mal zu nehmen. Und das thun wir, indem wir auch noch die drei Nullen heruntersetzen, welche hinter 72 stehen.

§. 158. Beispiele mit Anwendung verschiedener Vortheile.

Daß Nachstehendes erst in späteren Jahren zur Kenntniß der Schüler und zur Uebung zu kommen hat, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

1) 4 3 × 1 1 / 4 3 / 4 7 3 — Nebenstehende Rechnung läßt ersehen, wie eine zweistellige Zahl mit 11 schnell multiplicirt wird. Man setzt die Quersumme in die Mitte.

11 × 43 ist (weil 3 + 4 = 7) = 473; 11 × 63 ist (da 3 + 6 = 9) = 693. Ist die Quersumme größer als 9, so setzt man nur die Einer in die Mitte und zählt den Zehner hinüber. 11 × 87 ist (7 + 8 = 15; 5 in die Mitte und 1 zu 8) = 957.

2) 7589 × 11 Kürzer: 7589 × 11
7589 83479
83479

9 unter 9; 9 + 8 = 17, 7 notirt, 1 zu 8 gezählt; 1 + 8 + 5 = 14, 4 notirt, 1 zu 5 gezählt; 1 + 5 + 7 = 13, 3 notirt, 1 zu 7 gezählt, 1 + 7 = 8. Man setzt also die Einer herunter, zählt sie dann zu den Zehnern, diese zu den Hundertern u. s. w.

3) 97586 × 41
390344
4001026

Der Multiplikand ist das Einfache, das darunter Befindliche das 40fache; beides zusammen ist das 41fache.

4) 7658 × 18
61264
137844

Hier steht oben das 10fache, darunter das 8fache; die Summe von beiden Produkten ist das 18fache.

5) 9874 × 24 (= 4 × 6)
39496 × 6
236976

4 × 9874 = 39496 und
6 × 39496 = 236976.

6) 4697 × 84
18788 = das 4fache von 4697;
37576 = das 4fache 2mal genommen und in die Zehnerstelle gesetzt.
394548

7) 5836 × 486
35016 = das 6fache von 5836;
280128 = das 6fache 8mal genommen u. in die Zehnerstelle gesetzt. (Nicht f. die Volksschule.)
2836296

8) Nachstehende Zahlen werden an die Wandtafel geschrieben und die Schüler aufgefordert, zu untersuchen, in welcher Ordnung dieselben mit einander zu multipliciren sind, um zuerst eine reine Zehner- oder Hunderterzahl zu erhalten.

4 × 7 × 25 (4 × 25 = 100 × 7 = 700.)
20 × 9 × 5 (20 × 5 = 100 × 9 = 900.)
42 × 50 × 4 × 2 (50 × 2 = 100 × 43 × 4.)
4 × 11 × 150 × 3 (4 × 150 = 600 × 3 × 11.)
18 × 13 × 5 × 7 (18 × 5 = 90 × 13 × 7.)

§. 159. Zusammengesetzte Aufgaben.

(48 × 6875) — (53 × 2345) = ?

Ausrechnung.

6875	2345
× 48	× 53
55000	7035
27500	11725
330000	124285
— 124285	
205715 Resultat.	

A verkauft 18 Hektoliter Wein à 375 ℳ, B 24 Hektoliter à 296 ℳ; wessen Erlös ist der größere und wie viel beträgt der Unterschied? (B erlöst 304 ℳ mehr als A.)

Aufg. z. Zifferr.

§. 160. Aufgaben mit benannten Decimalzahlen.

1) 0,56 ℳ	Keine Mark 56 Pfg. sind 8mal zu nehmen.
× 8	
4,48 ℳ	8 × 56 ₰ = 448 ₰ = 4 ℳ 48 ₰.
2) 0,84 ℳ	
× 23	Keine Mark 84 Pfg. sind 23mal zu nehmen.
252	Ich rechne 23mal 84.
168	23 × 84 = 1932; das sind Pfennige.
19,32 ℳ	1932 ₰ = 19 ℳ 32 ₰.
3) 2,46 ℳ	
× 32	2 ℳ 46 ₰ = 246 ₰.
492	Ich rechne 32 × 246.
738	
78,72 ℳ	32 × 246 ₰ = 7872 ₰ = 78 ℳ 72 ₰.

Man verfährt wie mit einfach benannten ganzen Zahlen und schneidet vom Produkte eben so viele Stellen rechts ab, als der Multiplikand (die benannte Zahl) nach dem Komma Stellen hat.

4) 54,65 ℳ × 6 = 327,90 ℳ 7) 8,76 Ctr. × 12 = 105,12 Ctr.
5) 13,7 ^{m} × 4 = 54,8 ^{m} 8) 7,95 Hl × 15 = 119,25 Hl
6) 9,55 ^{m} × 7 = 66,85 ^{m} 9) 3,485 Kgr × 6 = 20,910 Kgr

V.

Dividiren.

1. Der Divisor ist einstellig.

A. Kopfrechnen.

§. 161. Der Quotient enthält Zehner und Einer.

Die in der ersten Abtheilung (§. 127 ꝛc.) begonnene Division der Zahlen von 1 bis 1000 durch die Grundzahlen wird nun vollständig durchgeführt und zwar zunächst, theils wiederholend, theils ergänzend, die Division der Zahlen von 1 bis 200 durch 2, die der Zahlen von 1 bis 300 durch 3, der Zahlen von 1 bis 400 durch 4 u. s. w.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, daß der Schüler dahin gebracht werde, jede Zahl des ersten Hunderts durch jede Grundzahl mit Schlagfertigkeit zu theilen.

Die Sicherheit und Fertigkeit im Dividiren der höheren Zahlen beruht auf der Gewandtheit im Zerlegen derselben. Diese Gewandtheit wurde auf den früheren Stufen durch Einübung der Hauptzahlen zu erzielen gesucht, und das kann jetzt noch geschehen. Sie läßt sich aber auch durch Auf-

fassung der dreistelligen Zahlen als zweistellige Zehnerzahlen gewinnen. Fleißige Uebung zur Schärfung des Auges, sogleich die nächst kleinere ohne Rest theilbare reine Zehnerzahl heraus zu finden, ist überall die Hauptsache.

Einige berechnete Beispiele:

$^1/_4$ von 340!

a. Die nächste Hauptzahl von 4 unter 340 ist 320; $340 = 320 + 20$; $^1/_4$ von $320 = 80$, von $20 = 5$; $80 + 5 = 85$.

b. $340 = 34$ Z. $= 32$ Z. $+ 2$ Z.; $^1/_4$ von 32 Z. oder $320 = 80$, und $^1/_4$ von 2 Z. oder $20 = 5$; $80 + 5 = 85$.

$^1/_5$ von 475!

a. $475 = 450 + 25$; $^1/_5$ von $450 + 25 = 90 + 5 = 95$.

b. $475 = 47$ Z. $+ 5$ E. $= 45$ Z. $+ 25$ E.; $^1/_5$ von 45 Z. oder $450 = 90$, und $^1/_5$ von $25 = 5$; $90 + 5 = 95$.

$^1/_8$ von 715!

a. $715 = 640 + 75$; $^1/_8$ von $640 = 80$, von $75 = 9^3/_8$; $80 + 9^3/_8 = 89^3/_8$.

b. $715 = 71$ Z. $+ 5$ E. $= 64$ Z. $+ 7$ Z. 5 E. $(= 640 + 75)$ ꝛc.

§. 162. Der Quotient enthält Hunderter, Zehner und Einer.

$^1/_2$ von 547!

a. $547 = 400 + 147 = 400 + 140 + 7$; $^1/_2$ von $400 = 200$, von $140 = 70$; $200 + 70 = 270$; $^1/_2$ von $7 = 3^1/_2$; $270 + 3^1/_2 = 273^1/_2$.

b. $547 = 54$ Z. $+ 7$ E.; $^1/_2$ von 54 Z. $= 27$ Z. $= 270$, und $^1/_2$ von $7 = 3^1/_2$; $270 + 3^1/_2 = 273^1/_2$.

$^1/_3$ von 754!

a. $754 = 600 + 150 + 4$; $^1/_3$ hievon ist $200 + 50 + 1^1/_3 = 251^1/_3$.

b. $754 = 75$ Z. $+ 4$ E.; $^1/_3$ von 75 Z. $= 25$ Z. oder 250, und $^1/_3$ von $4 = 1^1/_3$; $250 + 1^1/_3 = 251^1/_3$.

$^1/_4$ von 673!	$^1/_6$ von 1000!
$673 = 400 + 273$	$1000 = 600 + 400$
$273 = 240 + 33$	$400 = 360 + 40$
$^1/_4$ von $400 = 100$	$^1/_6$ von $600 = 100$
$^1/_4$ von $240 = 60$	$^1/_6$ von $360 = 60$
$^1/_4$ von $33 = 8^1/_4$	$^1/_6$ von $40 = 6^4/_6$
$^1/_4$ von $673 = 168^1/_4$	$^1/_6$ von $1000 = 166^4/_6$

In dieser Weise werden einige Zahlen von jedem Hundert durch jede Grundzahl der Reihe nach getheilt.

$^3/_8$ von 1200! $1200 = 800 + 400$; $^1/_8$ von $800 = 100$, u. $^1/_8$ von $400 = 50$; $^1/_8$ von $1200 = 150$; $^3/_8$ von $1200 = 3 \times 150 = 450$.

Sucht eben so $^2/_3$ von 1440! $^3/_4$ von 1560! $^7/_9$ von 1620!

Wiederholt berechnet und möglichst eingeübt wird:

$^1/_2$ v. 1000 = 500	$^1/_5$ v. 1000 = 200	$^1/_8$ v. 1000 = 125	$^1/_{10}$ v. 1000
$^1/_4$ v. 1000 = 250	$^2/_5$ v. 1000 = 400	$^3/_8$ v. 1000 = 375	$^3/_{10}$ v. 1000
$^3/_4$ v. 1000 = 750	$^3/_5$ v. 1000 = 600	$^5/_8$ v. 1000 = 625	$^7/_{10}$ v. 1000
	$^4/_5$ v. 1000 = 800	$^7/_8$ v. 1000 = 875	$^9/_{10}$ v. 1000

Wie viel Gramm beträgt $^1/_2$ Kgr? $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_8$, $^1/_{10}$ Kgr?

Wie viel Gramm betragen $^3/_4$, $^3/_5$, $^5/_8$, $^7/_{10}$, $^4/_5$, $^3/_8$ ꝛc. Kgr?

§. 163. Der Quotient ist eine einfache Zahl höherer Ordnung.

a. Wie viel ist der halbe Theil von 40, 400, 4000, 40000? ꝛc.

Der halbe Theil von 4 = 2; der halbe Theil von 40 oder 4 Z. = 2 Z. oder 20; der halbe Theil von 4 H. = 2 H. ꝛc.

Wie viel beträgt:

$^1/_3$ von 60, 600, 6000, 60000, 600000, 6000000?
$^1/_4$ von 80, 800, 8000, 80000, 800000, 8000000?

b. Wie oft liegt 2 in 20, 200, 2000, 20000, 200000, 2000000?

2 ist in 2 E. 1mal, in 2 Z. 10mal so oft, also 10mal, in 2 H. 100mal so oft, also 100mal enthalten ꝛc.

Wie oft ist enthalten:

4 in 8, 80, 800, 8000, 80000, 800000, 8000000?
3 in 9, 90, 900, 9000, 90000, 900000, 9000000?

Aufg. z. Zifferr.

B. Tafelrechnen.

§. 164. Theilen.

$^1/_2$ von 6842!

```
2 | 6 8 4 2 | 3 4 2 1
  | 6 : : : |
  ----
    8 : :
    8 : :
    ----
      4 :
      4 :
      ----
        2
        2
        ----
```

Unsere Aufgabe ist, die Hälfte von 6 T. 8 H. 4 Z. und 2 E. zu suchen.

Die Hälfte von 6 T. = 3 T.; wir schreiben 3 T. hinter den Strich, aber nur die Ziffer 3; in die Stellen der H., Z. und E. setzen wir Punkte. Es sind nun getheilt 2 × 3 T. = 6 T.; wir setzen sie unter die T. des Dividenden und ziehen sie ab. Ein Rest von den T. bleibt nicht. Nun theilen wir eben so die H. Die Hälfte von 8 H. = 4 H. u. s. w.

$^4/_5$ von 2345!

```
5 | 2 3 4 5 | 4 6 9 × 4
  | 2 0 : : |  1 8 7 6
  ---------
      3 4 :
      3 0 :
      -----
        4 5
        4 5
```

2347 = 2 T. + 3 H. + 4 Z. + 5 E. Die Frage ist also: Wie viel betragen $^4/_5$ von 2 T. 3 H. 4 Z. und 5 E.? Zuerst suchen wir $^1/_5$ hievon.

$^1/_5$ von 2 T. ist nicht 1 T. Wir verwandeln daher die 2 T. in H.; 2 T. = 20 H.; 20 H. + 3 H. = 23 H.; $^1/_5$ von 23 H. = 4 H.; wir schreiben aber nur die Ziffer 4, in die Stellen der Zehner und Einer setzen wir Punkte. 4 H. sind $^1/_5$ von 5 × 4 H. oder 20 H.; 20 H. von 23 Z. bleiben 3 H. Von den 2 T. 3 H. 4 Z. und 5 E. sind nun 20 H. oder 2 T. getheilt. Zu theilen sind also noch 3 H. 4 Z. und 5 E.

$^1/_5$ von den 3 H. ist kein H. mehr. Wir machen sie daher zu Zehnern und nehmen die 4 Z. dazu herunter. 3 H. + 4 Z. = 34 Z.; $^1/_5$ von 34 Z. = 6 Z.; diese 6 Z. setzen wir hinter die 4 H. in die 2te Stelle. 6 Z. sind $^1/_5$ von 5 × 6 Z. oder 30 Z.; 30 Z. von 34 Z. bleiben 4 Z.

Nun haben wir noch $^1/_5$ von 4 Z. + 5 E. zu suchen. $^1/_5$ von 4 Z. ist kein Z. mehr. Daher machen wir sie zu E. und führen die 5 E. dazu herunter. 4 Z. + 5 E. = 45 E.; $^1/_5$ von 45 E. = 9 E.; diese 9 E. setzen wir hinter die 6 Z. in die erste Stelle. 9 E. sind $^1/_5$ von 5 × 9 oder 45 E.; 45 E. von 45 E. geht auf. Also ist $^1/_5$ von 2345 = 469; $^4/_5$ von 2345 betragen 4 × 469 = 1876.

$^1/_8$ von 286375!

```
8 | 2 8 6 3 7 5 | 3 5 7 9 6 7/8
  | 2 4 : : : : |
  -----------
      4 6 : : :
      4 0 : : :
      ---------
        6 3 : :
        5 6 : :
        -------
          7 7 :
          7 2 :
          -----
            5 5
            4 8
            ---
              7
```

Die Zahl, von welcher $^1/_8$ zu suchen ist, beträgt 2 HT. 8 ZT. 6 T. 3 H. 7 Z. und 5 E.

Der 8. Theil von 2 HT. ist nicht 1 HT.; wir verwandeln daher 2 HT. in ZT. und nehmen die 8 ZT. dazu; 2 HT. + 8 ZT. = 28 ZT.; der 8. Theil von 28 ZT. = 3 ZT.; die 3 ZT. setzen wir hinter den Strich, und da die ZT. in die 5. Stelle kommen, so bezeichnen wir die 4 übrigen Stellen durch 4 Punkte. 3 ZT. sind der 8. Theil von 8 × 3 oder 24 ZT.; Rest 4 ZT.; 4 ZT. + 6 T. = 46 T.

Der 8. Theil von 46 T. = 5 T. u. s. w. Bei Theilung der Einer bleiben 7 E. als Rest. Der 8. Theil von 7 = $^7/_8$. Also rc.

§. 165. Enthaltensein.

3479 : 5!

```
5 | 3 4 7 9 | 6 9 5 4/5
  | 3 0 : : |
    ---
    4 7 :
    4 5 :
      ---
      2 9
      2 5
        ---
          4
```

3479 = 3 T. + 4 H. + 7 Z. + 9 E. Wie oft ist 5 darin enthalten?

5 ist in 5 T. 1000mal, in 3 T. also nicht 1000mal enthalten. 3 T. = 30 H.; 30 H. + 4 H. = 34 H.; 5 liegt in 34 E. 6mal, in 34 H. also 600mal. Wir schreiben nur die Ziffer 6; für die 2 Nullen setzen wir zwei Punkte, einen in die Zehnerstelle und einen in die Einerstelle. 5 ist 600mal enthalten in 600 × 5; 6 × 5 = 30, 600 × 5 = 30 H.; 30 H. von 34 H. bleiben 4 H. Nun ist noch zu suchen, wie oft 5 in 4 H. 7 Z. und 9 E. enthalten ist.

4 H. = 40 Z.; 40 Z. + 7 Z., welche wir dazu heruntersetzen, = 47 Z.; 5 ist in 47 E. 9mal, in 47 Z. also 90mal enthalten. Wir schreiben nur die Ziffer 9 und zwar in die Zehnerstelle, hinter 6. 5 ist 90mal enthalten in 90 × 5; 9 × 5 = 45, 90 × 5 = 45 Z.; 45 Z. von 47 Z. bleiben 2 Z. Nun ist noch zu suchen, wie oft 5 in 2 Z. + 9 E. enthalten ist.

2 Z. = 20 E.; 20 E. + 9 E., welche wir dazu herunter ziehen, = 29 E.; 5 ist in 29 E. 5mal enthalten. Diese 5 setzen wir in die Einerstelle hinter 9; 5 ist 5mal enthalten in 5 × 5 oder 25; 25 von 29 bleibt 4.

5 ist in 1 $^1/_5$mal, in 4 also $^4/_5$mal enthalten.

5 ist in 3 T. 4 H. 7 Z. und 9 E. oder in 3479 695$^4/_5$mal enthalten.

83903 : 6!

```
6 | 8 3 9 0 3 | 1 3 9 8 3 5/6
  | 6 : : : : |
    ---
    2 3 : : :
    1 8 : : :
    ---
      5 9 : :
      5 4 : :
        ---
        5 0 :
        4 8 :
          ---
          2 3
          1 8
            ---
            5
```

Wie oft ist 6 in 8 ZT. 3 T. 9 H. und 3 E. enthalten?

6 liegt in 8 E. 1mal, in 8 ZT. 10000mal. Wie schreibt man 10000?

(Man setzt die Ziffer 1 in die 5. Stelle.) Wir schreiben also 1 hinter den Strich und bezeichnen die 4 Stellen für die T., H., Z. und E. durch Punkte. 6 ist 10.000mal in 10.000 × 6 enthalten; 1 × 6 = 6, 10.000 × 6 = 6 ZT.; 6 ZT. von 8 ZT. bleiben 2 ZT.; 2 ZT. + 3 T. = 23 T.

6 ist in 23 E. 3mal, in 23 T. also 3000mal enthalten; die Ziffer 3 kommt daher in die 4. Stelle, unmittelbar hinter die Ziffer 1; 6 ist 3000mal enthalten in 3000 × 6; 3 × 6 = 18, 3000 × 6 = 18000; 18 T. von 23 T. bleiben 5 T.; 5 T. + 9 H. = 59 H.

6 ist in 59 E. 9mal, in 59 H. 900mal enthalten u. s. w.

Besondere Aufmerksamkeit ist erforderlich, wenn der Divisor nicht in jedem Theildividenden enthalten ist. Z. B.

```
6 | 1 8 3 0 4 2 | 3 0 5 0 7   kurz:  6 | 1 8 3 0 4 2 |   3 0 5 0 7 × 5
  | 1 8 . . . . |   . . . .            | 1 8 . . . . | 1 8 3 0 4 2
      3 . . .                                3 0 . .
      0 . . .                                3 0 . .
      3 0 . .                                    4 2
      3 0 . .                                    4 2
        4 .
        0 .
        4 2
        4 2
```

Für diesen Fall ist es besonders gut, gleich anfangs zu bestimmen, wie viele Stellen der Quotient erhalten wird. Zuerst sieht man zu, wie viele Stellen des Dividenden genommen werden müssen, um die erste Stelle des Quotienten zu erhalten. So viele Ziffern dann vom Dividenden noch vorhanden sind, so viele Stellen erhält der Quotient noch zu der einen, die er schon hat, und dieß wird durch eben so viel Punkte angedeutet.

Nach unserer Rechnung ist 6 in 183042 30507mal enthalten. Ist dieß wirklich der Fall, so muß 30507 × 6 oder 6 × 30507 genau wieder 183042 geben. Dieß als Probe, die man regelmäßig anwenden läßt. Gibt die Division einen Rest, so ist derselbe dem Produkte zuzuzählen.

Aufg. z. Ifferr.

2. Der Divisor ist zwei- und mehrstellig.

A. Mündlich.

1. Enthaltensein.

§. 166. Der Divisor hat nur eine geltende Stelle.

2 × 3 Zehner! (2 × 3 Z. = 6 Z.) Wie oft sind 3 Z. zu nehmen, um 6 Z. zu erhalten? (2mal.) Wie oft sind daher 3 Z. in 6 Z. enthalten? (3 Z. sind in 6 Z. 2mal enthalten; denn 2 × 3 Z. = 6 Z.)

8 × 9 Zehner! Wie oft sind 9 Z. zu nehmen, um 72 Z. zu erhalten? Wie oft sind daher 9 Z. in 72 Z. enthalten?

Wie oft sind enthalten 4 Z. in 16 Z.? 7 Z. in 42 Z.? 5 Z. in 45 Z.? ꝛc.

Wie oft ist 20 in 120 enthalten? 20 = 2 Z., und 120 = 12 Z.; 2 Z. sind in 12 Z. (20 ist in 120) 6mal enthalten.

Wie oft ist enthalten

20 in 160, in 280? 40 in 240, 440? 60 in 540, 840? 80 in 320, 960?
30 in 150, in 390? 50 in 250, 600? 70 in 420, 910? 90 in 810, 990?

---

2 × 3 Hunderter! (2 × 3 H. = 6 H.) Wie oft sind 3 H. zu nehmen, um 6 H. zu erhalten? (2mal.) Wie oft sind daher 3 H. in 6 H. enthalten? — Wie oft 5 H. in 15 H.? 7 H. in 28 H.? 8 H. in 72 H.? ꝛc.

Wie oft ist 400 in 1200 enthalten? 400 = 4 H., u. 1200 = 12 H.; 4 H. sind in 12 H. 3mal enthalten; denn 3 × 400 = 1200.

Wie oft ist enthalten

200 in 1600? 400 in 3600? 600 in 2400? 800 in 6400?
300 in 2100? 500 in 2500? 700 in 4200? 900 in 2700?

---

2 × 3 Tausender! (2 × 3 T. = 6 T.) Wie oft sind 3 T. zu nehmen, um 6 T. zu erhalten? Wie oft sind daher 3 T. in 6 T. enthalten?

Wie oft ist enthalten

2000 in 16000? 4000 in 32000? 6000 in 48000? 8000 in 40000?
3000 in 21000? 5000 in 45000? 7000 in 63000? 9000 in 36000?

§. 167. Der Divisor hat mehr als eine geltende Stelle.

Das Verhältniß des Divisors zum Dividenden wird erkannt oder gefunden:

a. Durch unmittelbare Auffassung.

Wie oft ist enthalten 11 in 22, in 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110?
22 = 2 × 11, also ist 11 in 22 2mal enhalten; 33=3×11, also ꝛc.
Eben so wird gesucht, wie oft die übrigen Zahlen des zweiten Zehners, sowie die Zahlen 24 und 25 in ihren Zwei- bis Zehnfachen enthalten sind.

Wie oft liegt 110 in 220, in 330, in 440, 550, 660, 770 ꝛc.?
220 = 2 × 110, also ist 110 in 220 2mal; 330 = 3 × 110, also ist 110 in 330 3mal u. s. w. — Oder auch: 110 = 11 Z., und 220 = 22 Z.; 11 Z. sind in 22 Z. 2mal enthalten.

Eben so wird gesucht, wie oft enthalten ist

120 in 240, in 360; 150 in 450, in 750; 180 in 360, in 900.
130 in 260, in 390; 160 in 320, in 960; 250 in 500, in 750.

Wie oft liegt 1200 in 2400, in 3600, 4800, 6000, 7200?
2400 = 2 × 1200, also ist 1200 in 2400 2mal enhalten. Oder: 1200 = 12 H., u. 2400 = 24 H.; 12 H. sind in 24 H. (wie 12 in 24) 2mal.

Eben so wird gesucht, wie oft enthalten ist

1400 in 2800, in 4200, in 5600; 600 in 3200, 4800, 6400;
1500 in 4500, in 7500, in 9000; 2400 in 4800, 7200, 9600;

Nun kann man mit dem Tafelrechnen beginnen und das Kopfrechnen nebenher gehen lassen.

b. Durch Vergleichung der gleichnamigen Einheiten.

64 in 128 = ? (An die Wandtafel notirt.)

64 = 6 Z. + 4 E.; 128 = 12 Z. + 8 E. Die 6 Z. sind in den 12 Z., sowie die 4 E. in den 8 E. 2mal enthalten; 64 liegt in 128 2mal; denn 2 × 64 = 128.

203 in 609 = ? (An die Wandtafel notirt).

Die 2 H. sind in den 6 H. und die 3 E. in den 9 E. 3mal enthalten; 203 liegt in 609 3mal; 3 × 203 = 609.

Eben so werden folgende an die Wandtafel notirte Aufgaben besprochen:

71 in 639	52 in 208	340 in 680	321 in 963	1231 in 3693
21 in 147	74 in 148	111 in 777	224 in 896	1823 in 3646

c. Durch Vergrößerung des Dividenden.

48 in 475 = ?

475 + 5 = 480; 48 ist in 480 10mal, in 475 also nicht 10mal, sondern nur 9mal; 48 ist genau 9mal in 9 × 48 oder 432; 432 von 475 bleibt 43; also ist 48 in 475 9mal, und 43 bleibt Rest.

36 in 180 = ?

36 liegt in 360 10mal, in 180 oder $^1/_2$ × 360 nur $^1/_2$mal so oft, also nur 5mal.

d. Durch Verkleinerung oder Vergrößerung des Divisors.

21 in 150 = ?

Ich suche, wie oft 20 in 150 enthalten ist. 20 = 2 Z., und 150 = 15 Z.; 2 Z. in 15 Z. oder 2 in 15 = 7mal; 21 ist 7mal enthalten in 7 × 21 oder 147; 147 von 150 bleibt 3; 21 ist in 1 $^1/_{21}$mal, in 3 $^3/_{21}$mal, in 150 also $7^3/_{21}$mal enthalten.

19 in 140 = ?

Ich suche, wie oft 20 in 140 liegt. 2 Z. sind in 14 Z., wie 2 E. in 14 E., 7mal; 19 ist 7mal enthalten in 7 × 19 oder 133; 133 von 140 bleibt 7; 19 ist in 7 noch $^7/_{19}$mal. Also ist 19 in 140 $7^7/_{19}$mal enthalten.

e. Durch gleichmäßige Verkleinerung der beiden Zahlen.

Wie oft liegt 12 in 36? die Hälfte von 12 in der Hälfte von 36? $^1/_3$ von 12 in $^1/_3$ von 36? $^1/_4$ von 12 in $^1/_4$ von 36 rc. (12 liegt in 36 dreimal; die Hälfte von 12 oder 6 ist in der Hälfte von 36 oder 18 auch 3mal rc.) Andere Beispiele! So oft also eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft liegt auch irgend ein Theil der ersteren Zahl in dem gleichnamigen Theile der letzteren.

Das muß, wenn es praktischen Werth haben soll, bis zur Schlagfertigkeit geübt und später bei jeder Gelegenheit angewendet werden. — Wie oft liegt

24 in 120?	24 in 120	= 12 in 60	= 5mal; 5 × 24 = 120.	
32 in 200?	32 in 200	= 8 in 50	= 4 in 25 = $6^1/_4$.	($6^1/_4$ × 32!)
40 in 350?	40 in 350	= 4 in 35	= $8^3/_4$.	($8^3/_4$ × 40!)
120 in 1000?	120 in 1000	= 12 in 100	= 3 in 25 = $8^1/_3$.	($8^1/_3$ × 120!)

f. Durch gleichmäßige Vergrößerung der beiden Zahlen.

Wie oft liegt 2 in 12? wie oft 2×2 in 2×12? 3×2 in 3×12? 4×2 in 4×12? (2 in 12 ist 6mal; 2×2 oder **4** ist in 2×12 oder **24** wieder 6mal rc.) Andere Beispiele! So oft also eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft liegt auch irgend ein Vielfaches der ersteren Zahl in dem gleichen Vielfachen der anderen.

50 in 750 = 100 in 1500 = 15mal.
25 in 900 = 100 in 3600 = 36mal.

2. Theilen.

§. 168. Verfahren.

$^1/_{10}$ von 400! $^1/_{10}$ von 1 H. = 1 Z., $^1/_{10}$ von 4 H. = 4×1 Z. = 4 Z.; $^1/_{10}$ von 400 = 40. — Wie viel ist $^1/_{10}$ von 600, 900, 700 rc.?

$^1/_{10}$ von 560! $^1/_{10}$ von 500 = 50, und $^1/_6$ v. 60 = 6; 50 + 6 = 56; $^1/_{10}$ von 560 = 56. — Wie viel ist $^1/_{10}$ von 180, 240, 580 rc.?

$^1/_{10}$ von 365! $^1/_{10}$ von 300 = 30, von 65 = $6^5/_{10}$; 30 + $6^5/_{10}$ = $36^5/_{10}$; $^1/_{10}$ von 365 = $36^5/_{10}$. — Wie viel ist $^1/_{10}$ von 124, 381, 728 rc.?

$^1/_{10}$ von 8000! $^1/_{10}$ von 1 T. = 1 H., $^1/_{10}$ von 8 T. = 8 H. = 800; $^1/_{10}$ v. 8000 = 800. — Wie viel ist $^1/_{10}$ von 4000, 7000, 4200, 3500 rc.?

$^1/_{12}$ v. 360! 360 = 36 Z.; $^1/_{12}$ v. 36 Z. = 3 Z. = 30; $^1/_{12}$ v. 360 = 30. Wie viel ist $^1/_{12}$ v. 600, $^1/_{13}$ v. 520, $^1/_{15}$ v. 750, $^1/_{16}$ v. 960?

$^1/_{15}$ v. 800! 800 = 80 Z. = 75 Z. + 5 Z. oder 50; $^1/_{15}$ v. 75 Z. = 5 Z., u. $^1/_{15}$ von 50 oder 45 + 5 = $3^5/_{15}$; 5 Z. + $3^5/_{15}$ = $53^5/_{15}$.

$^1/_{16}$ v. 1000! 1000 = 100 Z. = 96 Z. + 4 Z. oder 40; $^1/_{16}$ von 96 Z. = 6 Z., und $^1/_{16}$ von 40 oder 32 + 8 = $2^8/_{16}$; 6 Z. + $2^8/_{16}$ = $62^8/_{16}$.

$^1/_{24}$ v. 150! Die höchste Zahl innerhalb des ersten Hunderts, von welcher ich den 24. Theil ohne Weiteres bestimmen kann, ist 96; 150 = 96 + 54; der 24. Theil von 96 = 4, und der 24. Theil von 54 oder 48 + 6 = $2^6/_{24}$; 4 + $2^6/_{24}$ = $6^6/_{24}$.

$^1/_{32}$ von 160! $^1/_{32}$ von 96 = 3, und $^1/_{32}$ von 4 + 60 oder 64 = 2; 3 + 2 = 5. Oder: $^1/_{32}$ von 320 = 10, von 160 also = 5. $^1/_{36}$ von 180! $^1/_{48}$ von 240! $^1/_{64}$ von 320! $^1/_{96}$ v. 480!

$^1/_{25}$ von 496! $^1/_{25}$ von 496 = $^1/_{25}$ von 500 — $^1/_{25}$ von 4; $^1/_{25}$ von 500 = 20; $^1/_{25}$ von 4 = $^4/_{25}$; 20 — $^4/_{25}$ = $19^{21}/_{25}$. (Für eine spätere Stufe.)

§. 169. Fortsetzung.

Zerlegung des Divisors in Faktoren.

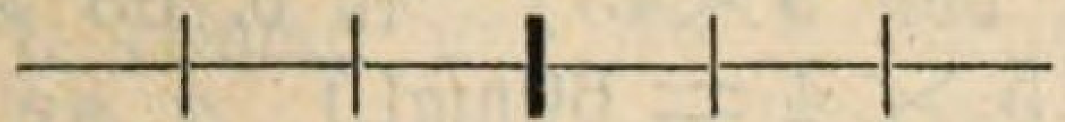
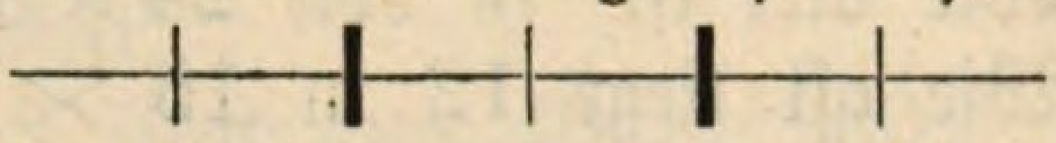
1) Wie theilt man einen Apfel, eine Linie in 4 gleiche Theile? (Man theilt das Ganze in 2 gleiche Theile und jeden derselben wieder in 2 gleiche Theile.)



Nun ist das Ganze in 2×2 oder in 4 gleiche Theile getheilt. Der wie vielte Theil vom Ganzen ist nun 1 Theil? Wie erhält man also

den 4. Theil von einem Ganzen? (Man sucht zuerst die Hälfte und von dieser wieder die Hälfte.) Sucht nun eben so den 4. Theil von 12, 30, 46, 70, 100!

2) Wie theilt man einen Apfel, eine Linie in 6 gleiche Theile?

a.  b. 

Man theilt das Ganze in 2 gleiche Theile und jeden Theil wieder in 3 gleiche Theile, oder man theilt das Ganze in 3 gleiche Theile und jeden Theil wieder in 2 gleiche Theile.

Nun ist das Ganze bei a in 2×3, bei b in 3×2 oder in 6 gleiche Theile getheilt. Der wie vielte Theil vom Ganzen ist hier 1 Theil? Wie erhält man also den 6. Theil von einem Ganzen? (Man sucht zuerst die Hälfte und dann von der Hälfte den 3. Theil, oder man sucht zuerst den 3. Theil und von diesem den halben Theil.)

Man zerlegt also 6 in 3×2 und theilt entweder zuerst durch 2 und dann durch 3, oder zuerst durch 3 und hernach durch 2.

3) Wie läßt sich der 6. Theil von 150 bestimmen?

a. Ich theile 150 sogleich durch 6 und rechne: $150 = 120 + 30$; $^1/_6$ von $120 = 20$, und $^1/_6$ von $30 = 5$; $20 + 5 = 25$.

b. Ich suche zuerst $^1/_2$ von 150 und von der Hälfte ein Drittel. $150 = 140 + 10$; die Hälfte von $140 + 10 = 70 + 5$ oder 75, und $^1/_3$ von $75 = 25$.

c. Ich suche zuerst $^1/_3$ von 150 und von diesem Drittel die Hälfte. $^1/_3$ von $150 = 50$, und die Hälfte von $50 = 25$.

Welche Ausrechnung ist die bequemste, und warum?

Daß auf dieser Stufe nur solche Zahlen als Dividenden zu nehmen seien, welche wenigstens durch einen der beiden Faktoren theilbar sind, und daß durch diesen Faktor auch immer zuerst zu theilen sei, versteht sich wohl von selbst.

$^1/_{12}$ von 150	$^1/_{18}$ v. 426	$^1/_{24}$ v. 300	$^1/_{30}$ v. 850
$^1/_{15}$ von 180	$^1/_{20}$ v. 540	$^1/_{25}$ v. 365	$^1/_{32}$ v. 680
$^1/_{16}$ von 300	$^1/_{21}$ v. 175	$^1/_{28}$ v. 630	$^1/_{45}$ v. 720

§. 170. Vermischte Aufgaben.

In welcher Zahl ist 400 8mal enthalten? (3200.)
Wie oft ist 120 zu nehmen, um 1080 zu bekommen? (9mal.)
Welche Zahl muß man 8mal nehmen, um 360 zu erhalten? (45.)
960 ist 80mal so groß als welche Zahl? (12.)
600 ist das Wievielfache von 25? (Das 24fache.)
Von welcher Zahl ist 480 das 16fache? (30.)
Welche Zahl ist in 384 48mal enthalten? (8.)
Wie vielmal kann 15 von 900 weggenommen werden? (60mal).

Zwei Zahlen geben, mit einander multiplicirt, 840; eine derselben heißt 7, wie die andere? (120.)

Wie viel beträgt $^1/_8$ der Summe von 416 und 176? (74.)
Wie viel ist zu 48 legen, um $^1/_4$ von 300 zu erhalten? (27.)

$^1/_3$ und $^1/_5$ von 195, wie viel? (104.)
Um wie viel ist $^1/_7$ von 336 kleiner als $^1/_6$ von 330? (7.)
Um wie viel ist $^1/_9$ von 324 größer als $^1/_{12}$ von 324? (9.)
Wie viel beträgt $^1/_8$ von 16×27? ($2 \times 27 = 54$.)
Wie viel ist $^1/_6$ von 24×32? $^1/_{15}$ von 9×45? $^1/_{18}$ v. 63×36?
Wie oft liegt 12 in 15×48? ($15 \times 4 = 60$mal.)

---

5 Arbeiter, unter welchen sich ein Vater mit 2 Söhnen befand, verdienten 175 ℳ.; wie viel davon erhielt der Vater für sich und seine Söhne? (Auf 1 Arbeiter kam der 5. Theil von 175 ℳ. = 35 ℳ.; der Vater und seine 2 Söhne bekamen mit einander 3 solche Theile, also 3×35 oder 105 ℳ.)

§. 171. Mehrfach benannte Zahlen.

a. Wiederholung.

Wie viel Meter sind:
20, 46, 63, 84, 125 dm?
300, 364, 475, 696 cm?
2000, 4800, 5720 mm?
Wie viel Kilogramm sind:
3000, 1200, 2480, 6732 Gr.?

Wie viel Mark machen:
400, 650, 964, 1000, 1285 ₰.?
Wie viel Hektoliter sind:
500, 870, 908, 1048, 1520 lt?
Wie viel Center machen:
200, 700, 325, 896 Pfd.?

Welche Theile von der Mark sind 50, 25, 75, 20, 80, 10, 70 ₰.?
Verwandelt in Pfennige: $^3/_4$ ℳ., $^7/_{10}$, $^4/_5$, $^{17}/_{20}$, $^{33}/_{100}$, $^{13}/_{25}$ ℳ.!
$^1/_2$ Kilogr. ($^1/_4$, $^3/_4$, $^1/_5$, $^3/_5$, $^1/_8$, $^5/_8$, $^1/_{10}$, $^7/_{10}$ Kilogr.), wie v. Gr.?

---

b. $^1/_4$ von 3 ℳ.? Der 4. Th. von $3 = {}^3/_4$, von 3 ℳ. = $^3/_4$ ℳ. = 75 ₰.
Oder: $^1/_4$ von 1 ℳ. = 25 ₰.; $^1/_4$ von 3 ℳ. = 3×25 ₰. = 75 ₰.
Oder: 3 ℳ. = 300 ₰.; $^1/_4$ von 300 ₰. = 75 ₰.
Sucht eben so $^1/_5$ von 2, 3, 4 ℳ.! $^1/_{10}$ von 3, 7, 9 ℳ.!

Was kostet 1 Kilogr., wenn 4 Kgr 3 (5, 10, 15) ℳ. kosten?
10 Meter Zeug kosten 8 (11, 16) ℳ.; was kostet 1 Mtr.?
20 Personen theilen unter sich 112 ℳ.; wie viel erhält jede?

B. Schriftlich.

§. 172. Verfahren.

3160 : 40!

```
40 | 3160 | 79 × 40
   | 280  | -------
   | ---  |  3160
   |  360
   |  360
   |  ---
```

3160 = 3 T. + 1 H. + 6 Z. + 0 E.
40 in 3 geht nicht 1mal, in 3 Tausendern also nicht 1000mal.
3 T. + 1 H. = 31 H.
40 in 31 geht nicht 1mal, in 31 Hundertern also nicht 100mal.
31 H. + 6 Z. = 316 Z.

40 in 316 geht. Aber wie oft? Ich suche, wie oft 4 Z. in 31 Z. enthalten sind. 4 Z. sind in 31 Z. so oft, als 4 in 31, nämlich 7mal; 7 × 40 = 280; 280 von 316 bleibt 36.

40 liegt in 316 E. 7mal, und 36 E. bleiben übrig; also ist 40 in 316 Z. 70mal, und 36 Z. bleiben im Rest.

36 Z. + 0 E. = 360 E. Wie oft liegt nun 40 in 360? So oft als 4 Z. in 36 Z. oder so oft als 4 in 36, nämlich 9mal; 9 × 40 = 360; 360 von 360 geht auf.

Also ist 40 in 3160 79mal enthalten. Ist aber 40 in 3160 wirklich 79mal enthalten, so muß 79 × 40 oder 40 × 79 wieder 3160 geben. Probe.

672 : 21!

```
2 1 | 6 7 2 | 3 2
    | 6 3   |
    ----
        4 2
        4 2
        ---
```

672 = 6 H. + 7 Z. + 2 E.

21 in 6 geht nicht 1mal, in 6 Hundertern also nicht 100mal.

6 H. + 7 Z. = 67 Z.

21 in 67 geht. Aber wie oft? Ich suche, wie oft die 2 Z. in den 6 Z. enthalten sind. 2 Z. sind in 6 Z. 3mal. Ist aber auch 21 in 67 3mal enthalten? Ja, wenn 3 × 21 von 67 weggenommen werden kann. 3 × 21 = 63; 63 von 67 bleibt 4. Es geht.

21 liegt in 67 E. 3mal, und 4 E. bleiben übrig; also ist 21 in 67 Z. 30mal, und 4 Z. bleiben im Rest.

4 Z. + 2 E. ist 42 E. Wie oft ist 21 darin enthalten? 42 = 2 × 21; also ist 21 in 42 E. 2mal enthalten; 2 × 21 = 42. Geht auf.

Mithin ist 21 in 672 32mal enthalten. Probe!

12852 : 36!

```
3 6 | 1 2 8 5 2 | 3 5 7
    | 1 0 8     |
    -----
      2 0 5
      1 8 0
      -----
        2 5 2
        2 5 2
        -----
```

12852 = 1 ZT. + 2 T. + 8 H. + 5 Z. + 2 E.

Da der Theiler eine 2stellige Zahl ist, so kann er in einer einstelligen nicht 1mal enthalten sein. Daher nehmen wir gleich die zwei ersten Stellen zusammen.

1 ZT. + 2 T. = 12 T.

36 in 12 geht nicht 1mal, in 12 Tausendern also nicht 1000mal.

12 T. + 8 H. = 128 H.

36 in 128 geht. Aber wie oft? Wie oft sind die 3 Z. in den 12 Z.? (4mal). Sind die 6 E. in den 8 E. auch 4mal? Nein! Also

geht's nicht 4mal. Wir nehmen es daher 3mal. 36 ist 3mal enthalten in 3 × 36; 3 × 36 = 108; 108 von 128 bleibt 20.

36 liegt in 128 E. 3mal, und 20 E. bleiben übrig; also ist 36 in 128 H. 300mal, und 20 H. bleiben.

20 H. + 5 Z. = 205 Z. Wir suchen zunächst, wie oft 36 in 205 E. enthalten ist.

Wie oft sind die 3 Z. in die 20 Z.? (6mal.) Kann 6 × 36 von 205 weggenommen werden? (6 × 36 = 216.) Nein! Also gehts nicht 6mal. Wahrscheinlich geht's 5mal. 36 ist 5mal enthalten in 5 × 36; 5 × 36 = 180; 180 von 205 bleibt 25.

36 liegt in 205 E. 5mal, und 25 E. bleiben übrig; also ist 36 in 205 Z. 50mal, und 25 Z. bleiben im Rest.

25 Z. + 2 E. = 252 E.; 3 Z. sind in 25 Z. 8mal; 36 ist 8mal enthalten in 8 × 36; 8 × 36 = 288. Also geht's nicht 8mal. Wahrscheinlich geht es 7mal. 7 × 36 = 252; 252 von 252 geht auf.

Die meiste Schwierigkeit hat es, mit Zahlen wie 19, 29, 39 ꝛc. dann 18, 28, 38 u. s. f. zu dividiren. Man kann sichs übrigens dadurch erleichtern, daß man beim Suchen der Theilquotienten für den gesetzten Theiler die nächst höhere reine Zehnerzahl sich denkt.

110177 : 19!

```
19 | 110177 | 5798
   |  95... |
   ------
      151
      133
      ----
       187
       171
       ----
        167
        152
        ----
         15
```

Anstatt 19 denke ich mir 20. So oft 20 in einer Zahl enthalten ist, so oft liegt jedenfalls auch 19 in derselben.

Um also zu finden, wie oft 19 in 110 enthalten ist, so suche ich, wie oft 20 darin liegt. 20 in 110 oder 2 Z. in 11 Z. oder 2 in 11 geht 5mal. Also ist auch 19 in 110 5mal enthalten. 19 liegt genau 5mal in 5 × 19 oder 95 u. s. w.

Hierbei kann höchstens vorkommen, daß der wirkliche Divisor 1mal öfter im Theildividenden enthalten ist, als der angenommene. Z. B.

```
28 | 198984 | 67
   | 168    |
   -----
      30
     196
     ---
       2
```

Anstatt 28 nehme ich 30; 30 in 198 oder 3 Z. in 19 Z. oder 3 in 19 liegt 6mal. 28 liegt 6mal in 6 × 28 oder 168; Rest 30. So viel darf nicht bleiben. 198 = 168 + 30; 28 ist in 168 6mal und

in 30 auch noch 1mal; also ist 28 in 168 + 30 oder in 198 6mal + 1mal oder 7mal enthalten. 7 × 28 = 196; Rest 2. Und so weiter.

5949120 : 654!

654	5949120	9096
	5886	
	6312	
	5886	
	4260	
	3924	
	336	

Der Divisor hat 3 Stellen; daher nehme ich auch 3 Stellen vom Dividenden.

5 Mill. + 9 HT. + 4 ZT. = 594 ZT.

654 in 594 geht nicht 1mal, in 594 ZT. also nicht 10000mal.

594 ZT. + 9 T. = 5949 T.

654 in 5949 geht. Aber wie oft? 6 H. in 59 H. oder 6 in 59 geht 9mal; 9 × 654 = 5886, Rest 63.

654 E. sind in 5949 E. 9mal, in 5949 T. also 9000mal, und 63 T. bleiben im Reste.

63 T. + 1 H. = 631 H.

654 in 631 geht nicht 1mal, in 631 H. also nicht 100mal. Ich setze daher an die Stelle der H. eine Null. (Warum muß dieß geschehen?)

631 H. + 2 Z. = 6312 Z.

654 in 6312 geht. Aber wie oft? 654 in 654 geht 1mal, in 654 Z. oder 6540 E. 10mal, in 6312 also nicht 10mal, sondern nur 9mal. 9 × 654 = 5886; Rest 426.

654 in 6312 E. ist 9mal, in 6312 Z. also 90mal, und 426 Z. bleiben im Rest.

426 Z. + 0 E. = 4260 E.

654 in 4260 geht. Die 6 H. sind in den 42 H. gerade 7mal; aber 54 ist in 60 nicht 7mal; daher geht es nur 6mal. 6 × 654 = 3924; Rest 336.

1324086 : 1950!

Ausrechnung.

1950	1324086	679 × 1950	
	11700		33950
	15408		6111.
	13650		679.36
	17586		1324086
	17550		
	36		

Der Divisor hat 4 Stellen; daher nehmen wir auch 4 vom Dividenden.

1 Mill. + 3 Ht. + 2 Zt. + 4 T. = 1324 T.

1950 in 1324 geht nicht 1mal.

1324 T. + 0 H. = 13240 H.
1950 in 13240 geht. Aber wie oft? Wie finde ich es? Ich denke mir statt 1950 die Zahl 2000; 2 T. sind in 13 T. 6mal; 6 × 1950 = 11700, Rest 1540.

1950 ist in 13240 E. 6mal, in 13240 H. also 600mal enthalten, und 1540 H. bleiben im Rest.

1540 H. + 8 Z. = 15408 Z.
Wie oft liegt 1950 in 15408? 2 T. sind in 15 T. 7mal; 7 × 1950 = 13650, Rest 1758.

1950 ist in 15408 E. 7mal, in 15408 Z. also 70mal, und 1758 Z. bleiben im Reste.

1758 Z. + 6 E. = 17586 E.
Wie oft liegt 1950 in 17586? 2 T. sind in 17 T. 8mal; 8 × 1950 = 15600, Rest 1986. In diesem Reste ist 1950 noch einmal enthalten. Es geht also 9mal. 9 × 1950 = 17550, Rest 36.

So wird in allen Fällen verfahren, wenn der Divisor einer reinen Hunderter- oder Tausenderzahl ziemlich nahe steht.

Aufg. 8 Ctr. einer Waare kosten 544 ℳ; wie viel kostet 1 Ctr.?

Aufl. Was sollen wir suchen? (Was 1 Ctr. kostet.) Was wissen wir? (Was 8 Ctr. kosten.) Wie viel kosten 8 Ctr.? (544 ℳ) Der wie vielte Theil ist 1 Ctr. von 8 Ctr.? Den wie vielten Theil von 544 ℳ wird also 1 Ctr. kosten? Man spricht daher: Wenn 8 Ctr. 544 ℳ kosten, so kostet 1 Ctr. den 8. Theil von 544 ℳ

Ausr. 544 = 480 + 64; $^1/_8$ v. 480 + 64 ℳ = 60 + 8 = 68 ℳ

Aufg. Wie viele Bücher lassen sich aus 1920 Bg. Papier machen, wenn zu jedem Buche 24 Bg. genommen werden?

Aufl. Nimmt man von den 1920 Bg. 24 Bg. weg, so gibt das 1 Buch; nimmt man nochmal 24 Bg. weg, so gibt das wieder 1 Buch u. s. f. So oft man also 24 Bg. von 1920 Bg. wegnehmen kann, so vielmal 1 Buch geben diese. Wie oft können nun aber 24 Bg. von 1920 Bg. weggenommen werden? Antwort: So oft, als 24 Bg. in 1920 Bg. enthalten sind. Ausr. 24 | 1920 | 80 × 1 Bch. = 80 Bücher.

§. 173. Der Divisor ist eine dekadische Zahl.

T	H	Z	E
1	0	0	0
	1	0	0
		1	0
			1

T	H	E	Z
2	0	0	0
	2	0	0
		2	0
			2

Katechetische Behandlung! Die Ziffer 1 bedeutet in der vierten Stelle 1 Tausender. Setzen wir sie in die dritte Stelle, wobei rechts eine Null wegfällt, so bedeutet sie dann 1 H., also den 10. Theil von 1 Tausender. Setzen wir die 1 von der vierten Stelle in die zweite, wobei rechts 2 Nullen wegfallen, so bedeutet sie dann 1 Zehner, also den 100. Theil von 1 Tausender. Und setzen wir die 1 von der vierten

Stelle in die e r s t e, wobei die 3 Nullen wegfallen, so bedeutet sie dann 1 Einer, also den 1000. Theil von 1 Tausender. — Eben so mit 2 und noch einigen Ziffern.

Eine Ziffer hat also, wenn sie e i n e Stelle nach rechts gerückt wird, nur den 10. Theil ihres vorigen Werthes; wird sie 2 Stellen nach rechts gerückt, so hat sie dann nur den 100. Theil ihres vorigen Werthes, u. s. w.

840 : 10!

10 | 840 | 84 840 : 10 = 84.

$^1/_{10}$ von 8 H. = 8 Z., und $^1/_{10}$ von 4 Z. = 4 E.; die Ziffer 8 rückt von der d r i t t e n Stelle in die z w e i t e, die Ziffer 4 von der z w e i t e n Stelle in die e r s t e. Aus den 8 H. werden 8 Z., aus den 4 Z. werden 8 E.; die Null fällt weg.

385 : 10!

H	Z	E	z
3	8	5	
	3	8	5

385 : 10 = 38,5

Der 10. Theil von 3 H. = 3 Z., die 3 kommt also von der Hunderterstelle in die Zehnerstelle; der 10. Theil 8 Z. = 8 E., die 8 kommt von der Zehnerstelle in die Einerstelle; der 10. Theil von 5 E. = $^5/_{10}$, die 5 kommt von der Einerstelle in die Zehntelstelle. Bei freistehender Zahl wird dieß bewirkt, wenn man rechts eine Stelle abschneidet.

Wie dividirt man also kurz und einfach eine Zahl durch 10?

7200 : 100!

100 | 7200 | 72 7200 : 100 = 72.

Der 100. Theil von 7 T. = 7 Z., und der 100. Theil von 2 H. = 2 E.; oder: der 100. Theil von 72 H. = 72 E. = 7 Z. + 2 E. Die Ziffer 7 rückt von der Tausenderstelle in die Zehnerstelle und die Ziffer 2 von der Hunderterstelle in die Einerstelle. Aus den 7 T. werden 7 Z., und aus den 2 H. werden 2 Einer. Die beiden Nullen fallen weg.

3675 : 100!

T	H	Z	E	z	h
3	6	7	5		
		3	6	7	5

3675 : 100 = 36,75

Der 100. Theil von 36 H. = 36 E. = 3 Z. + 6 E.; die 3 kommt also von der 4. Stelle in die 2te, und die 6 von der 3. Stelle in die erste.

Der 100. Theil von 75 Einer = 75 Hundertel; die Ziffern 7 und 5 rücken von der Zehner- und Einerstelle in die Zehntel- und Hundertelstelle.

Bei freistehender Zahl wird dieß Alles bewirkt, wenn man rechts 2 Stellen abschneidet. Wie dividirt man also kurz und einfach eine Zahl durch 100?

5928 : 1000!

T	H	Z	E	z	h	t
5	9	2	8			
			5	9	2	8

5928 : 1000 = 5,928

Der 1000. Theil von 5 T. = 5 E.; die 5 tritt von der 4. Stelle in die erste zurück, und so jede Ziffer um 3 Stellen. Wie dividirt man also eine Zahl durch 1000? wie durch 100? durch 10? Wie m u l t i p l i c i r t man eine Zahl mit 10? wie mit 100? mit 1000?

Schreibt	48! mult. mit 10!		48 × 10 = 480
	372 „ „ 100!		372 × 100 = 37200
	496 „ „ 1000!		496 × 1000 = 496000
	48 div. durch 10!		48 : 10 = 4,8
	372 „ „ 100!		372 : 100 = 3,72
	7530 „ „ 1000!		7530 : 1000 = 7,530
	940 mult. mit 10!		940 × 10 = 9400
	940 div. durch 10!		940 : 10 = 94

u. s. w.

Man bezeichnet den Schülern eine Partie mehrstelliger Zahlen in ihrem Rechenhefte und gibt ihnen auf, dieselben zuerst durch 10 abwechselnd zu multipliciren und zu dividiren, dann eben so durch 100, dann durch 1000.

§. 174. Der Quotient ist eine Decimalzahl.

```
    Z E   Z E
2 | 7 5 | 3 7 , 5
  | 6   |
  -----
    1 5
    1 4
    ---
     1,0
     1 0
    ----
```

Die Hälfte von 7 Z = 3 Z, Rest 1 Z; 1 Z + 5 E = 15 E; die Hälfte von 15 E = 7 E, Rest 1 E.

Den Einer verwandeln wir in Zehntel. 1 E = 10 z. Um das zu schreiben, so setzen wir hinter 1 ein Komma und dann eine Null. Das heißt: 1 E = 10 z.

Die Hälfte von 10 z = 5 z. Wenn die 5 5 z bedeuten soll, so muß ein Komma davor stehen. Wir setzen also auch oben ein Komma und dann die Ziffer 5.

Löschen wir die Ausrechnung weg und rechnen das Ganze nochmal! Die Hälfte von 7 Z = 3 Z, Rest 1 Z; 1 Z + 1 E = 15 E; die Hälfte von 15 E = 7 E, Rest 1 E; Komma! (hinter 1) Komma! (hinter 7); 1 E = 10 z; die Hälfte von 10 z = 5 z. Also ist die Hälfte von 75 = 37,5.

Man halte darauf, daß das Komma 2mal gesetzt und zugleich 2mal genannt werde.

391 : 2 = 195,5	1482 : 5 = 296,4	9518 : 12 = 876,5
839 : 2 = 419,5	3793 : 5 = 758,6	9714 : 15 = 647,5
1953 : 6 = 325,5	2409 : 5 = 481,8	8676 : 24 = 361,5

Mit den Dividenden der vorstehenden Rechnungen kann man die Benennung „Meter" verbinden. Dann heißt es: die Hälfte von 75 ᵐ = 37,5 ᵐ; ½ von 391 ᵐ = 195,5 ᵐ.

```
4 | 3 7 5 | 9 3 , 7 5
  | 3 6   |
  -------
    1 5
    1 2
    ----
     3,0
     2 8
     ----
       2 0
       2 0
       ---
```

Der 4. Theil von 37 Z = 9 Z, Rest 1 Z; 1 Z + 5 E = 15 E; der 4. Theil von 15 E = 3 E, Rest 3 E; Komma! Komma!

3 E = 3 × 10 oder 30 z; der 4. Theil von 30 z = 7 z, Rest 2 z; 1 ᵈᵐ = 10 ᶜᵐ; 1 z = 10 h, 2 z = 2 × 10 oder 20 h; der 4. Theil von 20 h = 5 h. Also ist der 4. Theil von 375 = 9 Z 3 E 7 z 5 h = 93 E + 75 h.

3279 : 4 = 819,75	7509 : 12 = 625,75	20895 : 28
3745 : 4 = 936,25	3956 : 16 = 247,25	71127 : 75
7634 : 8 = 954,25	7983 : 25 = 319,32	38945 : 125

Bei den vorstehenden Rechnungen kann man die Benennungen „Mark, Hektoliter, Centner“ anwenden. $^1/_4$ von 375 ℳ = 93,75 ℳ; $^1/_4$ von 3279 Hl = 819,75 Hl u. s. w.

```
8 | 3 7 5 | 4 6,8 7 5
  | 3 2   |
    5 5
    4 8
      7,0
      6 4
        6 0
        5 6
          4 0
          4 0
```

Der 8. Theil von 37 Z = 4 Z, Rest 5 Z; 5 Z + 5 E = 55 E; der 8. Theil von 55 E = 6 E, Rest 7 E; Komma! Komma!

7 E = 70 z; der 8. Theil von 70 z = 8 z, Rest 6 z; 6 z = 60 h; der 8. Theil von 60 h = 7 h, Rest 4 h; 4 cm = 40 mm; 4 h = 40 t; der 8. Theil von 40 t = 5 t. Also ist der 8. Theil von 375 = 46 E + 875 t.

Dann kurz:

Der 8. Theil von 37 = 4; 4 × 8 = 32, Rest 5;
Der 8. Theil von 55 = 6; 6 × 8 = 48, Rest 7; Komma! Komma!
Der 8. Theil von 70 = 8; 8 × 8 = 64, Rest 6 u. s. w.

4873 : 8 = 609,125	5746 : 16 = 359,125
6027 : 8 = 753,375	7951 : 40 = 196,775
1589 : 8 = 198,625	98537 : 125 = 788,296

Mit dem Dividenden dieser Aufgaben kann die Benennung „Meter“ oder „Kilogramm“ verbunden werden. Wie viel beträgt der 8. Theil von 4873 Meter? $^1/_8$ von 6027 Kilogramm?

```
9 | 6 8,8 5 ℳ | 7,6 5 ℳ
  | 6 3       |
    5,8
    5 4
      4 5
      4 5
```

Der 9. Theil von 68 E = 7 E, Rest 5 E; Komma! Komma! 5 E + 8 z = 58 z; der 9. Theil 58 z = 6 z, Rest 4 z; 4 z + 5 h = 45 h; der 9. Theil 45 h = 5 h.

$^1/_9$ von 68 ℳ 85 ₰ = 7 ℳ 65 ₰.

Hier werden natürlich nur solche Aufgaben gegeben, bei welchen der Divisor im Dividenden aufgeht.

§. 175. Abkürzungen.

```
a.      4 5 Ø Ø | 3 6 0 Ø Ø | 8
                  3 6 0
```

4500 ist in 36000 so oft enthalten, als der 100. Theil von 4500 in dem 100. Theil von 36000, d. i. so oft als 45 in 360. Oder: 4500 = 45 × 100; ich suche zuerst, indem ich von beiden Zahlen 2 Nullen

streiche, den 100. Theil von 36000, welcher 360 beträgt, und von diesem alsdann den 45. Theil.

$$\text{b.}\quad 7 \mid \overset{6}{3}\,\overset{2}{4}\,\overset{3}{5}\,\overset{1}{4}\,6 \mid 4\,9\,3\,5\ {}^1/_7$$

oder

$$\frac{3\,4\,5\,4\,6}{7} = 4\,9\,3\,5\ {}^1/_7$$

7 in 34 geht 4mal; (4 × 7 = 28) Rest 6.
7 in 65 geht 9mal; (9 × 7 = 63) Rest 2.
7 in 24 geht 3mal; (3 × 7 = 21) Rest 3.
7 in 36 geht 5mal; (5 × 7 = 35) Rest 1.
Das Eingeklammerte wird nicht notirt.

Auf mehrstellige Divisoren ausgedehnt, ist dieß Verfahren ungleich schwieriger und darum nicht mehr für die Volksschule, höchstens für einzelne sehr begabte und bereits geübte Schüler. In Präparandenschulen sollte dasselbe jedoch wegen seines bildenden Einflusses auf Denkkraft und Gedächtniß jedenfalls Anwendung finden. Darum folge hier ein Beispiel:

```
679 | 59616 | 87      Oder: 59616 : 679 = 87
       5296                 5296
        543                  543
```

679 in 5961 geht 8mal. Nun rechne ich 8 × 679 und ziehe der Reihe nach sogleich ab, nämlich so: 8 × 9 = 72, 2 von 11 ab, bleibt 9; 8 × 7 = 56, + 7 (aus dem ersten Produkte) = 63, 3 von 5 ab, bleibt 2; 8 × 6 = 48, + 6 (aus dem zweiten Produkte) = 54, 4 von 9 bleibt 5, und 5 von 5 geht auf. Rest 529.

Zu 529 kommt 6 herunter. 679 in 5296 geht 7mal; 7 × 9 = 63, 3 von 6 bleibt 3; 7 × 7 = 49, + 6 (aus dem ersten Produkte) = 55, 5 von 9 bleibt 4; 7 × 6 = 42, + 5 (aus dem zweiten Produkte) = 47, 7 von 12 bleibt 5, und 4 von 4 geht auf.

§. 176. Zusammengesetzte Aufgaben.

(7650 × 834) : (1364 + 875 — 439) =?

Berechnung.

```
    7650            1364
     834          +  875
    ----          ------
    3060            2239
   2295           —  439
  6120            ------
  -------           1800
  6380100
```

6380100 : 1800 = 3544,5.

Ein Weinhändler verkauft 14 Hektoliter Wein à 375 *M.*; von dem Erlöse bezahlt er drei Schuldposten, welche 1066 *M.*, 89 *M.* und 585 *M.* betragen. Für das übrige Geld kauft er wieder andern Wein, das Hektoliter zu 135 *M.* Wie viel Hektoliter wird er von dieser Sorte bekommen? (26 Hl).

§. 177. Die vier Rechnungsarten in gegenseitiger Beziehung.

(Für Präparanden.)

Das Addiren ist das Vermehren einer Zahl um eine andere, das Subtrahiren das Vermindern einer Zahl um eine andere. Beide Operationen stehen daher im Gegensatze zu einander. Eine hebt die andere auf. Und eben darum kann auch eine Operation als Probe dienen für die andere.

8 um 5 vermehrt, gibt 13; 13 um 5 vermindert, gibt wieder 8. So auch umgekehrt. 25 um 12 vermindert, gibt 13, und 13 um 12 vermehrt, gibt wieder 25.

Wie die Addition und die Subtraction, so verhalten sich die Multiplikation und die Division. Sie stehen im Gegensatze zu einander. Das Multipliciren ist ein wiederholtes Zusichlegen einer und derselben Zahl, also ein Vereinigen gleicher Zahlen. Das Dividiren ist ein wiederholtes Hinwegnehmen einer und derselben Zahl, also ein Zerlegen in gleiche Zahlen. Darum wird auch von diesen Operationen eine durch die andere aufgehoben. Die eine dient wieder zur Probe für die andere.

a.
```
  48 Faktor      Fakt. Prod.  Fakt.     Fakt. Prod.  Fakt.
  25   "           25 | 1200 | 48         48 | 1200 | 25
 ----                 | 100  |               |  96  |
 240                   ----                    ----
  96                    200                     240
-----                   200                     240
1200 Prod.              ---                     ---
```

48, 25mal genommen, gibt 1200; 1200 ist also das 25fache von 48. Zerlege ich das 25fache wieder in 25 gleiche Theile, d. i. dividire ich 1200 durch 25 im Sinne des Theilens, so muß sich wieder 48 ergeben.

48, 25mal genommen, gibt 1200; mithin muß 48 auch wieder 25mal von 1200 weggenommen werden können, d. i. 48 muß in 1200 25mal enthalten sein.

Wird also das Produkt zweier Zahlen durch eine von ihnen, d. i. durch den einen Faktor dividirt, so ergibt sich der andere.

b.
```
72 | 3456 | 48          72           48
   | 288  |             48           72
   -----               ----         ----
    576                576           96
    576               288           336
    ---               -----         -----
                      3456          3456
```

Dividire ich im Sinne des Enthaltenseins, so zeigt 48 an, wie oft 72 in 3456 enthalten ist; also muß 48 × 72 wieder 3456 machen.

Dividire ich im Sinne des Theilens, so ist 48 als $^1/_{72}$ von 3456 zu betrachten; also muß 72 × 48 wieder 3456 geben.

Multiplicirt man also Divisor und Quotient mit einander, so entspringt der Dividend.

§. 178. Fragen.

1) Was heißt addiren? 2) Wie nennt man die Zahlen, die addirt werden, und die Zahl, die sich dadurch ergibt? 3) Worin besteht die Probe

für die Addition? 4) Was heißt subtrahiren? 5) Welche Namen führen die drei Zahlen, welche bei einer Subtraction vorkommen? 6) Warum kann man den Rest auch Differenz nennen? 7) Worin besteht die Probe bei der Subtraktion? 8) Beantworte die Frage: „Was heißt multipliciren?“ auf dreifache Weise! 9) Welche vier Namen führen die drei Zahlen, welche bei einer Multiplikation vorkommen? 10) Worin besteht die Probe für die Multiplikation? 11) Was heißt dividiren? 12) In welchem Sinne kann man dividiren? 13) Wie nennt man die Zahlen, welche bei einer Division vorkommen? 14) Worin besteht die Probe bei der Division?

VI.

Zusätze zu diesem Cursus.

§. 179.

Das Folgende gehört der Theorie der Zahlenlehre an und dient zur Erweiterung und Vertiefung der Zahlenkenntniß. Schon aus diesem Grunde, aber auch der großen Vortheile wegen, welche sich aus demselben für das praktische Rechnen ergeben, sollte es in keiner Schule übergangen werden.

§. 180. Maße der Zahlen.

1 ist 1mal Eins; 2 ist 2×1; 3 ist 3×1; 11 ist 11×1; 43 ist 43×1; 157 ist 157×1. Jede Zahl ist ein Vielfaches von Eins. 1 ist daher auch in allen Zahlen ohne Rest enthalten; Eins ist das Maß aller Zahlen.

4 ist 4×1, aber auch 2×2. In 4 geht nicht nur 1, sondern auch 2 auf; 4 läßt sich also nicht nur durch 1, sondern auch durch 2 messen.

6 ist 6×1, aber auch 3×2. In 6 ist nicht nur 1, sondern auch 2 und auch 3 ohne Rest enthalten; 6 läßt sich daher außer durch 1, auch durch 2 und durch 3 messen.

7 läßt sich nur durch 1 messen. Warum? (Weil nur 1 in 7 ohne Rest enthalten ist.)

Wie steht es mit 8? $8 = 4 \times 2$, oder 2×4; in 8 ist 2 4mal, 4 2mal enthalten. 8 kann also durch 2 und durch 4 gemessen werden.

Wie steht's mit 9? mit 10? mit 11? Da $9 = 3 \times 3$, so hat 9 3 zum Maße, und da $10 = 5 \times 2$ oder 2×5, so läßt sich 10 durch 2 und durch 5 messen. $11 = 11 \times 1$; 11 kann durch keine andere Zahl als durch 1 gemessen werden.

Nennt Zahlen, welche sich nur durch 1, welche sich durch 2, durch 3, durch 4 ꝛc., durch 11, durch 12, durch 15 messen lassen!

Zahlen, welche sich nur durch 1 messen lassen, werden einfache Zahlen (Primzahlen) genannt. Hat eine Zahl außer der Eins noch ein anderes Maß, oder mehrere solche, so heißt sie eine zusammengesetzte Zahl.

Welches sind die einfachen (oder Prim-) Zahlen der einzelnen Zehner des ersten Hunderts? (1, 2, 3, 5, 7; 11, 13, 17, 19; 23, 29; 31, 37; 41, 43, 47; 53, 59; 61, 67; 71, 73, 79; 83, 89; 97.)

§. 181. Faktoren, Grund- und zusammengesetzte Faktoren.

6 ist eine zusammengesetzte Zahl. Sie entsteht aus 3 × 2 oder 2 × 3 und ist somit das Produkt aus 2 und 3. Darum wird 6 auch Produktzahl und jedes ihrer beiden Maße ein Faktor von ihr genannt. 2 und 3, die Maße von 6, sind also auch zugleich die Faktoren von 6. — Wie heißen die Faktoren von 8, 12, 18, 24, 30, 36, 48?

8 = 2 × 4. Der Faktor 2 ist eine einfache, der Faktor 4 selbst wieder eine aus 2 × 2 zusammengesetzte Zahl; daher wird 2 ein Grundfaktor, 4 ein zusammengesetzter Faktor genannt.

9 = 3 × 3; 3 ist ein Grundfaktor. 10 = 2 × 5; beide Faktoren sind Grundfaktoren.

12 = 2 × 6; 2 ist ein Grundfaktor, 6 ein aus 2 × 3 zusammengesetzter Faktor. 24 = 4 × 6; 24 hat also zwei zusammengesetzte Faktoren.

Jeder zusammengesetzte Faktor läßt sich in Grundfaktoren zerlegen. 8 = 2 × 4, und 4 = 2 × 2; also ist 8 = 2 × 2 × 2.

12 = 2 × 6, und 6 = 2 × 3; also ist 12 = 2 × 2 × 3. Die Grundfaktoren ordnet man nach ihrer Größe, den kleinsten voran.

Die Zahlen von 1 bis 100 werden nun in folgender Weise durchgearbeitet:

1 ist 1	11 einfache Zahl
2 einfache Zahl	12 = 2 × 6 = 2 × 2 × 3
3 „ „	13 einf. Z.
4 = 2 × 2	14 = 2 × 7
5 einfache Zahl	15 = 3 × 5
6 = 2 × 3	16 = 4 × 4 = 2 × 2 × 2 × 2
7 einfache Zahl	17 einf. Z.
8 = 2 × 4 = 2 × 2 × 2	18 = 2 × 9 = 2 × 3 × 3
9 = 3 × 3	19 einf. Z.
10 = 2 × 5	20 = 2 × 10 = 2 × 2 × 5

u. s. w.

100 = 4 × 25 = 2 × 2 × 5 × 5.

Es ist vortheilhaft, die gegebene Zahl zunächst in zwei zusammengesetzte und dann diese in einfache Faktoren zu zerlegen. 24 = 4 × 6 = 2 × 2 × 2 × 3; 72 = 8 × 9 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3. Auf diese Weise wird man auch mit größeren Zahlen leicht fertig. 120 = 10 × 12 = 2 × 5 × 2 × 2 × 3 = 2 × 2 × 2 × 3 × 5. Für die Schüler hat dieß noch ein besonderes Interesse. Sie sehen, daß, ob man z. B. 36 zunächst in 6 × 6, oder in 4 × 9 zerlegt, sich schließlich doch die nämlichen Grundfaktoren ergeben, daß also die verschiedenen Wege zu einem und demselben Ziele führen.

Das Zerlegen der Zahlen von 1 bis 100 in ihre Grundfaktoren wird von den Schülern, nachdem sie gehörig vorbereitet worden sind, zuerst selbstständig auf ihren Schiefertafeln ausgeführt, dann aber auch frei im Kopfe bis zur Schlagfertigkeit geübt. Hiebei übernimmt ein Schüler nach dem andern eine Zahl und findet ein stufenweiser Fortschritt vom Leichteren zum Schwierigeren statt.

a. Der Schüler nennt die Zahl, dann das Faktorenpaar und dann erst die Grundfaktoren. $8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2$.

b. Der Schüler nennt die Zahl und dann sogleich die Grundfaktoren. $8 = 2 \times 2 \times 2$; $12 = 2 \times 2 \times 3$.

Die Zahlen werden in der Reihe von 4 bis 100, dann abwärts von 100 bis 4 und dann außer der Reihe durchgenommen. Gestattet es die Zeit, so läßt man auch größere Zahlen zerlegen.

$150 = 10 \times 15 = 2 \times 5 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 5.$

$180 = 10 \times 18 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$

§. 182. Das größte gemeinschaftliche Maß gegebener Zahlen.

$10 = 2 \times 5$; $15 = 3 \times 5$; 5 ist ein Maß von 10 und zugleich ein Maß von 15; 5 ist also das gemeinschaftliche Maß, der gemeinschaftliche Faktor dieser Zahlen.

Wie heißt das gemeinschaftliche Maß von 4 und 6? von 6 und 9? von 15 und 20? von 14 und 21? von 22 und 33; von 26 und 39?

Welche Zahlen sind in 8 und in 12 ohne Rest enthalten? (2 und 4.) Wie viele gemeinschaftliche Maße haben also die Zahlen 8 und 12? Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von 8 und 12? (4.)

Wie heißt das größte gemeinschaftliche Maß von 12 und 16? von 12 und 18? von 16 und 18? von 16 und 20? von 16 und 24? von 16 und 28? u. s. w.

Wie findet man das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen, z. B. von 28 und 36?

$28 = 2 \times 2 \times 7$; $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$; die gemeinschaftlichen Grundfaktoren sind 2×2, das größte gemeinschaftliche Maß von 28 und 36 ist daher 2×2 oder 4.

Sind die Zahlen von 1 bis 100 in der im ersten Cursus bezeichneten Weise durchgearbeitet worden, so werden die Schüler das gemeinschaftliche Maß von zwei gegebenen Zahlen innerhalb jenes Zahlenraumes unmittelbar finden, um so mehr, als dieser Uebung die wiederholte Zerfällung der Produktzahlen voraus gegangen ist. Man stelle nur recht häufig irgend eine Produktzahl mit möglichst vielen andern Zahlen, z. B. 36 mit 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 39, 40, 42, 45 ꝛc. zusammen, so werden die Schüler mit sicherm Blick das größte gemeinschaftliche Maß alsbald herausfinden lernen.

Zur Auffindung der gemeinschaftlichen Maße dienen auch

§. 183. Die Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen.

a. Durch **10** sind alle Zahlen theilbar, welche am Ende eine Null haben, also alle reinen Zehnerzahlen, weil sie, wie z. B. 20, 30, 40, 170 Vielfache von 10 sind.

$10 = 2 \times 5$. Alle Zahlen, welche sich durch 10 theilen lassen, also alle reinen Zehnerzahlen, sind auch durch 2 und durch 5 theilbar. Nach-

weis! Welche Zahlen sich außerdem durch 2 und durch 5 messen lassen, kommt auf die Einer an.

b. Durch **5** lassen sich alle Zahlen theilen, welche am Ende eine 5 oder, wie wir schon wissen, eine Null haben.

c. Durch **2** ist jede Zahl theilbar, in deren Einerstelle entweder eine 0, oder eine der Ziffern 2, 4, 6, 8 steht.

d. Durch **100** lassen sich alle Zahlen theilen, welche 2 Nullen am Ende haben, z. B. 300, 900, 3400, 15700, also alle reinen Hunderter, weil sie Vielfache von 100 sind.

100 = 4 × 25. Jede Zahl, welche durch 100 theilbar ist, ist es auch durch 25 und durch 4. Bei den Zahlen, welche am Ende keine 2 Nullen haben, kommt es also lediglich auf die Einer und Zehner an, ob sie durch 25 oder durch 4 theilbar sind, oder nicht. Welche Zahlen werden nun durch 25 und welche durch 4 theilbar sein?

e. Durch **25** ist eine Zahl theilbar, wenn sie auf 00 oder auf 25, oder auf 50, oder auf 75 endigt, z. B. 700, 825, 1250, 3975.

f. Durch **4** ist eine Zahl theilbar, wenn sie auf 00 endigt, oder wenn ihre Einer und Zehner sich durch 4 theilen lassen, z. B. 7300, 7548, 236, 9308, 7860.

g. Durch **8** ist eine Zahl theilbar, wenn sie bloß aus Tausendern besteht, oder auch, wenn ihre 3 letzten Stellen sich durch 8 theilen lassen, z. B. 9000, 75000, 5648, 3064, 5408, 98320. (Grund!)

h. Durch **9** ist eine Zahl theilbar, in deren Quersumme 9 aufgeht. Z. B. 7542. Man betrachtet nämlich die 7 Tausender 5 H. und 4 Z. auch als Einer und zählt sie mit den Einern zusammen, als: 7 + 5 + 4 + 2 = 18; 18 ist durch 9 theilbar, also geht 9 auch in 7542 auf.

Grund: Theilt man mit 9, so bleibt von jedem Zehner (= 9 + 1), von jedem Hunderter (= 99 + 1), von jedem Tausender (= 999 + 1) 1 Einer als Rest.

7000 : 9 gibt als Rest 7 × 1 = 7 Einer.
500 : 9 „ „ „ 5 × 1 = 5 „
40 : 9 „ „ „ 4 × 1 = 4 „
Fügt man hiezu auch die schon vorhandenen 2 „ ; so ergibt sich, daß von 7542 die Summe aller Reste = 18 Einer ist.

In dem, was die Zahl 7542 mehr beträgt, als 18 Einer, geht 9 ohnehin auf. Ist nun 9 (wie hier) auch in der Summe aller Reste, als welche die Quersumme zu betrachten ist, ohne Rest enthalten, so ist die ganze Zahl durch 9 theilbar.

i. Durch **3** ist jede Zahl theilbar, deren Quersumme durch 3 theilbar ist, z. B. 87645.

8 + 7 + 6 + 4 + 5 = 30; 30 ist durch 3 theilbar, also auch die Zahl 87645. — Grund wie oben bei 9.

Wenn eine Zahl durch 9 oder 3 theilbar ist, so läßt sich dieß in vielen Fällen schon auf den ersten Blick erkennen. Bei 945, 8163, 7254,

8721, 6309 und dergleichen Zahlen springt die Theilbarkeit durch 9 und durch 3 sofort in die Augen.

k. Durch **6** ist jede Zahl theilbar, welche theilbar ist durch 2 und durch 3; durch **12** jede Zahl, welche theilbar ist durch 3 und durch 4; durch **15** jede Zahl, welche theilbar ist durch 3 und durch 5 2c. Die Gründe lassen sich leicht erkennen.

l. Durch **11** sind dreistellige Zahlen theilbar, wenn ihre mittlere Stelle als die Summe der beiden äußeren erscheint. (253; 297; 572.)

Der Grund wird erkannt, wenn man die Zahlen 23, 27, 52 durch 11 multiplicirt.

Als Regel für Zahlen von *jeder* Größe gilt:

Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Differenz zwischen der Quersumme der 1., 3., 5. 2c. Stelle und der Quersumme der 2., 4., 6. 2c. Stelle = 0 oder durch 11 theilbar ist. Z. B.

17369; 9 + 3 + 1 = **13**; 6 + 7 = **13**; Diff. = 0; durch 11 theilbar.
594924; 4 + 9 + 9 = **22**; 2 + 4 + 5 = **11**; Diff. = 11; deßgleichen.

Sind diese Regeln mit Ausnahme der letzten, welche nicht für die Volksschule ist, eingehend besprochen; so wird dann eine Reihe von Zahlen in Bezug auf ihre Theilbarkeit beurtheilt und dieß bis zur Erzielung des erforderlichen raschen Ueberblicks fortgesetzt.

Alle diese Regeln reichen nicht aus, wenn es gilt, das gemeinschaftliche Maß von zwei größeren Zahlen in jedem Falle mit Sicherheit zu finden, oder zu bestimmen, daß ein solches Maß außer 1 gar nicht vorhanden ist. Das Eine wie das Andere ergibt sich durch das nachstehende Verfahren, von welchem jedoch in den wenigsten Volksschulen wird Gebrauch zu machen sein. In diesen bleibt es daher, wenigstens vorläufig, außer Acht.

§. 184. In allen Fällen das größte gemeinschaftliche Maß zu finden.

Aufg. Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von 111 u. 407?

Verfahren: Man theilt mit der kleineren Zahl in die größere. Geht es auf, so ist die kleinere Zahl selbst das gesuchte Maß. Bleibt ein Rest, so theilt man mit demselben in den vorigen Divisor. Geht es auf, so ist der als Theiler gebrauchte Rest das gemeinschaftliche Maß. Bleibt aber wieder ein Rest, so theilt man mit diesem Reste wieder in den vorigen Theiler und so fort. Der letzte Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß. Ist der letzte Rest 1, so sind die beiden Zahlen *ohne* gemeinschaftliches Maß. Ausführung:

```
111 | 407 | 3
      333
      ---------
       74 | 111 | 1
             74
            ---------
             37 | 74 | 2
                  74
                  --
```

Dieß Verfahren beruht zunächst auf den zwei Sätzen:

1) Wenn eine Zahl in zwei einzelnen Zahlen ohne Rest enthalten ist, so geht sie auch in deren Summe auf.

37 geht in sich selbst und in 74 auf; also ist 37 auch in der Summe von 37 und 74, d. i. in 111 ohne Rest enthalten. 37 liegt in 111 genau so oft, als in 37 und in 74 zusammen genommen.

2) Wenn eine Zahl in einer andern aufgeht; so geht sie auch in jedem Vielfachen derselben auf.

37 geht auf in 111; also liegt 37 auch in 3mal 111, d. i. in 333 ohne Rest. 37 liegt in 333 gerade 3mal so oft, als in 111.

Wir haben bereits gefunden, daß 37 in 74 und in 333 ohne Rest enthalten ist; mithin geht 37 (nach dem ersten Satze) auch in der Summe von 74 und 333, d. i. in 407 auf.

37 ist also sowohl in 111 als in 407 ohne Rest enthalten und somit das gemeinschaftliche Maß beider Zahlen. 111 : 37 = 3, und 407 : 37 = 11.

Dritter Cursus.

Die Rechnungsarten mit einfach benannten Decimalzahlen und mehrfach benannten Zahlen.

Als Einleitung:

Die Arten der Zahlen und das Wichtigste aus der Münz-, Maß- und Gewichtsordnung.

---

§. 185. Die Benennung der Zahlen.

Betrachte ich die Zahl bloß als eine bestimmte Menge von Eins, so ist sie eine reine oder unbenannte Zahl, wie z. B. 4, 15, 24. Wird sie als eine bestimmte Menge gewisser Gegenstände aufgefaßt, wobei mit der Zahl Namen von Dingen verbunden werden, so heißt sie eine benannte Zahl. Solche benannte Zahlen sind 4 Mark, 15 Meter, 24 Ctr.

Die benannten Zahlen sind entweder einfach oder mehrfach benannt. Eine einfach benannte Zahl ist die Zahl 4 Mark; mehrfach benannte Zahlen sind 4 Mark 75 ₰., 3 Meter 45 Centim. 8 Millimeter.

Haben zwei oder mehrere benannte Zahlen gleiche Benennung, wie 4 Mark und 15 Mark, oder wie 48 Pfg., 36 Pfg. und 24 Pfg.; so sind es gleich benannte oder gleichnamige Zahlen. Im entgegengesetzten Falle sind es ungleich benannte oder ungleichnamige Zahlen, wie z. B. 4 Mark und 15 Pfund, oder auch wie 48 Pfg. und 4 Mark.

Zwei ungleich benannte Zahlen bezeichnen entweder Dinge gleicher Art, oder Dinge verschiedener Art. Dinge gleicher Art bezeichnen die Zahlen 48 Pfg. und 4 Mark, Dinge verschiedener Art die Zahlen 4 Mark und 5 Ctr. Ungleich benannte Zahlen, welche Dinge von einer und derselben Art bezeichnen, wie 48 Pfg. und 4 Mark, oder wie 75 Pfd. und 5 Ctr., können in gleichbenannte verwandelt werden. 48 Pfg. und 4 Mark = 48 Pfg. und 400 Pfg.; 75 Pfd. und 5 Ctr. = 75 Pfd.

und 500 Pfd. Eben so kann man auch zwei- oder mehrfach benannte Zahlen in einfach benannte verwandeln. 4 Mark 48 Pfg. = 448 Pfg., 5 Ctr. 75 Pfd. = 575 Pfd.

Ziffern, deren Werthe decimale Theile der Einerwerthe sind, wie z. B. 0,45, nennt man Decimalen. Sind Zahlen aus Ganzen und Decimalen gebildet, wie 3,45, so heißen sie Deimalzahlen. 6,95 ist eine unbenante, 6,95 ℳ eine benannte Decimalzahl.

Das Verwandeln der höheren Münz-, Maß- und Gewichtsforten in die niederen, der Mark in Pfennige, der Centner in Pfunde rc., heißt Auflösen oder Resolviren. Das Gegentheil hievon, das Verwandeln der niederen Sorten in die höheren, der Pfennige in Mark, der Gramme in Dekagramme, der Dekagramme in Kilogramme rc. heißt Zurückführen oder Reduciren.

Das Eine wie das Andere kommt bei dem Rechnen mit benannten Zahlen häufig vor. Es ist daher auch Beides besonders zu behandeln und gehörig zu üben.

Bevor wir jedoch dazu übergehen, wollen wir über die im deutschen Reiche und also auch im Königreiche Bayern gesetzlich eingeführte neue Münz-, Maß- und Gewichtsordnung das Nothwendige mittheilen, dem Lehrer es überlassend, in seiner Schule hievon anzuwenden, was er für angemessen erachtet.

§. 186. Die neue Münzordnung.

Durch die Münzgesetze von 1871 und 1873 wurden im deutschen Reiche für den Thaler und den Gulden die Mark im Werthe zu $1/3$ Thaler oder 35 Kreuzer, eingetheilt in 100 Pfennige, als Münzeinheit und folgende Gold-, Silber-, Nickel- und Kupfermünzen als Vielfache und als Theile derselben eingeführt:

1) als Goldmünzen:	Fünfmarkstücke	=	5 ℳ	
	Zehnmarkstücke	=	10 ℳ	(Krone).
	Zwanzigmarkstücke	=	20 ℳ	(Doppelkrone).
2) als Silbermünzen:	Fünfmarkstücke	=	5 ℳ	
	Zweimarkstücke	=	2 ℳ	
	Einmarkstücke	=	1 ℳ	
	Einhalbmarkstücke	=	0,50 ℳ	
	20-Pfennigstücke	=	0,20 ℳ	
3) als Nickelmünzen:	10-Pfennigstücke	=	0,10 ℳ	
	5-Pfennigstücke	=	0,05 ℳ	
4) als Kupfermünzen:	2-Pfennigstücke	=	0,02 ℳ	
	1-Pfennigstücke	=	0,01 ℳ	

§. 187. Die neue Maß- und Gewichtsordnung im Allgemeinen.

Die neue Maß- und Gewichtsordnung schließt sich an das Maß- und Gewichtssystem an, welches im letzten Decennium des vorigen Jahrhunderts

in Frankreich und seitdem mehr oder weniger vollständig in vielen anderen, in der jüngsten Zeit auch in allen deutschen Staaten eingeführt worden ist.

Dem ganzen System liegt ein Längenmaß, Meter genannt, zu Grunde.

Um zu begreifen, wie dieses Maß bestimmt worden ist, so nehmen wir einen Globus zur Hand, suchen den Meridian von Paris und bezeichnen den Viertelkreis oder Quadranten vom Aequator bis zum Pol. Durch die Parallel- oder Breitenkreise ist dieser Viertelskreis in 90 gleiche Theile (Grade) getheilt. Von diesen 90 Theilen haben französische Gelehrte eine Anzahl, nämlich das Stück des Meridianbogens von Barcelona bis Dünkirchen, möglichst genau gemessen und hiernach den ganzen Quadranten vom Aequator bis zum Pol auf 5130740 Toisen à 6 pariser Fuß berechnet.

Der zehnmillionte Theil dieser Länge wurde nun als Längenmaß bestimmt und Meter, d. i. Maß genannt.

Das Meter, von der Größe der Erde hergeleitet, sollte das Ur- und Grundmaß für die Maße und Gewichte aller Völker der Erde werden.

Seine große Bedeutung hat das Meter aber nicht sowohl von seiner Herleitung, als vielmehr davon, daß sich seine Eintheilung genau an das Zahlensystem anschließt, und daß es für das ganze Maß- und Gewichtssystem die einheitliche, gemeinschaftliche Basis bildet.

Die größeren Längenmaße sind nur 10fache, 100fache, 1000fache, die kleineren nur 10tel, 100tel, 1000tel des Meters.

Aus dem Längenmaße Meter geht das Quadrat-Meter mit seinem 100- und 10 000-fachen, sowie mit seinen 100teln und 10 000teln als Flächenmaß und eben so das Kubikmeter mit seiner decimalen Eintheilung als Körpermaß hervor. Ein bestimmter decimaler Theil von dem Kubikmeter bildet wieder die Einheit für die Hohlmaße und für das Gewicht.

Auch die einen integrirenden Theil des Systems bildende Bezeichnung ist wohl durchdacht.

Die Vielfachen und die Theile von der Einheit werden durch Vorsilben ausgedrückt — die Vielfachen durch Vorsilben aus der griechischen Sprache, die Theile durch Vorsilben aus der lateinischen Sprache.

Die aus dem Griechischen entnommenen Vorsilben sind

deka = 10 (das 10fache),
hekto = 100 (das 100fache),
kilo = 1000 (das 1000fache).

Aus dem Lateinischen entnommene Vorsilben sind:

deci = 10 (Zehntel),
centi = 100 (Hundertel),
milli = 1000 (Tausendtel).

Neben einander gestellt:

kilo	hekto	deka		deci	centi	milli
1000	100	10	1	10tel	100tel	1000tel.

§. 188. Die Längenmaße.

Das ursprünglich festgestellte französische System der Längenmaße ist:

1 Myriameter		=	10000	Meter.
1 **Kilometer**	(km)	=	1000	"
1 Hektometer		=	100	"
1 **Dekameter**		=	10	"
1 **Meter**	(m)	=	1	"
1 Decimeter	(dm)	=	0,1	"
1 **Centimeter**	(cm)	=	0,01	"
1 **Millimeter**	(mm)	=	0,001	"

Die mit fetter Schrift gedruckten Maße sind in das ursprünglich nur in dem norddeutschen Bunde, nun aber im ganzen deutschen Reiche giltige Gesetz aufgenommen. In diesem Gesetze erhalten die Maße auch deutsche Namen. Dekameter = Kette, Meter = Stab, Centimeter = Neuzoll, Millimeter = Strich.

Im gewöhnlichen Leben wird man sich nur des Meters und seiner Unterabtheilungen und von diesen hauptsächlich des Centimeters bedienen. Die Kilometer dienen zur Bezeichnung der Weglänge. Der Lehrer soll Kenntniß vom ganzen System haben. Die Volksschule hält sich an das in der Praxis Nothwendige. Es bleibt also zur unterrichtlichen Behandlung vorläufig nur:

1 m (= 10 dm) = 100 cm = 1000 mm
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 cm = 10 mm
1 Meile = 7500 Meter = 7,5 Kilometer.

§. 189. Die Flächenmaße.

Die Einheit für das Flächenmaß ist das Quadratmeter oder der Quadratstab. Es ist dieß, wie der Name sagt, ein Quadrat, von welchem jede Seite ein Meter beträgt.

Die Vielfachen und Unterabtheilungen sind:

1 Kilar oder □Kilometer	(qkm)	1000000	Quadratmeter.
1 **Hektar** oder □Hektometer	(ha)	10000	"
1 **Ar** oder □Dekameter	(a)	100	"
1 □**Meter** oder □Stab	(qm)	1	"
1 □Decimeter	(qdm)	0,01	"
1 □Centimeter oder □Neuzoll	(qcm)	0,0001	"
1 □Millimeter oder □Strich	(qmm)	0,000001	"

Das Ar ist ein Quadrat, welches 10 Meter lang und 10 Meter breit ist; das Hektar ist ein Quadrat von 100 Meter Länge und Breite; das Kilar ist ein Quadrat und hat 1000 Meter in der Länge und in der Breite.

Das Hektar und das Ar sind Feldmaße. Das Hektar tritt an die Stelle des Tagwerks, das Ar an die Stelle des Decimals. Das Verhältniß zwischen Hektar und Ar ist dasselbe, wie das zwischen Tagwerk und

Decimal. So wie 1 Tagwerk = 100 Decimalen, so ist 1 Hektar = 100 Ar. Der Größe nach besteht jedoch zwischen dem bisherigen und dem neuen Feldmaße ein bedeutender Unterschied.

Nahezu sind 34	□Meter	=	1 bayr.	Decimal.
34	Ar	=	1 „	Tagwerk.
34	Hektar	=	100 „	Tagwerk.

Die eigentliche Flächen- (und Körper-) Berechnung tritt bei uns zwar erst auf einer späteren Unterrichtsstufe ein; da aber mit dem Quadratmeter die Körpermaße und das Gewicht im engsten Zusammenhang stehen, so müssen wir dasselbe schon jetzt zur Anschauung bringen.

Wir zeichnen an die Wandtafel, oder auf die Rückseite einer Landkarte, oder an die Wand selbst ein Quadratmeter, theilen jede Seite in 10 gleiche Theile (in Decimeter) und verbinden je zwei Punkte der einander gegenüberliegenden Seiten durch eine gerade Linie. Hierdurch wird das ganze Quadrat schachbrettartig in 10 × 10 oder 100 Felder, d. i. in 100 Quadratdecimeter getheilt, deren jedes so groß ist, wie die übenstehende Figur.

Das □Decimeter wird wieder, wie die Figur zeigt, in 10 × 10 oder 100 Quadrate getheilt, welche □Centimeter heißen. Und eben so wird das □Centimeter wieder in 10 × 10 oder 100 □Millimeter getheilt.

§. 190. Die Körper- und Hohlmaße.

Die Grundlage für diese Maße ist das Kubikmeter oder der Kubikstab. Das ist ein Würfel, von dessen 12 Kanten jede ein Meter und von dessen 6 Flächen jede ein Quadratmeter ist.

Die Vielfachen und Unterabtheilungen der Körpermaße sind:

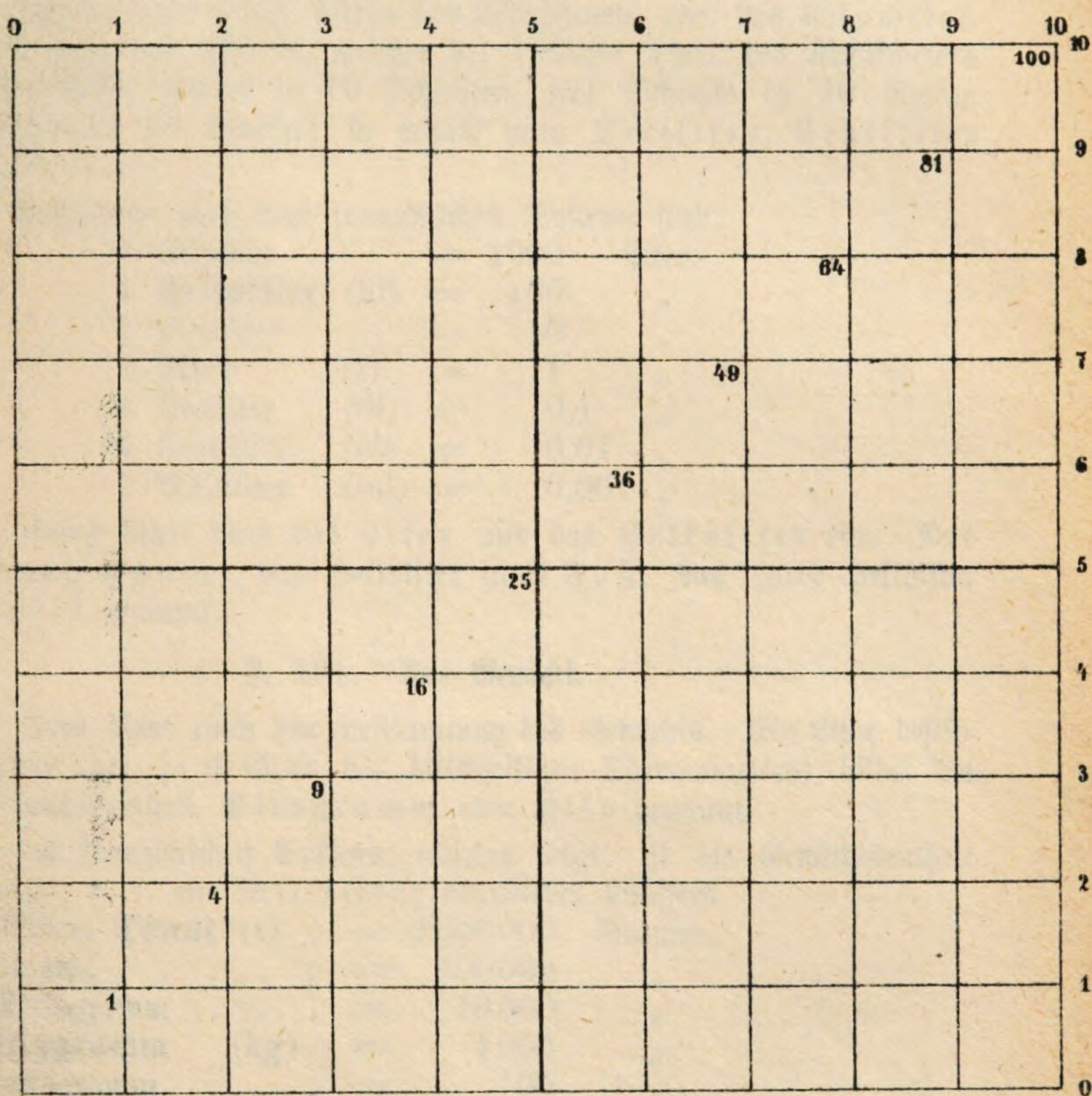
1 Kubikkilometer		=	1000000000	Kubikmeter.
1 Kubikhektometer		=	1000000	„
1 Kubikdekameter		=	1000	„
1 Kubikmeter	(cbm)	=	1	„
1 Kubikdecimeter	(cdm)	=	0,001	Kubikmeter
1 Kubikcentimeter	(ccm)	=	0,000001	„
1 Kubikmillimeter	(cmm)	=	0,000000001	„

Das Kubikkilometer ist ein Kubus oder Würfel, welcher ein Kilometer lang, breit und hoch ist; das Kubikhektometer ist ein Kubus oder Würfel, welcher ein Hektometer lang, breit und hoch ist, u. s. w.

Um einen Begriff von den Hohlmaßen zu erhalten, so machen wir uns ein Kubikdecimeter. Wir zeichnen auf Pappdeckel ein Quadratdecimeter, genau so groß, wie das ganze nebenstehende Quadrat, und setzen an jede der 4 Seiten ein neues an. Die entstehende kreuzförmige Fläche schneiden wir aus, schneiden die Seiten des mittleren Quadrats bis zur halben Dicke durch, drehen das Ganze herum, richten die seitlichen Quadrate senkrecht auf und leimen sie zusammen. So erhalten wir ein Kubikdecimeter, das an einer Seite offen ist. Und das ist die Einheit der Körper- und Hohl-

a.

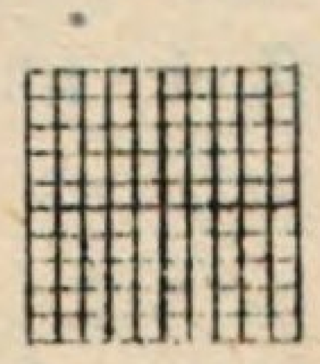
Das □ Dezimeter und seine Eintheilung:



Ein □ Dezimeter = 10 × 10 oder 100 □ Centimeter.

b.

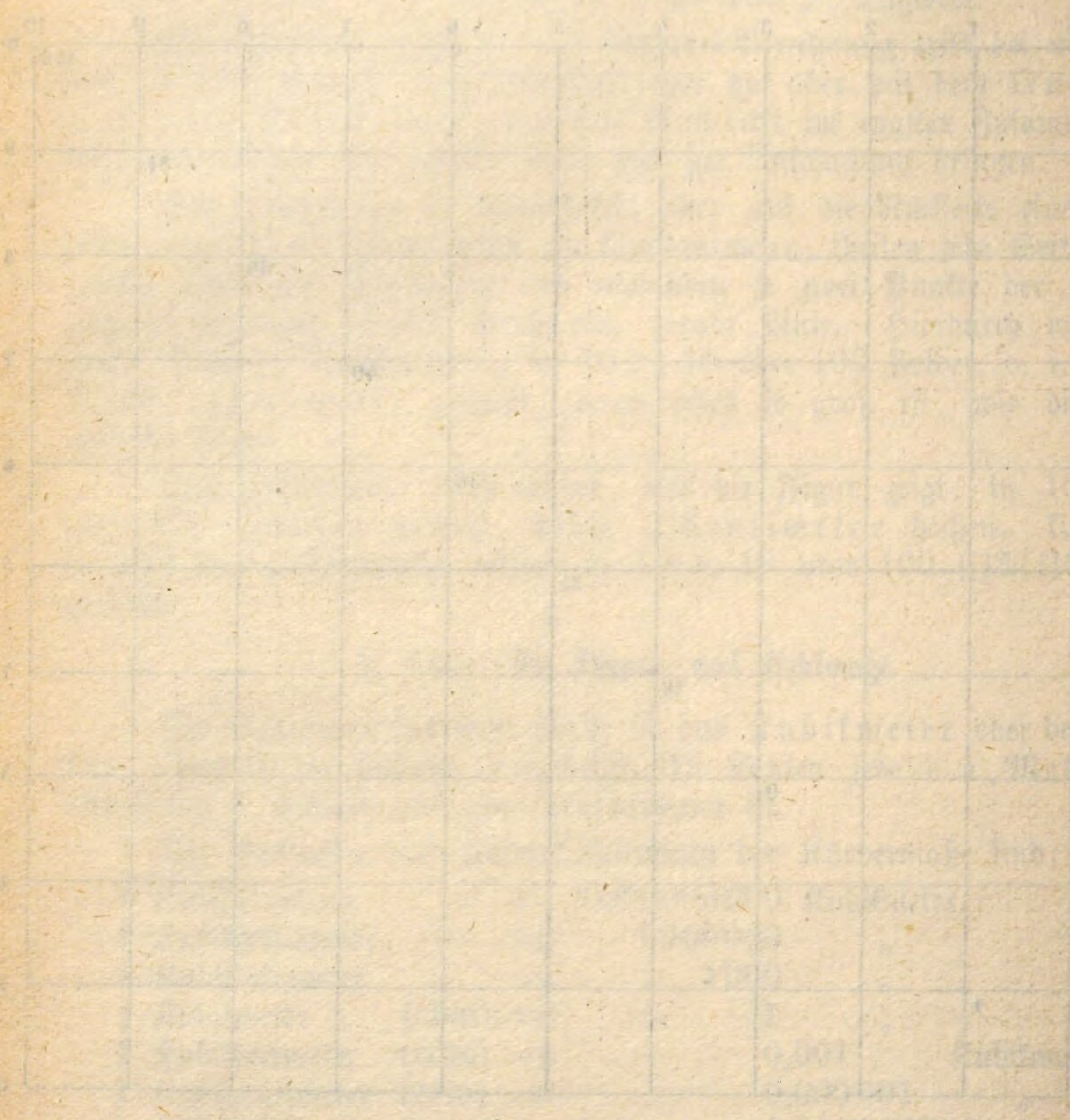
Das □ Centimeter und seine Eintheilung:



Ein □ Centimeter = 10 × 10 oder 100 □ Millimeter.

a.

Das □Decimeter und seine Eintheilung.



1 □Decimeter = 10 · 10 oder 100 □Centimeter.

b.

Das □Centimeter und seine Eintheilung.



1 □Centimeter = 10 · 10 oder 100 □Millimeter.

maße, sowohl für trockene, als für flüssige Dinge, für Getreide und für Wein ꝛc. Es ist dieß das Liter.

Ein Liter ist der tausendste Theil eines Kubikmeters.

10 solche Würfel oder Liter, in einer Reihe neben einander gestellt, bilden ein Dekaliter; 10 Dekaliter neben einander bilden eine quadratförmige Schichte, das Hektoliter, und 10 solche Schichten oder Hektoliter, auf einander gelegt, bilden das Würfelmeter oder das Kilometer.

Theilt man den Würfel, welcher der 1000ste Theil des Kubikmeters ist und Liter heißt, wieder in 10 Schichten, jede Schichte in 10 Reihen und jede Reihe in 10 Würfel; so erhält man Deciliter, Centiliter und Milliliter.

Die Hohlmaße nach dem französischen Systeme sind:

1 Kiloliter		=	1000	Liter.
1 **Hektoliter**	(hl)	=	100	"
1 Dekaliter		=	10	"
1 **Liter**	(l)	=	1	"
1 Deciliter	(dl)	=	0,1	"
1 Centiliter	(cl)	=	0,01	"
1 Milliliter	(ml)	=	0,001	"

Das Gesetz führt bloß das Liter und das Hektoliter ein. Das Liter wird auch Kanne, das Hektoliter auch Faß, das halbe Hektoliter auch Scheffel genannt.

§. 191. Das Gewicht.

Das Liter dient auch zur Bestimmung des Gewichts. Ein Liter destillirten Wassers (bei + 4 Grad des 100theiligen Thermometers) bildet bei uns die Gewichtseinheit, Kilogramm oder Kilo genannt.

In dem französischen Systeme, welches folgt, ist die Gewichtseinheit das Gramm, d. i. ein Milliliter destillirten Wassers.

1 Millier, **Tonne**	(t) .	=	1000000	Gramm.	
1 Quintal		=	100000	"	
1 Miriagramm . . .		=	10000	"	
1 **Kilogramm**	(kg)	=	1000	"	
1 Hektogramm . . .		=	100	"	
1 **Dekagramm** . . .		=	10	"	(Neuloth).
1 **Gramm**	(g)	=	1	"	
1 **Decigramm**	(dg)	=	0,1	"	
1 **Centigramm**	(cg)	=	0,01	"	
1 **Milligramm**	(mg)	=	0,001	"	

Ein Millier oder eine Tonne ist das Gewicht von 1 Kubikmeter, ein Kilogramm von 1 Kubikdecimeter, ein Gramm von 1 Kubikcentimeter und ein Milligramm von 1 Kubikmillimeter destillirten Wassers.

Durch das Gesetz sind eingeführt:

Die Tonne, das Kilogramm, das Dekagramm, das Gramm, das Decigramm, Centigramm und Milligramm.

Hiernach gestaltet sich das Gewichtssystem, wie folgt:

1 Kilogramm	=	100 Dekagramm	=	1000 Gramm		
		1 Dekagramm	=	10 Gramm		
1 Gramm	=	10 Decigr.	=	100 Centigr.	=	1000 Milligr.
		1 Decigr.	=	10 Centigr.	=	100 Milligr.
				1 Centigr.	=	10 Milligr.

1000 Kilogr. = 1 Tonne.

Ferner bestimmt das Gesetz: Ein halbes Kilogramm heißt **Pfund**; 50 Kilogramm oder 100 Pfund heißen **Centner**.

Das kleinste Gewicht, welches im gewöhnlichen Handel und Wandel angewendet wird, ist das Gramm = $^8/_{35}$ Quint. Weiter abwärts, als zum Gramm, brauchen wir daher auf dieser Stufe in unsern Schulen nicht zu gehen.

Das Deci-, Centi- und Milligramm sind in das Gesetz nur aufgenommen, weil das neue Gewicht zugleich auch das Medicinal-, Gold-, Silber-, Juwelen- und Perlen-Gewicht sein soll, von welchem wir vorläufig absehen können. Es bleibt uns also zur unterrichtlichen Behandlung:

1 Kilogr.	=	100 Dekagr.	=	1000 Gramm		
		1 „	=	10 „		
1 Kilogr.	=	2 Pfd.				
50 „	=	100 „	=	1 Centner.		

§. 192. Zusammenstellung der abgekürzten Maß- und Gewichtsbezeichnungen *).

A. Längenmaße.

Kilometer	km
Meter	m
Centimeter	cm
Millimeter	mm

B. Flächenmaße.

Quadratkilometer	qkm
Hektar	ha
Ar	a
Quadratmeter	qm
Quadratcentimeter	qcm
Quadratmillimeter	qmm

C. Körpermaße.

Kubikmeter	cbm
Hektoliter	hl
Liter	l
Kubikcentimeter	ccm
Kubikmillimeter	cmm

D. Gewichte.

Tonne	t
Kilogramm	kg
Gramm	g
Milligramm	mg

Regeln.

1) Den Buchstaben werden Schlußpunkte nicht beigefügt.
2) Die Buchstaben werden **an das Ende** der vollständigen Zahlenausdrücke, **nicht über** das Decimalkomma derselben, gesetzt; also z. B. 5,37 m — (nicht: 5 ^{m} 37, und nicht: 5 m 37 cm).

*) Diese für das ganze deutsche Reich angeordnete Maß- und Gewichtsbezeichnung ist dem Verfasser soeben zugekommen und wird nun in dem noch übrigen Theile des Buches angewendet werden.

3) Zur Trennung der Einerstellen von den Decimalstellen dient das Komma, nicht der Punkt. Sonst ist das Komma bei Maß- und Gewichtszahlen nicht anzuwenden, insbesondere nicht zur Abtheilung mehrstelliger Zahlenausdrücke. Solche Abtheilung ist durch Anordnung der Zahlen in Gruppen von je 3 Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenem Zwischenraum zwischen den Gruppen zu bewirken.

§. 193. Uebersichtliche Zusammenstellung der zu behandelnden Münzen, Maße und Gewichte.

A. Mit decimaler Abtheilung.

1. Münzen.

1 Mark = 100 Pfennige.

2. Längemaße.

Meter (m)		Decimeter (dm)		Centimeter (cm)		Millimeter (mm)
1	=	10	=	100	=	1000
		1	=	10	=	100
				1	=	10

3. Flächenmaße.

a) Werkmaß:

1 qm = 100 qdm = 10000 qcm = 1000000 qmm
1 qdm = 100 qcm = 10000 qmm
1 qcm = 100 qmm

b) Feldmaß:

1 Hektar (ha) = 100 Ar (a) = 10000 qm
1 Ar = 100 qm

4. Körpermaße.

1 cbm = 1000 cdm = 1000000 ccm = 1000000000 cmm
1 cdm = 1000 ccm = 1000000 cmm
1 ccm = 1000 cmm

5. Hohlmaße.

1 Hektoliter (hl) = 100 Liter (l).

6. Gewichte.

1 Kilogr. (kg) = 100 Dekagr. = 1000 Gramm (g)
1 Dekagr. = 10 Gramm.
1 Centner = 100 Pfund.

7. Das Papier- (Zähl-) Maß.

Ballen		Ries		Buch		Heft		Bogen
1	=	10	=	100	=	1000	=	10000
		1	=	10	=	100	=	1000
				1	=	10	=	100
						1	=	10

B. Nicht mit decimaler Abtheilung.

1. Das Zählmaß.

1 Schock (Schober) = 4 Mandel = 60 Stück.
1 Mandel = 15 Stück.

1 Groß = 12 Dutzend = 144 Stück.
1 Dutzend = 12 Stück.

2. Zeitmaß.

1 Jahr = 12 Monat = 52 Wochen = 365 Tage (Schaltjahr 366 Tg.); 1 Monat = 30 Tage; 1 Woche = 7 Tage; 1 Tag = 24 Stunden; 1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden.

3. Gewicht.

1 Centner = 50 Kilogramm; 1 Pfund = 500 Gramm.

---

§. 194. Vergleichung der alten und der neuen Münzen, Maße und Gewichte mit einander.

1 Gulden	= 1 ℳ 71 3/7 ₰.			1 Halbmarkstück	= 17 kr.	2 pf.
1 Markstück	= — fl.	35	kr.	1 Zwanzigpfgstück	= 7 kr.	— pf.
1 Zweimarkstück	= 1 fl.	10	kr.	1 Zehnpfennigstck.	= 3 kr.	2 pf.
1 Fünfmarkstück	= 2 fl.	55	kr.	1 Fünfpfennigstck.	= 1 kr.	3 pf.
1 Zehnmarkstück	= 5 fl.	50	kr.	1 Zweipfennigstck.	= — kr.	2,8 pf.
1 Zwanzigmarkst.	= 11 fl.	40	kr.	1 Pfennigstück	= — kr.	1,4 pf.

Verhältnißzahlen.

Alt.		Neu.	Neu.		Alt.
1 bayer. Fuß	=	0,292 m	1 Meter	=	3,426 Fuß
1 „ Elle	=	0,833 m	1 Meter	=	1,200 b. Elle
1 „ □Fuß	=	0,085 qm	1 □Meter	=	11,740 □Fuß
1 „ Tagwerk	=	34,073 Ar	1 Hektar	=	2,935 Tgw.
1 „ Kubikfuß	=	0,025 cbm	1 cbm	=	40,224 Kbkfuß
1 „ Maß	=	1,069 l	1 Liter	=	0,936 Maß
1 „ Eimer	=	68,418 l	1 Hektoliter	=	1,462 Eimer
1 „ Metzen	=	37,060 l	1 Hektoliter	=	2,700 Metzen
1 „ Scheffel	=	2,224 hl	1 Hektoliter	=	0,450 Schff.
1 „ Pfund	=	560 g	1 Kilogramm	=	1,786 Pfd.
1 „ Centner	=	56 kg	1 Gramm	=	0,229 Qt.

Erste Abtheilung.

Die Rechnungsarten mit benannten Decimalzahlen.

I. Lesen, Schreiben, Resolviren, Reduciren.

§. 195. Vorbemerkung.

Die Uebung im Lesen und Schreiben besteht hier darin, einfach benannte Decimalzählen, z. B. 3,45 Mark, als mehrfach benannte Zahlen, als 3 Mark 45 Pfennig zu lesen, und letztere, z. B. 6 Mark 84 Pfennig, als einfach benannte Decimalzahlen, als 6,84 Mark zu schreiben.

Das Lesen und Schreiben in diesem Sinne, sowie das Resolviren und Reduciren, soweit es die Längen- und die Hohlmaße, die Münzen und Gewichte betrifft, haben wir schon drei bis vier Jahre lang mit unsern Schüler getrieben. Da solches jedoch nur nebenbei und bruchstückweise geschehen ist, und da man in der anschaulichen und gründlichen Behandlung dieses Gegenstandes überhaupt nicht leicht zu viel thun kann, so werden die oben bezeichneten Uebungen nunmehr im Zusammenhange vorgenommen und auf die Flächenmaße ausgedehnt.

§. 196. Das Lesen und Schreiben unbenannter Decimalzahlen als Vorübung.

T	H	Z	E	z	h	t	Von der Einerstelle an gezählt, bedeutet die 1
1	0	0	0				in der 4. Stelle links 1 T,
	1	0	0				in der 3. Stelle l. den 10. Theil von 1 T = 1 H,
		1	0				in der 2. Stelle l. den 10. Theil von 1 H = 1 Z,
			1				in der 1. Stelle l. den 10. Theil von 1 Z = 1 E,
			0	1			in der 1. Stelle rechts den 10. Theil von 1 E = 1 z,
			0	0	1		in der 2. Stelle r. den 10. Theil von 1 z = 1 h,
			0	0	0	1	in der 3. Stelle r. den 10. Theil von 1 h = 1 t.

1 1 1 1,1 1 1 = 1 T + 1 H + 1 Z + 1 E + 1 z + 1 h + 1 t.
4 7 3 8,2 5 6 = 4 T + 7 H + 3 Z + 8 E + 2 z + 5 h + 6 t.

Die Zehntel, Hundertel und Tausendtel werden auch hier wieder durch das Meter und seine Unterabtheilungen veranschaulicht. Der 10. Theil von 1 Meter ist $^1/_{10}$ Meter, von 1 also $^1/_{10}$; der 10. Theil von $^1/_{10}$ Meter ist $^1/_{100}$ Meter, von $^1/_{10}$ also $^1/_{100}$ u. s. w.

Was gilt eine Ziffer, z. B. die Ziffer 1 oder 8, wenn sie für sich allein, oder unmittelbar vor dem Komma steht?

Was bedeuten die Ziffern
eine Stelle vor den Einern? eine Stelle nach den Einern?
2 Stellen vor den Einern? 2 Stellen nach den Einern?
3 Stellen vor den Einern? 3 Stellen nach den Einern?

Was gelten die Ziffern vor dem Komma? (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender.) Was gelten sie nach dem Komma? (Zehntel, Hundertel, Tausendtel.)

Die Einer, Zehner, Hunderter 2c. sind die Ganzen, die Zehntel, Hundertel, Tausendtel sind Theile. Wozu dient also das Komma? Welchen Zweck hat es? (Die Theile von den Ganzen zu trennen.)

Nun schreibt der Lehrer verschiedene Zahlen mit höchstens drei Decimalstellen (Komma unter Komma) an die Wandtafel und läßt sich von den Schülern den Stellenwerth der Ziffern, welche nach dem Komma stehen, angeben. Z. B.

4,6	=	4 Ganze,	6 Zehntel
39,58	=	39 „	5 z 8 h
0,234	=	0 „	2 z 3 h 4 t
498,07	=	498 „	0 z 7 h

u. s. w.

Nach dieser Uebung im Lesen folgt die Uebung im Schreiben.

Der L. diktirt:	Die Sch. schrb.:	Fortsetzung:	
6 Ganze 4 z . . .	6,4	7 Ganze 4 h 9 t . .	7,039
0 „ 8 z . . .	0,8	5 „ 4 t	5,004
19 „ 2 z 3 h . .	19,23	0 „ 7 t	0,007
0 „ 0 z 5 h .	0,05	2 „ 6 z 0 h 8 t .	2,608
4 „ 7 h . . .	4,07	3 „ 5 z 6 t . .	3,506
0 „ 1 h 6 t . .	0,016	0 „ 7 z 2 h 5 t .	0,725

Diese Schreibweise der 10tel, 100tel ꝛc. heißt Decimalform.

Die Münzen.

§. 197. Lesen.

a. Frei im Kopfe. (Als Vorübung.)

$^1/_{10}$ ℳ. = 10 ₰.	$^1/_{100}$ ℳ. = 1 ₰.	$^1/_{10}$ + $^2/_{100}$ ℳ. = 10 + 2 = 12 ₰.
$^2/_{10}$ ℳ. = 20 ₰.	$^2/_{100}$ ℳ. = 2 ₰.	$^3/_{10}$ + $^5/_{100}$ ℳ. = 30 + 5 = 35 ₰.
$^3/_{10}$ ℳ. = 30 ₰.	$^3/_{100}$ ℳ. = 3 ₰.	$^5/_{10}$ + $^7/_{100}$ ℳ. = 50 + 7 = 57 ₰.
s. f. bis	s. f. bis	$^7/_{10}$ + $^4/_{100}$ ℳ. = 70 + 4 = 74 ₰.
1 0 ℳ. = 90 ₰.	$^9/_{100}$ ℳ. = 9 ₰.	$^9/_{10}$ + $^6/_{100}$ ℳ. = 90 + 6 = 96 ₰.

b. Angeschr.:	Gelesen und verwandelt:
0,45 ℳ.	0 ganze, $^4/_{10}$ + $^5/_{100}$ ℳ. = 40 + 5 oder 45 ₰.
0,72 ℳ.	0 ganze, $^7/_{10}$ + $^2/_{100}$ ℳ. = 70 + 2 oder 72 ₰.
0,50 ℳ.	0 ganze, $^5/_{10}$ + $^0/_{100}$ ℳ. = 50 ₰.
0,06 ℳ.	0 ganze, $^0/_{16}$ + $^6/_{100}$ ℳ. = 6 ₰.
3,87 ℳ.	3 ganze, $^8/_{10}$ + $^7/_{100}$ ℳ. = 3 ℳ. 87 ₰.
8,90 ℳ.	8 ganze, $^9/_{10}$ + $^0/_{100}$ ℳ. = 8 ℳ. 90 ₰.

Sind die Schüler auf diese Weise in die Bedeutung der Bezeichnung gründlich eingeführt, so werden die Theile der Mark nur noch in Pfennigen ausgedrückt. Steht z. B. 974,56 ℳ., so wird gelesen: 974 ℳ. 56 ₰. Die einfach benannte Decimalzahl wird mit zweifacher Benennung gelesen. Das gilt als Regel.

§. 198. Schreiben.

a. Frei im Kopfe. (Als Vorübung.)

10 ₰. = $^1/_{10}$ ℳ.	1 ₰. = $^1/_{100}$ ℳ.	12 ₰. = $^1/_{10}$ + $^2/_{100}$ od. $^{12}/_{100}$ ℳ.
20 ₰. = $^2/_{10}$ ℳ.	2 ₰. = $^2/_{100}$ ℳ.	25 ₰. = $^2/_{10}$ + $^5/_{100}$ od. $^{25}/_{100}$ ℳ.
30 ₰. = $^3/_{10}$ ℳ.	3 ₰. = $^3/_{100}$ ℳ.	57 ₰. = $^5/_{10}$ + $^7/_{100}$ od. $^{57}/_{100}$ ℳ.
s. f. bis	s. f. bis	84 ₰. = $^8/_{10}$ + $^4/_{100}$ od. $^{84}/_{100}$ ℳ.
90 ₰. = $^9/_{10}$ ℳ.	9 ₰. = $^9/_{100}$ ℳ.	96 ₰. = $^9/_{10}$ + $^6/_{100}$ od. $^{96}/_{100}$ ℳ.

Zerlegt man 12 ₰. in 10 + 2 ₰., so bilden sie $^1/_{10} + {}^2/_{100}$ ℳ.; betrachtet man 12 ₰. als 12 × 1 ₰., so bilden sie $^{12}/_{100}$ ℳ.

b. Der Lehrer diktirt:	Die Schüler sprechen:	u. schreiben:
36 ₰.!	36 ₰. = $^3/_{10} + {}^6/_{100}$ od. $^{36}/_{100}$ ℳ.	0,36 ℳ.
54 ₰.!	54 ₰. = $^5/_{10} + {}^4/_{100}$ od. $^{54}/_{100}$ ℳ.	0,54 ℳ.
72 ₰.!	72 ₰. = $^7/_{10} + {}^2/_{100}$ od. $^{72}/_{100}$ ℳ.	0,72 ℳ.
4 ℳ. 80 ₰.!	4 ℳ. 80 ₰. = 4 + $^{80}/_{100}$ ℳ.	4,80 ℳ.
20 ℳ. 5 ₰.!	20 ℳ. 5 ₰. = 20 + $^5/_{100}$ ℳ.	20,05 ℳ.

Die Uebung im Schreiben ist bis zur völligen Sicherheit fortzusetzen. Die ständige Schreibweise ist die decimale. Der Schüler schreibt z. B. nicht 37 ℳ. 42 ₰., sondern 37,42 ℳ. Das ist die zweite Regel.

Gelesen wird mit zweifacher Benennung, geschrieben in Decimalform, also mit einfacher Benennung.

§. 199. Resolviren und Reduciren.

Mündlich.

a. Verwandelt in Pfennige:

3 Mark! 1 ℳ. = 100 ₰.; 3 ℳ. = 1 ℳ. + 1 + 1 ℳ., also auch = 100 ₰. + 100 ₰. + 100 ₰.; 3 × 1 ℳ. = 3 × 100 ₰., und 3 × 100 ₰. = 300 ₰.; 3 ℳ. = 300 ₰.

7 Mark! 1 ℳ. = 100 ₰.; 7 ℳ. = 7 × 100 ₰. oder 700 ₰.
Eben so: 8, 12, 18, 25, 32, 44, 56 ℳ.

5 ℳ. 36 ₰.! 5 ℳ. = 5 × 100 = 500 ₰.; 500 ₰. + 36 ₰. = 536 ₰.
Eben so: 4 ℳ. 72 ₰., 9 ℳ. 5 ₰., 13 ℳ. 60 ₰., 18 ℳ. 84 ₰.

b. Verwandelt in Mark:

300 ₰.! 100 ₰. = 1 ℳ.; 300 ₰. = 100 ₰. + 100 ₰. + 100 ₰., also auch 1 ℳ. + 1 ℳ. + 1 ℳ.; 3 × 100 ₰. = 3 × 1 ℳ.; 3 × 1 ℳ. = 3 ℳ.; also ꝛc.

1200 ₰.! So vielmal 100 ₰., so vielmal 1 ℳ.; 1200 ₰. = 12 × 100 ₰., also auch = 12 × 1 ℳ.; 1200 ₰. = 12 ℳ.
Eben so: 1000 ₰., 1700 ₰., 2400 ₰., 5700 ₰., 10000 ₰.

375 ₰., wie viel Mark und Pfennige?
375 ₰. = 300 ₰. + 75 ₰. = 3 ℳ. 75 ₰. — Eben so: 596 ₰., 864 ₰., 1380 ₰., 1805 ₰., 8106 ₰., 2090 ₰., 4672 ₰.

Schriftlich.

a. 36 ℳ., wie viel Pfennige?
36 ℳ. = 36 × 100 oder 100 × 36 ₰.; Mark werden also in Pfennige verwandelt, wenn man ihre Zahl mit 100 multiplicirt, der Zahl 2 Nullen anhängt. 36 ℳ. = 3600 ₰.

6,48 ℳ. (gelesen 6 ℳ. 48 ₰.), wie viel Pfennige?
6,48 ℳ. = 648 ₰.; denn 6 ℳ. 48 ₰. = 600 ₰. + 48 ₰. = 648 ₰.

45,08 ℳ. (gelesen 45 ℳ. 8 ₰.), wie viel Pfg.?
45,08 ℳ. = 4508 ₰.; denn 45 ℳ. 8 ₰. = 4500 ₰. + 8 ₰. = 4508 ₰.

b. 3000 ₰, wie viel Mark?

Nehme ich von 3000 Pfg. 100 Pfg. weg, so geben diese 1 Mark; nehme ich vom Reste wieder 100 Pfg. weg, so geben diese wieder 1 Mark. So oft ich 100 Pfg. von 3000 Pfg. wegnehmen kann, so vielmal 1 Mark geben diese. 100 Pfg. können aber von 3000 Pfg. so oft weggenommen werden, als sie in 3000 Pfg. enthalten sind. Pfennige werden also in Mark verwandelt, wenn man ihre Zahl durch 100 dividirt. Man dividirt durch 100, indem man rechts 2 Stellen abschneidet. 3000 ₰ = 30 ℳ.

75905 ₰, wie viel Mark?

75905 ₰ = 759,05 ℳ (gelesen 759 ℳ 5 ₰.)

Hektoliter und Liter.

§. 200. Lesen und Schreiben.

a. Lesen. Vorübung: Hekto heißt Hundert; 1 hl = 100 l. Wie viel beträgt $^1/_{10}$ hl? wie viel $^1/_{100}$ hl? Wie viel Liter betragen $^2/_{10}$ hl? $^3/_{10}$, $^5/_{10}$, $^7/_{10}$, $^9/_{10}$ hl? $^2/_{100}$ hl? $^4/_{100}$, $^6/_{100}$, $^8/_{100}$ hl? $^1/_{10} + {}^1/_{100}$ hl? $^3/_{10} + {}^6/_{100}$ hl? $^7/_{10} + {}^5/_{100}$ hl? $^8/_{10} + {}^7/_{100}$ hl?

Der L. schreibt:	Die Schüler lesen und verwandeln:
0,07 hl	0 ganze, $^0/_{10}$, $^7/_{100}$ hl = 7 l
0,25 „	$^2/_{10} + {}^5/_{100}$ hl = 20 + 5 oder 25 l
0,68 „	$^6/_{10} + {}^8/_{100}$ hl = 60 + 8 oder 68 l (= $^{68}/_{100}$ hl)
2,53 „	2 hl 53 l
15,06 „	15 hl 6 l
u. s. w.	

b. Schreiben. Zur Vorübung: 100 l = 1 hl. Welcher Theil von 1 Hektoliter ist 1 Liter? (1 l = $^1/_{100}$ hl). Wie viel 100tel-Hektoliter sind demnach 2 l? 3, 5, 8, 14, 32 l?

Welcher einfache Theil von 1 Hektoliter sind 10 l? (10 l = $^1/_{10}$ hl). Wie viel 10tel-Hektoliter sind 20 l? 30, 70, 50, 80, 90 l?

36 l, als 30 + 6 l betrachtet = $^3/_{10} + {}^6/_{100}$ hl

36 l, als 36 × 1 l betrachtet = $^{36}/_{100}$ hl.

Als welche Theile von dem Hektoliter lassen sich demnach 27 l betrachten? (27 l = $^2/_{10} + {}^7/_{100} = {}^{27}/_{100}$ hl). Ferner: 18 l, 32 l, 54 l, 75 l?

Wie schreibt man	Die Schüler antworten und schreiben:
3 l?	3 l = $^3/_{100}$ hl, 0 Komma 03 = 0,03 hl
56 l?	56 l = $^5/_{10} + {}^6/_{100}$ oder $^{56}/_{100}$ hl = 0,56 „
5 hl 62 l?	5 hl 62 l = 5 ganze + $^{62}/_{100}$ hl = 5,62 „
7 hl 5 l?	7 hl 5 l = 7 ganze + $^5/_{100}$ hl = 7,05 „
3 hl 90 l?	3 hl 90 l = 3 ganze + $^{90}/_{100}$ hl = 3,90 „
u. s. w.	

Die einfach benannte Decimalzahl 48,75 hl wird also mit zweifacher Benennung, als 48 hl 75 l, gelesen und die mehrfach benannte Zahl 53 hl 86 l als Decimalzahl, d. i. als 53,86 hl geschrieben.

§. 201. Resolviren und Reduciren.

Mündlich.

a. Verwandelt in Liter
7 Hektoliter! 1 hl = 100 l; 7 hl = 7 × 100 l = 700 l.
8 hl 54 l! 8 hl = 800 l; 800 l + 54 l = 854 l.

b. Verwandelt in Hektoliter
500 Liter! 100 l = 1 hl; 500 = 5 × 100 l = 5 × 1 hl = 5 hl.
634 Liter! 634 l = 600 l + 34 l = 6 hl 34 l.

Schriftlich.

a. 58 hl, wie viel Liter?
Ausr. 53 hl = 58 × 100 = 5800 l.
19,76 hl, wie viel Liter?
Ausr. 19,76 hl = 1976 l (19 × 100 + 76).

b. 5000 l, wie viel Hektoliter?
Ausr. 5000 : 100 = 50 hl.
13708 l, wie viel Hektoliter?
Ausr. 13708 l = 137,08 hl (13708 : 100).

---

§. 202.

Wie Mark und Pfennige, Hektoliter und Liter, so werden auch Centner und Pfund, Kilogramm und Dekagramm behandelt. Die Währungszahl ist bei diesen wie bei jenen = 100. Es wechseln also bloß die Namen; das Uebrige bleibt.

Die Längenmaße.

§. 203. Lesen und Schreiben.

Meter und Decimeter.

(Die Veranschaulichung siehe S. 34, 37, 40.)

1 Meter = 10 Decimeter oder Zehntel-Meter; denn deci heißt Zehntel; Decimeter = Zehntelmeter, und Zehntelmeter = Decimeter.

Angeschr.:	Die Sch. lesen:	Diktirt:	Die Sch. spr. u. schreiben:
0,1 m	$^1/_{10}$ m = 1 dm	1 dm!	1 dm = $^1/_{10}$ m = 0,1 m
0,4 m	$^4/_{10}$ m = 4 dm	6 dm!	6 dm = $^6/_{10}$ m = 0,6 m
9,7 m	$9^7/_{10}$ m = 9 m 7 dm	5 m 8 dm!	= $5^8/_{10}$ m = 5,8 m
	u. s. w.		u. s. w.

Die Stellen nach dem Komma nennt man Decimalstellen. In welche (in die wie vielte) Decimalstelle werden also die Decimeter geschrieben? (In die erste.) Warum? Weil die Decimeter Zehntelmeter sind und die Zehntel eine Stelle nach den Einern stehen.

Meter, Decimeter, Centimeter.

Anschaulich und frei im Kopfe. (Siehe S. 65 und 66.)

1 dm = 10 cm	1 dm 4 cm =	10 cm = 1 dm	15 cm = 1 dm 5 cm
2 dm = 20 cm	2 dm 7 cm =	20 cm = 2 dm	27 cm = 2 dm 7 cm
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

1 Meter = 10 Decimeter = 10 × 10 oder 100 Centimeter. Centi heißt Hundertel, Centimeter = Hundertelmeter.

a. Angeschr. — Gelesen:

0,07 m	$^7/_{100}$ m oder 7 cm.
0,65 m	$^6/_{10} + ^5/_{100}$ m oder 6 dm + 5 cm = 65 cm.
7,83 m	7 m 83 cm.
u. s. w.	

b. Diktirt: — Besprochen und in Decimalform geschrieben:

9 cm!	9 cm = $^9/_{100}$ m, 0 Komma 09 . . .	0,09 m
27 cm!	27 cm = 2 dm + 7 cm = $^2/_{10} + ^7/_{100}$ m	0,27 m
	(Oder: 27 cm = $^{27}/_{100}$ m = 0,27 m).	
8 m 63 cm!	8 m 63 cm = 8 ganze + $^{63}/_{100}$ m .	0,63 m
u. s. w.	(Das Geschriebene wird zuletzt auch gelesen.)	

Schreibt die Centimeter von 1 an bis 50 in Decimalform als Meter!

Meter, Deci=, Centi= und Millimeter.

Anschaulich und frei im Kopfe. (Siehe S. 103.)

1 cm = 10 mm	10 mm = 1 cm	1 dm = 100 mm	100 mm = 1 dm
1 cm = 20 mm	20 mm = 2 cm	2 dm = 200 mm	200 mm = 2 dm
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter. Milli heißt Tausendtel; Millimeter = Tausendtelmeter.

a. Angeschr. — Gelesen:

0,004 m	= $^4/_{1000}$ m oder 4 Millimeter.
0,076 m	= $^7/_{100} + ^6/_{1000}$ m
	= 7 cm + 6 mm = 76 mm
0,852 m	= $^8/_{10} + ^5/_{100} + ^2/_{1000}$ m
	= 8 dm + 5 cm + 2 mm
	= 85 cm + 2 mm = 852 mm
4,795 m	= 4 m + 795 mm
u. s. w.	

b. Diktirt: — Besprochen und in Decimalform geschrieben:

4 mm!	4 mm = $^4/_{1000}$ m, 0 Komma 004 . .	0,004 m
37 mm!	= 3 cm + 7 mm = $^3/_{100} + ^7/_{1000}$ m	0,037 m
	(Oder: 37 mm = $^{37}/_{1000}$ = 0,037 m)	
658 mm!	658 mm = 600 + 50 + 8 mm	
	= 6 dm + 5 cm + 8 mm	
	= $^6/_{10} + ^5/_{100} + ^8/_{1000}$ m .	0,658 m
	(Oder: 658 mm = $^{658}/_{1000}$ m = 0,658 m)	
4 m 795 mm!	4 m + 795 mm = 4 ganze + $^{795}/_{1000}$ m	= 4,795 m
8 m 62 mm!	8 m + 62 mm = 8 ganze + $^{62}/_{1000}$ m	= 8,062 m
u. s. w.	(Das Geschriebene wird zuletzt auch gelesen.)	

Wie schreibt man die Millimeter von 1—9? von 10 bis 99? von 100 bis 999?

Nun werden Zahlen in bunter Mischung diktirt und die Schüler angehalten, sie so unter einander zu schreiben, daß Komma unter Komma steht. Man diktirt z. B.: 15 m 8 dm, 48 cm, 9 m 5 cm, 742 mm, 28 m 75 cm, 40 cm, 2 m 86 mm, 70 m 6 dm, 5 cm u. s. w.

Zuletzt wird das Geschriebene auch wieder gelesen.

§. 204. Resolviren und Reduciren.

Mündlich.

a. Man läßt auflösen
1) Meter in Decimeter, in Centimeter, in Millimeter;
2) Meter und Decim. (8 m 7 dm) in Decim., Centim., Millim.;
3) Meter und Centim. (5 m 36 cm) in Centim., in Millimeter;
4) Meter und Millimeter (4 m 536 mm) in Millimeter. Z. B.

8 m 7 dm = 87 dm = 87×10 od. 870 cm = 870×10 od. 8700 mm.
5 m 36 cm = 500 + 36 oder 536 cm = 536 × 10 oder 5360 mm.

b. Man läßt auf Meter zurückführen
1) Decimeter, z. B. 70 dm = 7 m; 48 dm = 4 m 8 dm.
2) Centimeter, z. B. 400 cm = 4 m; 576 cm = 5 m 76 cm.
3) Millimeter, z. B. 8000 mm = 8 m; 3457 mm = 3,457 m.

Schriftlich.

a. 752 Meter, wie viel Decimeter, Centim., Millimeter?
752 m = 752 × 10 = 7520 dm
= 752 × 100 = 75 200 cm
= 752 × 1000 = 752 000 mm.

Man braucht, um Meter in Decimeter zu verwandeln, bloß eine Null, um sie in Centimeter zu verwandeln, zwei Nullen und um sie in Millimeter zu verwandeln, bloß drei Nullen anzuhängen.

485,7 m (gelesen 485 m 7 dm) = 4850 + 7 = 4857 dm
97,42 m (gelesen 97 m 42 cm) = 9700 + 42 = 9742 cm
8,165 m (gelesen 8 m 165 mm) = 8000 + 165 = 8165 mm.

b. Wie viel Meter sind 8459 dm? 9371 cm? 78 060 mm?
8459 dm = 8459 : 10 = 845,9 m (845 m 9 dm)
9371 cm = 9371 : 100 = 93,71 m (93 m 71 cm)
8060 mm = 8060 : 1000 = 8,060 m (8 m 60 mm).

Man verwandelt Decimeter in Meter, wenn man eine Stelle, Centimeter in Meter, wenn man zwei Stellen, Millimeter in Meter, wenn man drei Stellen rechts abschneidet.

Kilometer und Meter.

§. 205. Begriff, Lesen, Schreiben.

Die Länge des Weges von einer Ortschaft und Stadt zu einer andern wird durch Kilometer bestimmt. Kilo heißt Tausend; 1 km = 1000 m. Das ist ungefähr eine kleine Viertelstunde.

Wie viel Meter beträgt $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ km? Wie viel Meter sind $^3/_{10}$, $^5/_{10}$, $^8/_{10}$, $^2/_{100}$, $^7/_{100}$, $^3/_{1000}$, $^6/_{1000}$ km?

Was bedeutet demnach (angeschrieben)

0,4 km?	$^4/_{10}$ km = 4 × 100 oder 400 m
36,7 km?	$36^7/_{10}$ km = 86 km und 700 m
0,38 km?	$^3/_{10} + ^8/_{100}$ km = 300 + 80 = 380 m
0,592 km?	$^5/_{10} + ^9/_{100} + ^2/_{1000}$ km = 500 + 90 + 2 = 592 m
u. s. w.	

Kilogramm und Gramm.

§. 206. Lesen und Schreiben.

a. Kilo heißt Tausend; 1 kg = 1000 g. Wie viel Gramm beträgt $^1/_{10}$ kg? $^1/_{100}$ kg? $^1/_{1000}$ kg? Wie viel Gramm sind: $^2/_{10}$ kg, $^3/_{10}$, $^4/_{10}$ 2c. kg? $^2/_{100}$, $^3/_{100}$, $^4/_{100}$ 2c. kg? $^1/_{10} + ^1/_{100}$ kg; $^3/_{10} + ^7/_{100}$ kg; $^5/_{10} + ^8/_{100}$ kg; $^7/_{10} + ^4/_{100} + ^6/_{1000}$ kg? 2c.

Angeschr.:	Gelesen:
0,007 kg	$^7/_{1000}$ kg = 7 g
0,080 kg	$^8/_{100}$ kg = 8 × 10 = 80 g
0,900 kg	$^9/_{10}$ kg = 9 × 100 = 900 g
0,530 kg	$^5/_{10} + ^3/_{100}$ kg = 500 + 30 = 530 g
0,642 kg	$^6/_{10} + ^4/_{100} + ^2/_{1000}$ kg = 600 + 40 + 2 = 642 g
1,358 kg	= 1 kg + 358 g.
u. s. w.	

b. 1000 g = 1 kg. Welchen Theil vom Kilogramm bilden 100 g? 10 g? Welcher Theil ist 1 Gramm von 1 Kilogr.? Welche Theile von dem Kilogr. bilden 3 g? 7, 19, 48, 123 2c. g?

In welche Decimalstelle muß man die Ziffern 1, 2, 3 2c. setzen, wenn sie $^1/_{1000}$, $^2/_{1000}$, $^3/_{1000}$ Gramm bedeuten sollen?

Wie schreibt man 24 Milli- oder Tausendtelmeter? Wie wird man demgemäß 24 Tausendtel-Kilogramm schreiben?

Wie schreibt man 365 Milli- oder Tausendtelmeter? Wie also auch 365 Tausendtel-Kilogramm?

Diktirt:	Besprochen und in Decimalform geschrieben:	
3 g!	3 g = $^3/_{1000}$ kg, 0 K. 003	= 0,003 kg
45 g!	45 g = $^{45}/_{1000}$ kg, 0 K. 045	= 0,045 kg
123 g!	123 g = $^{123}/_{1000}$ kg, 0 K. 123	= 0,123 kg

Wollen wir das genauer ansehen.

123 g = 100 + 20 + 3 g; 100 g = $^1/_{10}$ kg; die Ziffer 1 gehört, um 100 g oder $^1/_{10}$ kg zu gelten, in die erste Decimalstelle.

20 g = 2 × 10 g; 10 g = $^1/_{100}$ kg, 20 g = $^2/_{100}$ kg; die 2 gehört, um 20 g oder $^2/_{100}$ kg zu gelten, in die zweite Decimalstelle.

3 g = $^3/_{1000}$ kg; also gehört die 3 in die dritte Stelle.

Nun diktirt man weiter: 3 kg 5g; 8 kg 375 g; 9 kg 50 g 2c. und läßt zuletzt das Geschriebene auch wieder lesen.

§. 207. Resolviren und Reduciren.

Mündlich.

a. 7 kg, wie viel Gramm?
1 kg = 1000 g; 7 kg = 7 × 1000 oder 7000 g.
9 kg 475 g, wie viel Gramm?
9 kg = 9000 g; 9000 g + 475 g = 9475 g.

b. 12000 g, wie viel Kilogramm?
1000 g = 1 kg; 12000 g = 12 × 1000 g = 12 × 1 kg = 12 kg.
8420 g, wie viel Kilogramm und Gramm?
8420 g = 8000 g + 420 g = 8 kg + 420 g.

Schriftlich.

a. 84 kg = 84 × 1000 = 84000 g. Kilogr. werden in Gramm verwandelt, wenn man ihre Zahl mit 1000 multiplicirt, ihr also 3 Nullen anhängt.

63,748 kg (63 kg 748 g) = 63748 g. Hier treten die 748 g an die Stelle der 3 Nullen.

b. 17595 g = 17595 : 1000 = 17,595 kg (17 kg 595 g).

Gramm werden in Kilogramm verwandelt, indem man ihre Zahl durch 1000 dividirt, von ihr also rechts 3 Stellen abschneidet.

Die Flächenmaße.

Quadratmeter, Quadratdecimeter, Quadratcentimeter.

§. 208. Begriff, Lesen und Schreiben.

Der Lehrer zeichnet an die Wandtafel verschiedene Vierecke und darunter auch eines mit 4 gleichen Seiten, von denen 2 wagrecht laufen und 2 senkrecht. (Diese Bestimmung mag vorläufig genügen.) Ein solches Viereck heißt Quadrat (q).

Nun zeichnet er mit Anwendung des Maßstabes ein Quadrat, welches ein Meter lange Seiten hat. Ein solches Quadrat ist ein Quadrat-Meter (qm). Was ist also ein Quadratmeter?

Nach Quadratmetern wird die Größe des Fußbodens, der Decke und der Wände eines Zimmers, der Außenseiten eines Hauses ꝛc. bestimmt.

Das Quadratmeter wird (nach §. 189 S. 154) in 10 × 10 oder 100 kleinere Quadrate abgetheilt. Da von diesen eine Seite ein Decimeter beträgt, so heißen sie Quadrat-Decimeter (qdm). Was versteht man also unter einem solchen?

1 Quadratmeter = 100 Quadratdecimeter. Wie viel Quadratdecimeter betragen $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$, $^4/_{10}$ ꝛc., $^1/_{100}$, $^3/_{100}$, $^7/_{100}$ ꝛc. qm?

Wie viel Quadratdecimeter sind (angeschrieben)

0,04 qm?	$^4/_{100}$ qm = 4 qdm
0,30 qm?	$^3/_{10}$ qm = 3 × 10 oder 30 qdm
0,56 qm?	$^5/_{10}$ + $^6/_{100}$ qm = 50 + 6 oder 56 qdm
0,85 qm?	$^8/_{10}$ + $^5/_{100}$ qm = 80 + 5 oder 85 qdm

u. s. w.

Die Quadratdecimeter stehen also, wie die Pfennige und Liter, in der ersten und zweiten Decimalstelle.

Von den 100 qdm wird eines wieder in 10 × 10 oder 100 Quadrate eingetheilt. Diese haben ein Centimeter lange Seiten und heißen daher Quadrat-Centimeter. (qcm).

1 qdm = 100 qcm; 2 qdm = 2 × 100 qcm; 3 qdm = 3 × 100 qcm u. s. w. 100 qdm = 100 × 100 = 10000 qcm. Wie viel Quadratcentimeter hat also 1 qm?

1 Quadratmeter = 10000 Quadratcentimeter.

Welche Theile von dem Quadratmeter sind 1, 5, 9, 17, 33, 57 ꝛc. qcm? — Nun fragt es sich: in welcher Decimalstelle bedeuten die Ziffern Zehntausendtel?

In der 1. Decimalstelle bedeuten die Ziffern Zehntel, in der 2. gelten sie 100tel, in der 3. gelten sie 1000tel. Was werden sie in der 4. Decimalstelle bedeuten?

In die 4. Stelle kann man jedoch nur die Quadratcentimeter von 1 bis 9 schreiben. Zu 10, 11, 12 ꝛc. qcm sind 2 Stellen erforderlich. In welche 2 Stellen werden diese gesetzt werden müssen? — In der 1. und 2. Decimalstelle stehen die Quadratdecimeter; in die 3. und 4. kommen die Quadratcentimeter.

Angeschrieben:			Gelesen:
0,34	qm	=	$^{34}/_{100}$ qm oder 34 qdm
0,0034	„	=	$^{34}/_{10000}$ qm oder 34 qcm
0,2568	„	=	25 qdm + 68 qcm
0,5090	„	=	50 qdm + 90 qcm
0,0609	„	=	6 qdm + 9 qcm
7,8005	„	=	7 qm 80 qdm 5 pcm
u. s. w.			

§. 209. Resolviren und Reduciren.

Mündlich.

Verwandelt

a. 4 qm 25 qdm in Quadratdecm.! 1 qm = 100 qdm; 4 qm = 4 × 100 qdm oder 400 qdm, + 25 qdm = 425 qdm.

7 qdm 84 qcm in Quadratcentim.! 1 qdm = 100 qcm; 7 qdm = 7 × 100 oder 700 qcm; 700 qcm + 84 qcm = 784 qcm.

b. 875 qcm in Quadratdecimeter! 100 qcm = 1 qdm; so vielmal 100 qcm, so vielmal 1 qdm; 875 = 8 × 100 + 75; also sind 875 qcm = 8 qdm + 75 qcm.

1328 qdm in Quadratmeter! 100 qdm = 1 qm; 1328 qdm = 13 × 100 + 28 qdm = 13 qm + 28 qdm.

Schriftlich.

a. 8 qm = 800 qdm (8 qm = 8 × 100 = 800 qdm)
= 80000 qcm (800 qdm = 800 × 100 = 80000 qcm).

Man multiplicirt die Quadratmeter mit 100, um sie in Quadratdecimeter zu verwandeln, und diese wieder mit 100, um sie in Quadratcentimeter zu verwandeln.

Sind mit den Quadratmetern Quadratdecimeter und Quadratcentimeter verbunden, so treten diese Unterabtheilungen an die Stelle der Nullen.

Aufg. 5,9268 qm (5 qm 92 qdm 68 qcm), wie viel Quadratcent.

Aufl.	5 qm	=	$5 \times 100 \times 100 =$	50 000 qcm
	0,92 „	=	$92 \times 100 =$	9 200 „
	0,0068 „	=	. . . .	68 „
Also sind	5,9268 qm	. . =	. . . .	59 268 qcm

b. 6130 qdm, wie viel Quadratmeter?
100 qdm = 1 qm. So oft 100 qdm in 6130 qdm enthalten sind, so viel Quadratmeter kommen. 6130 : 100 = 61,30 qm.

15796 qcm, wie viel Quadratmeter?
So oft ich 100 qcm habe, so oft habe ich 1 qdm, und so oft ich 100 qdm habe, so oft habe ich 1 qm. Ich dividire also 2mal durch 100, und das geschieht, indem ich 2×2 oder 4 Stellen rechts abschneide.

15 796 qcm = 1,5796 qm (1 qm 57 qdm 96 qcm).

Hektar, Ar, Quadratmeter.

§. 210. Begriff, Lesen, Schreiben.

Ein Quadrat, welches 100 Meter lang und eben so breit ist, heißt Quadrat-Hektometer, abgekürzt Hektar. Denken wir uns das Hektar ebenso, wie das Quadratmeter, in 10×10 oder 100 kleinere Quadrate abgetheilt, so erhalten wir Are, und denken wir uns 1 Ar wieder ebenso, wie das Quadratdecimeter in 10×10 oder 100 kleinere Quadrate zerlegt, so erhalten wir Quadratmeter. Sowie also

1 qm = 100 qdm = 100×100 oder 10 000 qcm, so ist
1 ha = 100 a = 100×100 oder 10 000 qm.

Das Schreiben und Lesen, sowie das Resolviren und Reduciren ist daher bei dem Feld- und dem Werkmaße, mit Ausnahme der Benennungen, ein und dasselbe.

0,16 ha = $^{16}/_{100}$ ha = 16 a
0,0052 ha = $^{52}/_{10\,000}$ ha = 52 qm
0,1652 ha = 16 a 52 qm
0,3876 ha = 38 a 76 qm
9,4020 ha = 9 ha 40 a 20 qm
57,0580 ha = 57 ha 5 a 80 qm
u. s. w.

Wird das Ar als Einheit des Feldmaßes gesetzt, so ist z. B.
34,77 a = $34^{77}/_{100}$ a = 34 a 77 qm, und
581,69 a = 581 a 69 qm = 5 ha 81 a 69 qm.

§. 211. Resolviren und Reduciren.

Mündlich.

a. 5 ha 86 a, wie viel Ar? 1 ha = 100 a; 5 ha = 5 × 100 oder 500 a; 500 a + 86 a = 586 a.

12 a 75 qm, wie viel Quadratmeter? 1 a = 100 qm; 12 a = 12 × 100 oder 1200 qm; 1200 qm + 75 qm = 1275 qm.

b. 980 qm, wie viel Ar? 100 qm = 1 a; 980 qm = 9 × 100 + 80 qm = 9 a 80 qm.

2143 a, wie viel Hektar? 100 a = 1 ha; 2143 a = 21 × 100 + 43 a = 21 ha 43 a.

Schriftlich.

a. 47 ha = 4700 a	6,53 ha (6 ha 53 a) = 653 a
52 a = 5200 qm	2,81 a (2 a 81 qm) = 281 qm

Aufg. 6,2596 ha (6 ha 25 a 96 qm), wie viel Quadratmeter?

Aufl.	6 ha	= 6 × 100 × 100 =	60000 qm
	0,25 „	= 25 × 100 =	2500 „
	0,0096 „	=	96 „
Also sind	6,2596 ha	=	62596 qm

b. Wie viel Hektar betragen 748500 Quadratmeter?

748500 qm = 748500 : 100 = 7485 a

7485 a = 7485 : 100 = 74,85 ha

Um Quadratmeter in Ar zu verwandeln, dividirt man durch 100, und um die Ar in Hektar zu verwandeln, dividirt man abermal durch 100. Wie kann man daher Quadratmeter auf einmal in Hektar verwandeln? Wenn man sogleich mit 100 × 100 oder 10000 dividirt, sogleich also 2 × 2 oder 4 Stellen abschneidet.

748500 qm = 74,8500 ha = 74 ha 85 a.

Das Papier- (Zähl-) Maß.

§. 212. Resolviren und Reduciren.

1 Ballen = 10 Ries, 1 Rs. = 10 Bch., 1 Bch. = 10 Heft, 1 Heft = 10 Bg. Verwandelt in Bogen a. 1 Bch.! b. 1 Rs.! c. 1 Bll.!

1 Heft = 10 Bg.; 1 Bch. = 10 × 10 od. 100 Bg.; 1 Rs. = 10 × 100 oder 1000 Bg.; 1 Bll. = 10 × 1000 oder 10000 Bg.

8 Heft 4 Bg., wie viel Bogen?
8 Heft 4 Bg. = 8 × 10 + 4 oder 84 Bg.

5 Bch. 3 Heft, wie viel Bogen?
5 Bch. 3 Heft = 5 × 10 + 3 od. 53 Heft = 53 × 10 = 530 Bg.

72 Bogen, wie viel Heft?
72 Bogen = 7 × 10 + 2 Bg. = 7 Heft 2 Bg.

365 Bogen, wie viel Buch, Heft und Bogen?
365 Bg. = 36 Heft 5 Bg. = 3 Bch. 6 Heft 5 Bg.

Angeschrieben.

4 Bll. 5 Rs. 8 B. 7 Heft 6 Bg., wie viel Bogen?

(4 Bll. 5 Rs. $=$ $4 \times 10 + 5) = 45$ Rs.

(45 Rs. 8 Bch. $=$ $45 \times 10 + 8) = 458$ Bch.

(458 Bch. 7 Heft $=$ $458 \times 10 + 7) = 4587$ Heft.

(4587 Heft 6 Bg. $= 4587 \times 10 + 6) = 45876$ Bg.

Man reihet also die Ziffern einfach aneinander.

34567 Bg. = 3456,7 Heft = 3456 Heft 7 Bg.

= 345,67 Bch. = 345 Bch. 6 Heft 7 Bg.

u. s. w.

Man verwandelt die Bogen in Heft, wenn man 1 Stelle, die Bogen in Buch, wenn man 2 Stellen abschneidet u. s. w.

§. 213. **Uebersicht der decimalen Schreibung und deren Leseweise.**

Angeschrieben:		Gelesen:		
84,63 ℳ	=	84 ℳ 63 ₰.	=	8463 ₰.
792,85 hl	=	792 hl 85 l	=	79285 l
6923,47 Ctr.	=	6923 Ctr. 47 Pfd.	=	692347 Pfd.
81,5 m	=	81 m 5 dm	=	815 dm
259,74 m	=	259 m 74 cm	=	25974 cm
4,235 m	=	4 m 235 mm	=	4235 mm
77,980 km	=	77 km 980 m	=	77980 m
8,620 kg	=	8 kg 620 g	=	8620 g
	=	8 kg 62 Dekagr.	=	862 Dekagr.
64,70 qm	=	64 qm 70 qdm	=	6470 qdm
3,5845 qm	=	3 qm 58 qdm 45 qcm	=	35845 qcm
46,76 a	=	46 a 76 qm	=	4676 qm
589,28 ha	=	589 ha 28 a	=	58928 a
2,8513 ha	=	2 ha 85 a 13 qm	=	28513 qm

§. 214.

Sind die Schüler in den Stand gesetzt, mehrfach benannte ganze Zahlen als einfach benannte Decimalzahlen zu schreiben und letztere als mehrfach benannte ganze Zahlen zu lesen, die höheren Einheiten in die niederen aufzulösen und diese auf jene zurückzuführen; so ist das Schwerste überwunden. Denn das Rechnen mit Decimalzahlen ist ein Rechnen mit ganzen Zahlen und unterscheidet sich von diesem nur durch das zu setzende Komma.

Die gewonnene Fertigkeit im Lesen und Schreiben ist aber auch zu erhalten und nicht nur zu erhalten, sondern zur völligen Geläufigkeit zu bringen. Und wodurch erzielen wir dieß? Sehr einfach und natürlich dadurch, daß wir

1) in den Aufgaben für das Zifferrechnen die mehrfach benannten Zahlen nur in Decimalform ausdrücken, und

2) die benannten Decimalzahlen stets als mehrfach benannte Zahlen lesen lassen.

So ergibt sich die Geläufigkeit, für den schriftlichen Ausdruck (7,48 ℳ) den mündlichen (7 ℳ 48 ₰) und für den mündlichen Ausdruck den schriftlichen zu setzen, von selbst. Dabei ist es jedoch keineswegs überflüssig, von Zeit zu Zeit auch Aufgaben mit mehrfach benannten Zahlen zu diktiren und diese in Decimalform schreiben zu lassen. Im Gegentheil; das Diktandoschreiben von Rechenaufgaben darf, auch wenn die Schüler ein Aufgabenheft in Händen haben und auch nicht bloß um des gedachten Zweckes willen, auf keiner Unterrichtsstufe verabsäumt werden.

II. Addiren.

§. 215. Verfahren.

A. Mündlich.

1. Aufgaben mit einfachen Benennungen.

70 ₰ + 70 ₰! 70 ₰ + 70 ₰ = 140 ₰ = 1 ℳ 40 ₰.
80 l + 56 l! 80 l + 56 l = 136 l = 1 hl 36 l.
Oder: 80 l + 56 l = 80 + 20 + 36 l = 1 hl 36 l.
94 ₰ + 60 ₰! 94 ₰ + 60 ₰ = 154 ₰ = 1 ℳ 54 ₰.
Oder: 94 ₰ + 60 ₰ = 94 + 6 + 54 = 1 ℳ 54 ₰.
88 cm + 73 cm! 88 cm + 73 cm = 161 cm = 1 m 61 cm.
Oder: 88 cm + 73 cm = 88 + 12 + 61 cm = 1 m 61 cm

Reihenbildungen. Z. B. 36 ₰ + 36 ₰ = 72 ₰ + 36 ₰ = 1,08 ℳ (1 ℳ 8 ₰) + 36 ₰ = 1,44 ℳ + 36 ₰ = 1,80 ℳ u. s. w. bis 7,20 ℳ

2. Aufgaben mit zwei Benennungen.

18 ℳ 36 ₰ + 6 ℳ! Ich lege Mark zu Mark, die 6 ℳ also zu den 18 ℳ; 18 ℳ 36 ₰ + 6 ℳ = 24 ℳ 36 ₰.
23 hl 45 l + 19 hl = 42 hl 45 l
17 Ctr. 68 Pf. + 25 Ctr. = 42 Ctr. 68 Pfd.
48 m 72 cm + 36 m = 84 m 72 cm

4 ℳ 75 ₰ + 48 ₰! Ich lege die Pfennige zu den Pfennigen, die 48 ₰ also zu den 75 ₰; 75 ₰ + 48 ₰ = 123 ₰ = 1,23 ℳ; 4 ℳ + 1,23 ℳ = 5 ℳ 23 ₰.
6 ha 85 a + 45 a = 7 ha 30 a
9 hl 72 l + 66 l = 10 hl 38 l
14 kg 960 g + 80 g = 15 kg 40 g

8 ℳ 72 ₰ + 9 ℳ 84 ₰! Mark zu Mark und Pfennige zu Pfennigen. 8 ℳ + 9 ℳ = 17 ℳ; 72 + 84 ₰ = 156 ₰ = 1,56 ℳ; 17 ℳ + 1,56 ℳ = 18,56 ℳ
25 m 70 cm + 18 m 58 cm = 44 m 28 cm
44 hl 98 l + 5 hl 12 l = 50 hl 10 l
2 ha 50 a + 3 ha 96 a = 6 ha 46 a

B. Schriftlich.

1) 8,36 ℳ + 27,58 ℳ + 43,05 ℳ + 275,87 ℳ = ?

Die Aufgabe wird so, wie sie hier steht, an die Wandtafel geschrieben. Dann werden die Zahlen unter einander gesetzt, Komma unter Komma.

So ergibt sich ganz von selbst, daß links die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner, und rechts die Zehntel unter die Zehntel, die Hundertel unter die Hundertel zu stehen kommen. (Vergl. §. 146, S. 111.)

Angeschrieben:			Gelesen und verwandelt:
8,36 ℳ	= 836 ₰.		8 ℳ 36 ₰. = 836 ₰.
27,58 „	= 2758 „		27 „ 58 „ = 2758 „
43,05 „	= 4305 „		43 „ 05 „ = 4305 „
275,87 „	= 27587 „		275 „ 87 „ = 27587 „
1 2 1 1 2	1 2 1 2		
354,86 ℳ	35486 ₰.	= 354,86 ℳ	

Wir addiren zuerst die in Pfennigen ausgedrückten Posten. Ihre Summa beträgt 35486 ₰. = 354,86 ℳ

Nun addiren wir eben so die in Mark und Pfennigen ausgedrückten Zahlen, welche wir uns als Pfennige bloß denken, und setzen dabei sogleich Komma unter Komma. So erhalten wir sogleich das fertige Resultat.

2) 8,5 m + 5,78 m + 1,965 m + 4 m =?

Wir setzen diese Zahlen wieder so, daß Komma unter Komma steht.

		Gelesen:
8,5 m	= 8,500 m	8500 mm
5,78 „	= 5,780 „	5780 „
1,965 „	= 1,965 „	1965 „
4,0 „	= 4,000 „	4000 „
20,245 m	20,245 m	

Die gegebenen Zahlen haben nicht gleichviele Decimalstellen. Betrachten wir 8 m 5 dm als 85 Decimeter, 5 m 78 cm als 578 Centimeter, 1 m 965 mm als 1965 Millimeter, und 4 m als 40 Decimeter; so sind es auch ungleichnamige Zahlen.

Decimalzahlen, welche nicht gleichviel Decimalstellen haben, sind ungleichnamige Decimalzahlen. Die angeschriebenen Zahlen werden gleichnamig, wenn wir die Decimeter und Centimeter auch in Millimeter verwandeln.

85 dm = 850 cm = 8500 mm; 578 cm = 5780 mm, und 4 m oder 40 dm = 4000 mm. (Beifügung der Nullen.)

Nun sind es gleichnamige Zahlen. Der einen Zahl haben wir eine, der andern 2 Nullen beigefügt. Die Decimalzahlen werden also gleichnamig, indem wir bei denen, welche weniger Decimalstellen haben, die fehlenden Stellen durch Nullen ersetzen.

Und nun addiren wir 8500 + 5780 + 1965 + 4000 mm. Die Summe = 20,245 m oder 20 m 245 mm.

Kann man denn aber die gegebenen Zahlen nicht auch addiren, ohne sie vorher gleichnamig zu machen? Versucht es! — Also: nothwendig ist hier die Gleichnamigmachung nicht.

§. 216. Angewandte Aufgaben.

Es hatte Jemand einen Grundbesitz von 68,75 ha und kaufte dazu noch 12,4980 ha Ackerfeld, 6,8272 ha Wiesen und 24 ha Wald. Wie viel Grundbesitz hatte er nun?

Aufl. Er hatte nun 68,75 ha + 12,4980 ha + 6,8272 ha + 24 ha. Ich muß also die Zahlen addiren.

Ausr.
```
   68,75   ha
   12,4980 „
    6,8272 „
   24,00   „
  ---------
  112,0752 ha (112 ha 7 a 52 qm).
```

Aufg. z. Kopf- und Ifferr.

III. Subtrahiren.

§. 217. Verfahren.

Mündlich.

1) 27 ℳ 40 ₰ — 19 ℳ?
Mark nimmt man von Mark, die 19 ℳ also von den 27 ℳ; 27 — 19 = 8; 27 ℳ 40 ₰ — 19 ℳ = 8 ℳ 40 ₰.

2) 8 ℳ 72 ₰ — 48 ₰ =?
Die 48 ₰ nehme ich von den 72 ₰; 72 ₰ — 48 ₰ = 24 ₰; 8 ℳ 72 ₰ — 48 ₰ = 8 ℳ 24 ₰.

15 ℳ 48 ₰ — 8 ℳ 36 ₰ =?
15 ℳ 48 ₰ — 8 ℳ = 7 ℳ 48 ₰, und 7,48 ₰ — 36 ₰ = 7,12 ₰.

Von 100 und 1000 als Währungszahlen muß der Schüler jede kleinere Zahl sicher und mit Schlagfertigkeit abziehen können. Daher zunächst folgende Uebung:

100 — 10, 40, 20, 90, 70, 30, 80, 60, 50
100 — 15, 36, 57, 28, 42, 72, 91, 69, 83 ꝛc.

1 ℳ — 32 ₰!

Von 1 Markstück lassen Pfennige sich nicht wegnehmen. Ich muß mir für dasselbe erst Pfennige einwechseln. Für 1 ℳ erhalte ich 100 ₰, und davon nehme ich nun 32 ₰ weg. Ich rechne daher: 1 ℳ = 100 ₰; 100 ₰ — 32 ₰ = 68 ₰. Kurz: 1 ℳ — 32 ₰ = 68 ₰. Eben so:

1 ℳ — 24, 65, 48, 75, 36, 52, 84, 68 ꝛc. ₰!
1 hl — 15, 37, 53, 78, 97, 26, 44, 85 ꝛc. Liter!

Ferner werden abgezogen

Centimeter von 1 Meter	Pfunde von 1 Centner
Quadratmeter von 1 Ar	Dekagr. von 1 Kilogr.
Are von 1 Hektar	Bogen von 1 Buch.

---

2 ℳ — 48 ₰! 2 ℳ = 1 ℳ + 100 ₰; 1 ℳ 100 ₰ — 48 ₰ = 1,52 ℳ
2 ℳ — 1 ℳ 64 ₰! 2 ℳ — 1 ℳ = 1 ℳ, und 1 ℳ — 64 ₰ = 36 ₰.

Dergleichen Aufgaben bis zur Schlagfertigkeit. Eben so:

5 ℳ. — 40, 70, 32, 81 ꝛc. ₰.!
5 ℳ. — 4,57 ℳ., 3,94 ℳ. ꝛc.!

10 ℳ. — 6 ℳ. 18 ₰., 8 ℳ. 73 ₰. ꝛc
20 ℳ. — 13,55 ℳ., 17,84 ℳ. ꝛc.

Wie viel bekommt man heraus, wenn man 1 Doppelkrone hingibt und 4,87 ℳ. (11,45 ℳ., 15,84 ℳ.) zu bezahlen hat?

Aehnliche Uebungen, wie mit Mark und Pfennigen, werden auch mit Meter und Centimeter, Hektoliter und Liter ꝛc. vorgenommen.

3 ℳ. 40 ₰. — 94 ₰!

a. 94 = 40 + 54; 3 ℳ. 40 ₰. — 40 ₰. = 3 ℳ., 3 ℳ. — 54 ₰. = 2,46 ℳ.
b. 3,40 ℳ. = 340 ₰.; 340 — 90 = 250, — 4 = 246 ₰. = 2,46 ℳ.
c. 3 ℳ. — 94 ₰. = 2 ℳ. 6 ₰.; 2 ℳ. 6 ₰. + 40 ₰. = 2 ℳ. 46 ₰.

6 ℳ. 50 ₰. — 2 ℳ. 84 ₰.!

6,50 ℳ. — 2,84 ℳ. = 650 ₰. — 284 ₰.; 650 — 200 = 450; 450 — 80 = 370, und 370 — 4 = 366; 366 ₰. = 3 ℳ. 66 ₰.

1000 — 500, 800, 300 ꝛc.; 1000 — 40, 450, 280, 560, 330 ꝛc.
1000 — 65, 274, 312, 581, 728, 439, 643, 194 u. s. w.

1 Kilogramm — 345 Gramm!

1 kg = 1000 g; 1000 — 300 = 700, — 40 = 660, — 5 = 655; 1 kg — 345 g = 655 g. — Dergleichen Aufgaben mehr.

8 Kilogramm — 3,780 Kilogr.!

8 kg — 3 kg = 5 kg; 5 kg = 4 kg + 1000 g; 1000 — 780 = 220; es bleiben also 4 kg + 220 g.

Schriftlich.

1) 4725,36 ℳ. — 1984,95 ℳ. = ?

Wir setzen die Zahlen wie beim Addiren, Komma unter Komma, und denken:

4725,36 ℳ.	4725 ℳ. 36 ₰. = 472536 ₰.
— 1984,95 „	1984 ℳ. 95 ₰. = 198495 ₰.
2740,41 ℳ.	

Nun ziehen wir die kleinere Anzahl der Pfennige von der größeren ab und verwandeln den Rest derselben entweder schon während des Rechnens, oder zuletzt in Mark. (§. 151.)

2) 9864 ℳ. — 4785,32 ℳ. = ?

9864,00 ℳ.	9864 ℳ. = 986400 ₰.
— 4785,32 „	4785 ℳ. 32 ₰. = 478532 ₰.
5078,68 ℳ.	

Wir drücken wieder beide Zahlen in Pfennigen aus, d. h. wir *lesen* sie als solche. Bei der Abzugszahl können wir es ohne Weiteres thun. 4785 ℳ. 32 ₰. = 478532 ₰. Die 9864 ℳ. verwandeln wir in Pfennige, indem wir sie mit 100 multipliciren, der Zahl also 2 Nullen beifügen. 9864 ℳ. = 986400 ₰.

Bei dem *Subtrahiren* müssen beide Zahlen gleichnamig gemacht werden. Warum in dem vorstehenden Beispiele?

3) 8,04 ha — 5,7836 ha =?

8,0400 ha	8 ha 4 a = 804 a = 80 400 qm
— 5,7836 „	5 ha 78 a 36 qm = 57 836 qm
2,2564 ha	

Die Vollzahl 8 ha 4 a = 804 a; die Abzugszahl 5 ha 78 a 36 qm = 57836 qm. Ar und Quadratmeter sind ungleiche Benennungen. Wir verwandeln die beiden ungleichnamigen Zahlen in gleichnamige, indem wir die 804 Ar auch zu Quadratmeter machen. 804 a = 804 × 100 = 80400 qm.

80400 qm — 57836 qm = 22564 qm = 2,2564 ha.

4) 821,35 hl — 378 hl =?	5) 76,54 m — 48,7 m =?
8 2 1 , 3 5 hl	7 6 , 5 4 m
— 3 7 8 , 0 0 „	— 4 8 , 7 0 „
4 4 3 , 3 5 hl	2 7 , 8 4 m

§. 218. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich.

Eine geeignete Stelle finden hier die leichtesten Fälle aus der Gewinn- und Verlustrechnung.

1) Ein Obsthändler kauft das Pfund Kirschen um 16 Pfg.; wie viel gewinnt oder verliert er daran, wenn er es um 20 Pfg. (um 12, um 24, um 10, um 30 Pfg. wieder verkauft?

2) Einen Gastwirth kostet das Liter Wein 72 Pfg.; er verkauft es aber um 1,12 ℳ. Wie viel gewinnt er daran?

Der Gastwirth gewinnt am Liter so viel, als 1,12 ℳ. mehr ist, denn 72 ₰. Und wie findest du das?

a. Ich sehe zu, wie viel ich zu 72 ₰. legen muß, um 1,12 ℳ. zu erhalten. Zu 72 ₰. muß ich noch 8 + 20 oder 28 ₰. legen, um 1 ℳ. zu erhalten; 28 ₰. + 12 ₰. = 40 ₰.

b. Ich ziehe 72 ₰. von 1,12 ℳ. ab, und sehe zu, was übrig bleibt. 72 ₰. von 1 ℳ. oder 100 ₰. bleiben 28 ₰., von 1,12 ℳ. bleiben also 28 ₰. + 12 ₰. oder 40 ₰.

Der Gastwirth gewinnt also am Liter 40 ₰.

3) Ein Kaufmann hat für das Meter Tuch 3,30 ℳ. bezahlt, kann aber nur 2,42 ℳ. dafür lösen; wie viel verliert er daran?

Er verliert so viel, als 2,42 ℳ. weniger ist, denn 3,30 ℳ. Und wie findest du das?

a. Ich sehe zu, wie viel ich von 3,30 ℳ. wegnehmen muß, um auf 2,42 ℳ. herunter zu kommen, oder wie viel ich auf 2,42 ℳ. legen muß, um auf 3,30 ℳ. hinauf zu kommen.

b. Ich ziehe 2,42 ℳ. von 3,30 ℳ. ab.

4) Ein Kaufmann zahlt für das Kilogramm einer Waare 75 ₰. und verkauft es mit 21 ₰. Gewinn; wie viel läßt er sich dafür bezahlen?

Um 75 ₰. hat er das Kilogramm gekauft. Verkauft er es mit 1 ₰. Gewinn, so löst er 75 ₰. + 1 ₰.; verkauft er es mit 2 ₰. Gewinn, so

löst er 75 ₰. + 2 ₰. Er verkauft aber mit 21 ₰. Gewinn; also löst er 75 ₰. + 21 ₰. oder 96 ₰.

5) A kauft ein Pferd um 260 ℳ. und verkauft es wieder mit 28 ℳ. Verlust, wie theuer also?

Würde A nur 1 ℳ. verlieren, so würde er 260 ℳ. — 1 ℳ. lösen; würde er 2 ℳ. verlieren, so würde er 260 ℳ. — 2 ℳ. lösen. Da er 28 ℳ. verliert, so löst er 260 ℳ. — 28 ℳ. = 232 ℳ.

B. Schriftlich.

Eine Bauersfrau löst für verkaufte Gänse 18,45 ℳ., für Butter und Schmalz 30,84 ℳ. und für Eier 24,15 ℳ.; dagegen gibt sie aus für Zeug zu einem Kleide 15,75 ℳ., für Kaffee und Zucker 9,64 ℳ. und für Gewürz 2,50 ℳ. Wie viel Geld bleibt ihr übrig?

Auflösung und Ausrechnung.

Zuerst muß ich suchen, wie viel die Frau im Ganzen eingenommen hat. Sie hat eingenommen 18,45 ℳ. + 30,84 ℳ. + 24,15 ℳ. Das muß ich also zusammenzählen. Dann suche ich, wie viel sie im Ganzen ausgegeben hat. Ausgegeben hat sie 15,75 ℳ. + 9,64 ℳ. + 2,50 ℳ. Das muß ich auch zusammenzählen. Dann ziehe ich die ganze Ausgabe von der ganzen Einnahme ab.

	18,45	ℳ.	15,75	ℳ.
	30,84	"	9,64	"
	24,15	"	2,50	"
Einnahme	73,44	ℳ.	27,89	ℳ.
Ausgabe	27,89	"		
Rest	45,55	ℳ.		

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

IV. Multipliciren.

§. 219. Verfahren.

A. Mündlich.

1. Multiplikand ist eine einfach benannte Zahl.

a. Ohne Anwendung von Rechenvortheilen.

9 × 28 ₰.!

9×20=180, u. 9×8=72; 180+72=252; 252 ₰. = 2,52 ℳ.

12 × 37 ₰.!

10×37=370, u. 2×37=74; 370+74=444; 444 ₰. = 4,44 ℳ.

b. Mit Anwendung von Rechenvortheilen.

24 × 50 ₰.!

a. 2×50 ₰. = 100 ₰. = 1 ℳ. So oft ich 2×50 ₰. habe, so oft habe ich 1 ℳ.; 24=12×2; 24×50 ₰. = 12×2×50 ₰., also auch = 12 × 1 ℳ. = 12 ℳ.

b. 50 ₰. = ½ ℳ.; 2 × 50 ₰. = 2 × ½ ℳ., 3 × 50 ₰. = 3 × ½ ℳ.; 24 × 50 ₰. = 24 × ½ ℳ.; 24 × ½ ℳ. = $^{24}/_2$ ℳ. = 12 ℳ.
Hier lasse man die Uebung eintreten, Halbe in Ganze zu verwandeln. $^6/_2 = 3$, $^{18}/_2 = 9$, $^{11}/_2 = 5^1/_2$, $^{25}/_2 = 12^1/_2$ rc.

27 × 50 ₰.! 27 × 50 ₰. = 26 × 50 ₰. + 1 × 50 ₰. = 13,50 ℳ.
Oder: 27 × 50 ₰. = 27 × ½ ℳ. = $^{27}/_2$ ℳ. = $13^1/_2$ ℳ. = 13,50 ℳ.
So bis zur Schlagfertigkeit. Dann eben so auch mit Liter und Hektoliter, Centimeter und Meter rc.

---

16 × 25 ₰.!
a. 4 × 25 ₰. = 100 ₰. = 1 ℳ. So oft ich 4 × 25 ₰. habe, so oft habe ich 1 ℳ.; 16 × 25 ₰. = 4 × 4 × 25 ₰. = 4 × 1 ℳ. = 4 ℳ.
b. 25 ₰. = ¼ ℳ.; 16 × 25 ₰. = 16 × ¼ ℳ. = $^{16}/_4$ ℳ. = 4 ℳ.
Hier tritt die Uebung ein, Viertel in Ganze zu verwandeln. $^8/_4 = 2$, $^{12}/_4 = 3$, $^{24}/_4 = 6$ rc.; $^5/_4 = 1^1/_4$, $^{11}/_4 = 2^3/_4$, $^{17}/_4 = 4^1/_4$ rc.

31 × 25 ₰.!
a. 31 × 25 ₰. = 28 × 25 ₰. + 3 × 25 ₰. = 7,75 ℳ.
b. 31 × 25 ₰. = 31 × ¼ ℳ. = $^{31}/_4$ ℳ. = $7^3/_4$ ℳ. = 7,75 ℳ.

7 × 75 ₰.!
75 ₰. = ¾ ℳ.; 7 × 75 ₰. = 7 × ¾ ℳ.; 7 × ¾ ℳ. = $^{21}/_4$ ℳ. = $5^1/_4$ ℳ. = 5,25 ℳ.

84 × 75 ₰.!
a. 84 × 25 ₰. = 21 ℳ.; 84 × 75 ₰. = 3 × 21 ℳ. oder 63 ℳ.
b. 84 × ¼ ℳ. = 21 ℳ.; 84 × ¾ ℳ. = 3 × 21 oder 63 ℳ.
c. 75 = 50 + 25; 84 × 50 ₰. = 42 ℳ.; 84 × 25 ₰. = 21 ℳ.; 42 ℳ. + 21 ℳ. = 63 ℳ.

47 × 75 ₰.!
47 × 75 ₰. = 47 × ¾ ℳ.; 47 × ¼ ℳ. = $11^3/_4$ ℳ.; 47 × ¾ ℳ. = 3 × $11^3/_4$ ℳ.; 3 × 11 = 33, und 3 × ¾ = $^9/_4$ oder $2^1/_4$; 33 ℳ. + $2^1/_4$ ℳ. = $35^1/_4$ ℳ. = 35,25 ℳ.
Auch diese Uebungen bis zur Schlagfertigkeit, und dann eben so mit Liter und Hektoliter, Centimeter und Meter rc.

10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90 Pfg. werden als Zehntelmark aufgefaßt. Daher nun die Uebung, Zehntel in Ganze zu verwandeln oder, was dasselbe ist, Zehntel in Decimalform sich vorzustellen.

Wie schreibt man 1 z? (0 Komma 1) 2 z! (0 Komma 2) u. s. w. Wie schreibt man aber 10 z? 10 z = 1 Ganzes und 0 z; man schreibt also 1 Komma 0 (1,0) 11 z! (1,1) 18 z! (1,8) 26 z! (2,6) 45 z! (4,5) 75 z! (7,5) 100 z! (10,0) 154 z! (15,4) u. s. w.

Welche Anzahl von Pfennigen kann man als Zehntelmark betrachten und wie schreibt man sie in Decimalform?
10 ₰. = 0,1 ℳ.; 20 ₰. = 0,2 ℳ.; 30 ₰. = 0,3 ℳ.; 40 ₰. = 0,4 ℳ. rc.

Rechnet nun so
45 × 10 ₰.! 45 × 0,1 ℳ. = 4,5 ℳ. = 4 ℳ. 50 ₰.
36 × 20 ₰.! 36 × 0,2 ℳ. = 7,2 ℳ. = 7 ℳ. 20 ₰.

15 × 60 ₰.! 15 × 0,6 ℳ = 9,0 ℳ = 9 ℳ.
48 × 40 ₰.! 48 × 4 = 160 + 32 = 192; 19,2 ℳ = 19 ℳ 20 ₰.
83 × 70 ₰.! 83 × 7 = 560 + 21 = 581; 58,1 ℳ = 58 ℳ 10 ₰

---

44 × 53 ₰.! 44 × 50 ₰ = 22 ℳ; 44 × 3 ₰ = 132 ₰. = 1 ℳ 32 ₰.; 22 ℳ + 1 ℳ 32 ₰. = 23 ℳ 32 ₰.
15 × 76 ₰.! 15 × $^3/_4$ ℳ = $^{45}/_4$ = $11^1/_4$ ℳ = 11 ℳ 25 ₰.; 15 × 1 ₰. = 15 ₰.; 11 ℳ 25 ₰. + 15 ₰. = 11 ℳ 40 ₰.
92 × 27 ₰.! 92 × 25 ₰. = 23 ℳ; 92 × 2 ₰. = 1 ℳ 84 ₰.; 23 ℳ + 1 ℳ 84 ₰. = 24 ℳ 84 ₰.
36 × 99 ₰.! 36 × 99 ₰. = 36 × 1 ℳ − 36 × 1 ₰. = 36 ℳ − 36 ₰. = 35 ℳ 64 ₰.
72 × 48 ₰.! 72 × 48 ₰. = 72 × 50 ₰. − 72 × 2 ₰.; 72 × 50 ₰. = 36 ℳ; 72 × 2 ₰. = 1,44 ℳ; 36 ℳ − 1,44 ℳ = 34 ℳ 56 ₰.
55 × 77 ₰.! 55 × 0,8 ℳ = 44,0 ℳ = 44 ℳ; 55 × 3 ₰. = 165 ₰. = 1,65 ℳ; 44 ℳ − 1,65 ℳ = 42 ℳ 35 ₰.
19 × 12 ₰.! 19 × 12 = 20 × 12 − 1 × 12; 20 × 12 = 240, 1 × 12 = 12; 240 − 12 = 228; 228 ₰. = 2 ℳ 28 ₰.
16 × 45 ₰.! 16 × 45 = 8 × 2 × 45; 2 × 45 = 90, u. 8 × 90 = 720; 720 ₰. = 7 ℳ 20 ₰. Oder:
Statt 45 setze ich das Doppelte und statt 16 nur die Hälfte. 16 × 45 = 8 × 90 = 720; 720 ₰. = 7 ℳ 20 ₰.
68 × 5 ₰.! 68 × 10 ₰. = 6,8 ℳ; 68 × 5 ₰. ist halb so viel, also 3,4 ℳ = 3 ℳ 40 ₰.

---

100 × 37 ₰.!
a. 100 × 37 = 3700; 3700 ₰ = 37 ℳ
b. 100 × 1 ₰. = 1 ℳ; 100 × 2 ₰. = 2 × 1 ℳ; 100 × 3 ₰. = 3 × 1 ℳ, 100 × 37 ₰. = 37 × 1 ℳ = 37 ℳ
50 × 86 ₰.! 50 × 86 = 86 × 50; 86 × 50 ₰. = 43 ℳ
25 × 72 ₰! 25 × 72 = 72 × 25; 72 × 25 ₰. = 18 ℳ
75 × 28 ₰.! 75 × 28 = 28 × 75; 28 × 75 ₰. = 21 ℳ

Wie die ersten Uebungen, so werden auch die letzteren bis zur Sicherheit und Fertigkeit fortgesetzt und dabei auch auf Liter und Hektoliter, Centimeter und Meter, Pfund und Centner, Quadratdecimeter und Quadratmeter ꝛc. ausgedehnt.

2. Der Multiplikand ist eine mehrfach benannte Zahl.

3 × 7 ℳ 45 ₰.!
3 × 7,45 ℳ = 7,45 ℳ + 7,45 ℳ + 7,45 ℳ = 3 × 7 ℳ + 3 × 45 ₰.; also sind sowohl die 7 ℳ, als die 45 ₰. 3mal zu nehmen. 3 × 7 ℳ = 21 ℳ; 3 × 45 ₰. = 135 ₰. = 1,35 ℳ; 21 ℳ + 1,35 ℳ = 22 ℳ 35 ₰.
8 × 15 m 60 cm!
8 × 15 m = 120 m; 8 × 60 cm = 480 cm = 4,80 m; 120 m + 4,80 m = 124 m 60 cm.

6 × 18 hl 65 l!

a. 6 × 18 hl = 60 + 48 = 108 hl; 6 × 65 l = 360 + 30 = 390 l = 3 hl 90 l; 108 hl + 3 hl 90 l = 111 hl 90 l.

b. 6 × 18 hl = 108 hl; 6 × 65 l = 6 × 50 + 6 × 15 l; 6 × 50 l = 3 hl, und 6 × 15 l = 90 l; 108 hl + 3 hl 90 l = 111,90 hl.

Schriftlich.

1) 0,5 3 ℳ. × 37!

```
  0,5 3 ℳ.
  × 3 7
  ─────
  3 7 1
1 5 9
─────────
1 9,6 1 ℳ.
```

0,53 ℳ. = 53 ₰.; 37 × 53 ₰. = 1961 ₰. = 19,61 ℳ.

2) 0,6 7 hl × 84!

```
  0,6 7 hl
  × 8 4
  ─────
  2 6 8
5 3 6
─────────
5 6,2 8 hl
```

0,67 hl = 67 l; 84 × 67 l = 5628 l = 56,28 hl.

3) 127,87 ℳ. × 36! (36mal zu nehmen, mit 36 zu mult.)

```
  1 2 7,8 7 ℳ.
      × 3 6
  ─────────
  7 6 7 2 2
3 8 3 6 1
─────────────
4 6 0 3,3 2 ℳ.
```

127 ℳ. 87 ₰. = 12787 ₰.; diese sind 36mal zu nehmen.

Produkt: 460332 ₰. = 4603 ℳ. 32 ₰.

4) 17,58 m × 24!

```
  1 7,5 8 m
    × 2 4
  ───────
  7 0 3 2
3 5 1 6
───────────
4 2 1,9 2 m
```

17 m 58 cm = 1758 cm. Ich rechne also 24 × 1758 cm.

Produkt: 42192 cm = 421 m 92 cm.

5) 8,938 kg × 37!

```
    8,9 3 8 kg
      × 3 7
  ─────────
  6 2 5 6 6
2 6 8 1 4
─────────────
3 3 0,7 0 6 kg
```

8 kg 938 g = 8938 g. Ich rechne also 37 × 8938 g.

Produkt: 330706 g = 330 kg 706 g.

Man multiplizirt eine Decimalzahl wie eine ganze Zahl und schneidet vom Produkte so viel Stellen ab, als der Multiplikand (die benannte Zahl) Decimalstellen hat.

§. 220. Der Multiplikator ist eine dekadische Zahl.

58,94 ℳ. × 10 = 5894 ₰. × 10 = 58940 ₰. = 589,40 ℳ.; also ist **58,94 ℳ. × 10 = 589,4 ℳ.**

Die Ziffern sind dieselben; das Komma aber ist um eine Stelle nach rechts gerückt, und in Folge dessen hat sich jede Ziffer um eine Stelle vorgeschoben und gilt jetzt 10mal so viel. Die 5 Z sind zu 5 H, die 8 E zu 8 Z, die 9 z zu 9 E, die 4 h zu 4 z geworden.

Eine Decimalzahl wird mit 10 multiplicirt, wenn man das Komma um **eine** Stelle nach rechts rückt.

Wie kann man demnach auch im Kopfe rechnen:

10 × 0,48 ℳ.? (= 4,8 ℳ. = 4 ℳ. 80 ₰.)
10 × 3,56 ℳ.? (= 35,6 ℳ. = 35 ℳ. 60 ₰.)
10 × 8,75 ℳ.? (= 87,5 ℳ. = 87 ℳ. 50 ₰.)
u. s. w.

73,68 ℳ. × 100 = 7368 ₰. × 100 = 7368 ℳ.; also ist
73,68 ℳ. × 100 = 7368 ℳ.

Das Komma ist hier um 2 Stellen nach rechts gerückt und in Folge dessen weggefallen; die Ziffern aber haben sich um 2 Stellen vorgeschoben und gelten jetzt 100mal so viel. Es genügt, dieß an der Ziffer nachzuweisen, welche vorher in der Einerstelle stand. Welche Ziffer stand vorher in der Einerstelle? (3) Wo steht sie jetzt? Jetzt gilt sie also wie vielmal so viel?

Eine Decimalzahl wird mit 100 multiplicirt, wenn man das Komma um 2 Stellen nach rechts rückt. — Wie wird man eine Decimalzahl mit 1000 multipliciren? Wie aber, wenn die Decimalzahl nur 2 Decimalstellen hat? (Dann hängt man noch eine Null an.)

Schreibt:

3 ℳ. 72 ₰.,	mult. mit	10!	3,72 ℳ. × 10	=	37,2 ℳ.
28 ℳ. 95 ₰.,	„ „	10!	28,95 ℳ. × 10	=	289,5 ℳ.
76 ℳ. 36 ₰.,	„ „	100!	76,36 ℳ. × 100	=	7636 ℳ.
8 ℳ. 54 ₰.,	„ „	1000!	8,54 ℳ. × 1000	=	8540 ℳ.
3 m 725 mm,	„ „	10!	3,725 m × 10	=	37,25 m

u. s. w.

§. 221. Die angewandte Zahl.

A. Mündlich.

1) Ein Meter zu 95 ₰.; was kosten 31 m?

Aufl. Ein Meter kostet 95 ₰.; 2 m kosten 2 × 95 ₰.; 3 m kosten 3 × 95 ₰.; 31 m kosten daher 31 × 95 ₰.

Ausr. 31 × 95 ₰. = 31 × 1 ℳ. — 31 × 5 ₰. = 31 ℳ. — 1,55 ℳ. = 29,45 ℳ. Also kosten 31 m 29 ℳ. 45 ₰.

2) Ein Arbeiter verdient täglich 1,65 ℳ.; wie viel in 15 Tagen?

Aufl. Wenn 1 Arbeiter in 1 Tag 6 ℳ. 65 ₰. verdient, so verdient er in 15 Tg. 15 × 1 ℳ. 65 ₰.

Ausr. 10 × 1,65 ℳ. = 16,5 ℳ. oder 16 ℳ. 50 ₰.; 5 × 1,65 ℳ. = 5 ℳ. + 3 ℳ. 25 ₰. = 8 ℳ. 25 ₰.; 16 ℳ. 50 ₰. + 8 ℳ. 25 ₰. = 24 ℳ. 75 ₰.

3) 1 Liter zu 56 (72, 85, 96) Pfg.; wie hoch kommt 1 hl?

Ausr. 1 hl = 100 l. Wenn also 1 Liter 56 ₰. kostet, so kostet 1 Hektol. 100 × 56 ₰. = 56 ℳ.

4) Das Ar zu 8,75 ℳ.; wie hoch kommt das Hektar?

Ausr. 1 Hektar = 100 Ar und kostet daher auch 100 × 8,75 ℳ. = 875 ℳ.

B. Schriftlich.

1) Das Hektoliter Wein zu 78,45 ℳ; was kosten 28 hl?
Aufl. Kostet 1 hl 78,45 ℳ, so kosten 28 hl 28 × 78,45 ℳ.

```
Ausr.     7 8,4 5 ℳ × 2 8
          6 2 7 6 0
        1 5 6 9 0
        ─────────────
        2 1 9 6,6 0 ℳ
```

2) Die bayr. Elle = 0,833 m; wie viel betragen 35 dergl. Ellen?
Aufl. Ist 1 Elle = 0,833 m, so sind 35 Ellen =

```
Ausr.    0,8 3 3 m × 3 5
           4 1 6 5
         2 4 9 9
         ───────────
         2 9,1 5 5 m
```

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

V. Dividiren.

A. Theilen.

§. 222.

Der Unterschied zwischen dem Dividiren im Sinne des Theilens und dem Dividiren im Sinne des Enthaltenseins tritt bei dem Rechnen mit benannten Zahlen besonders scharf hervor. Die beiden Divisionsformen werden daher einzeln behandelt. Wie die Ueberschrift zeigt, beginnen wir mit der Division im Sinne des Theilens.

3 | 12 Pfg. | 4 Pfg.
$^1/_3$ von 12 Pfg. = 4 Pfg.

Der Divisor ist eine reine Zahl; der Dividend und der Quotient sind benannte Zahlen.

§. 223. **Verfahren.**

A. Mündlich.

1. Der Dividend ist eine einfach benannte Zahl.

a Vorübung.

1) Wie heißen die Faktorenpaare von 100?
(2 × 50, 4 × 25, 5 × 20, 10 × 10.)
2) Durch welche Zahlen ist 100 (ohne Rest) theilbar?
(Durch 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.)
3) Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{25}$, $^1/_{50}$) von 100 Pfg.?
4) Wie suchst du den 4ten Theil (den 5ten, 10ten Theil) von 300 Pfg.?
($^1/_4$ von 100 ₰. = 25 ₰.; $^1/_4$ von 300 ₰. = 3 × 25 = 75 ₰.)
5) Wie viel beträgt $^1/_{20}$ ($^1/_{25}$, $^1/_{50}$, $^1/_{100}$) von 1700 Liter?
($^1/_{20}$ von 100 l = 5 l; $^1/_{20}$ von 1700 l = 17 × 5 l oder 85 l.)

6) Wie viel ist die Hälfte ($^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$) von 360 Pfd.?
Antw. 360 = 200 + 160; $^1/_2$ von 200 Pfd. = 100 Pfd., $^1/_2$ von 160 Pfd. = 80 Pfd., 100 Pfd. + 80 Pfd. = 180 Pfd.; die Hälfte von 360 Pfd. = 180 Pfd.
Oder: Die Hälfte von 36 Pfd. = 10 Pfd., von 360 Pfd. also 180 Pfd.

Gut ist es, das Zerlegen der Produktzahlen des ersten Hunderts in ihre Faktorenpaare hier wiederholen zu lassen. Ist der Schüler sich augenblicklich bewußt, daß z. B. 72 = 4 × 18; so weiß er auch ohne Weiteres, daß $^1/_4$ von 72 = 18 und $^1/_4$ von 720 = 180.

7) Wie läßt sich der 16. Theil von 360 finden?
Antw. 360 = 320 + 40 = 320 + 32 + 8; $^1/_{16}$ von 320 = 20, und $^1/_{16}$ von 32 + 8 = $2^8/_{16}$; 20 + $2^8/_{16}$ = $22^8/_{16}$.
Oder: 16 = 4 × 4; $^1/_4$ von 360 = 90, u. $^1/_4$ von 90 = $22^2/_4$.
Oder: 16 = 8 × 2; $^1/_8$ von 360 = 45, u. $^1/_2$ von 45 = $22^1/_2$.

Der 16. Theil von 360 beträgt nach der ersten Ausrechnung $22^8/_{16}$, nach der zweiten $22^2/_4$, nach der dritten $22^1/_2$. Sind das wirklich gleiche Ergebnisse? Sind $^8/_{16}$ = $^2/_4$ = $^1/_2$? Um die Schüler hievon zu überzeugen, so lasse man $^8/_{16}$, dann $^2/_4$, dann $^1/_2$ von der Zahl 16 suchen. Eben so von 32, von 48, von 64. Auch an einer Linie, welche man zuerst in 2, dann in 4, dann in 16 gleiche Theile theilt, kann es nachgewiesen werden.

b. Die Zahl des Dividenden ist kleiner als der Theiler.

aa. Der Theiler geht in der Reduktionszahl auf.

1) Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{25}$) von 1 Mark?
(1 Mark = 100 Pfg.; die Hälfte von 100 Pfg. = 50 Pfg.)
Wie v. Centimeter beträgt $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$ ꝛc.) von 1 Meter?
Wie v. Are macht $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$ ꝛc.) von 1 Hektar?
Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$, $^1/_5$ ꝛc.) von 1 Hektoliter?
Wie viel ist $^1/_2$ ($^1/_4$ ꝛc.) von 1 Ctr.? von 1 Kilogramm?

2) Wie viel beträgt der 4te Theil von 3 Mark?
Ausr. Der 4. Theil von 1 ℳ = 25 ₰, von 3 ℳ = 3 × 25 od. 75 ₰.
Ebenso wird gesucht

$^1/_4$ von 3 m (in cm)	$^1/_5$ von 2 ℳ	$^1/_{10}$ von 3 (7) ℳ
$^1/_4$ von 3 hl	$^1/_5$ von 3 m	$^1/_{10}$ von 4 (6) hl
$^1/_4$ von 3 kg	$^1/_5$ von 4 hl	$^1/_{10}$ von 5 (8) kg
$^1/_4$ von 3 Ctr.	$^1/_5$ von 5 kg	$^1/_{10}$ von 7 (9) Ctr.

$^1/_{20}$ von 13 ℳ,	17 m,	19 hl,	11 kg,	16 Ctr.,	15 Ar.
$^1/_{25}$ von 20 ℳ,	24 m,	21 hl,	22 kg,	23 Ctr.,	19 Ar.
$^1/_{50}$ von 29 ℳ,	32 m,	48 hl,	36 kg,	45 Ctr.,	24 Hektar
$^1/_{100}$ von 50 ℳ,	64 m,	75 hl,	84 kg,	96 Ctr.,	72 Hektar

bb. Der Theiler geht in der Reduktionszahl nicht auf.

1) Wie viel beträgt der 3te Theil von 2 Mark?
Ausr. 3 geht in 100 nicht auf. Ich verwandle daher die 2 ℳ in Pfennige; 2 ℳ = 200 Pfg.; 200 = 180 + 20; der 3. Theil

von 180 Pfg. = 60 Pfg., und der 3. Theil von 20 Pfg. = $6^2/_3$ Pfg.; 60 + $6^2/_3$ = $66^2/_3$ Pfg. Der 3. Theil von 2 ℳ = $66^2/_3$ Pfg.

Oder: Die nächste Zahl unter 100, in welcher 3 aufgeht, ist 99; ich denke mir daher die Mark als 99 Pfg. + 1 Pfg. und sage: der 3. Theil von 1 ℳ = 33 Pfg., Rest 1 Pfg.; der 3. Theil von 2 ℳ = 2 × 33 oder 66 Pfg., Rest 2 × 1 Pfg. oder 2 Pfg.; von diesen 2 Pfg. ist der 3. Theil = $^2/_3$ Pfg. Also ist $^1/_3$ von 2 ℳ = $66^2/_3$ Pfg.

2) Wie viel ist $^1/_{12}$ von 7 ℳ?

Ausr. 12 geht in 100 nicht auf. 7 ℳ = 700 Pfg.; 700 = 600 + 100 = 600 + 96 + 4; $^1/_{12}$ von 60 = 5, von 600 = 50; $^1/_{12}$ von 96 = 8; 50 + 8 = 58; $^1/_{12}$ von 4 = $^4/_{12}$. Also ist $^1/_{12}$ von 7 Mark = $58^4/_{12}$ Pfg.

Oder: 12 = 3 × 4; $^1/_4$ von 7 ℳ = 1 ℳ 75 Pfg., und $^1/_3$ von 175 (= 150 + 25) Pfg. = 50 + $8^1/_3$ = $58^1/_3$ Pfg.

Oder: Die nächste Zahl unter 100, in welcher 12 aufgeht, ist 96; ich denke mir daher die Mark als 96 + 4 Pfg. und sage: $^1/_{12}$ von 1 ℳ = 8 Pfg., Rest 4 Pfg.; $^1/_{12}$ von 7 ℳ = 7 × 8 oder 56 Pfg., Rest 7 × 4 oder 28 Pfg.; von diesen 28 Pfg. ist $^1/_{12}$ = $2^4/_{12}$ Pfg.; 56 + $2^4/_{12}$ Pfg. = $58^4/_{12}$ Pfg.

3) Wie viel beträgt der 35. Theil von 28 ℳ?

Ausr. 35 = 5 × 7. Der 7. Theil von 28 ℳ = 4 ℳ, und der 5. Theil von 4 ℳ = 4 × 20 oder 80 Pfg.

c. Die Zahl des Dividenden ist größer als der Theiler.

1) $^1/_4$ von 75 ℳ = ?

Ausr. 75 = 72 + 3; $^1/_4$ von 72 ℳ = 18 ℳ und $^1/_4$ von 3 ℳ = 3 × 25 oder 75 Pfg. Der 4. Theil von 75 ℳ = 18 ℳ 75 Pfg.

2) $^1/_{14}$ von 64 Hektoliter = ?

Ausr. 64 = 56 + 8; $^1/_{14}$ von 56 hl = 4 hl. Nun habe ich noch den 14. Theil von 8 hl zu suchen. (100 = 98 + 2.) Der 14. Theil von 1 hl = 7 l, Rest 2 l; $^1/_{14}$ von 8 hl = 8 × 7 oder 56 l, Rest 8 × 2 oder 16 l, und von diesen 16 l ist $^1/_{14}$ = $1^2/_{14}$ l; 56 l + $1^2/_{14}$ l = $57^2/_{14}$. Also ist $^1/_{14}$ von 64 hl = 4 hl 57 $^2/_{14}$ l.

2. Der Dividend ist eine mehrfach benannte Zahl.

a. Die zu theilenden benannten Zahlen sind (von ihrer Benennung abgesehen) reine Vielfache des Theilers.

1) Wie viel ist die Hälfte von 6 ℳ 32 Pfg.? von 14 ℳ 84 Pfg.? von 32 ℳ 90 Pfg.?

2) Suche $^1/_3$ von 12 m 18 cm! von 15 m 75 cm!

3) Wie viel ist $^1/_4$ von 72 Ctr. 48 Pfd.? Wie viel $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$?

4) Wie groß ist der 5. Theil von 35 hl 70 l? von 90 hl 65 l?

5) Welches ist der 15. Theil von 45 kg 90 Dekagr.?

b. Die Zahl der höheren Benennung des Dividenden ist (als reine Zahl betrachtet) kleiner als der Theiler.

1) $^1/_3$ von 2 *M.* 67 Pfg. =?

Ausr. Der 3. Theil von 2 *M.* ist nicht 1 *M.* Ich verwandle daher die Mark in Pfennige und nehme die 67 ₰. dazu. 2 *M.* 67 ₰. = 267 ₰.; 267 = 240 + 27; $^1/_3$ von 240 = 80, und $^1/_3$ von 27 = 9; 80 + 9 = 89. Also ist $^1/_3$ von 2 *M.* 67 ₰. = 89 ₰..

2) $^1/_{10}$ von 8 Ctr. 75 Pfd. =?

Ausr. $^1/_{10}$ von 8 Ctr. ist nicht 1 Ctr.; 10 geht in 100 auf; $^1/_{10}$ von 1 Ctr. = 10 Pfd., von 8 Ctr. = 8 × 10 oder 80 Pfd.; $^1/_{10}$ von 75 Pfd. = $7^5/_{10}$ Pfd.; 80 Pfd. + $7^5/_{10}$ Pfd. = $87^5/_{10}$ Pfd. Also ist $^1/_{10}$ von 8 Ctr. 75 Pfd. = $87^5/_{10}$ Pfd. (= 87 Pfd. 250 g.)

c. Die Zahl der höhern Benennung des Dividenden ist ein vermischtes Vielfaches vom Theiler.

1) $^1/_8$ von 31 *M.* 55!

Ausr. $^1/_8$ von 31 *M.*=3 *M.*, Rest 7 *M.*; 7 *M.* 55 ₰. = 755 ₰.; 755 = 720 + 35; $^1/_8$ von 720 ₰. = 90 ₰., und $^1/_8$ von 35 ₰. = $4^3/_8$ ₰.; 90 + $4^3/_8$ ₰. = $94^3/_8$ ₰. Also ist $^1/_8$ von 31 *M.* 55 ₰. = 3 *M.* $94^3/_8$ ₰.

2) $^1/_6$ von 23 kg 850 g!

Ausr. $^1/_6$ von 23 kg = 3 kg, Rest 5 kg; 5 kg + 850 g = 5850 g; 5850 = 5400 + 450; $^1/_6$ von 5400 = 900, und $^1/_6$ von 450 oder 420 + 30 = 75; 900 + 75 = 975. Also ist $^1/_6$ von 23 kg 850 g = 3 kg 975 g. Oder: $^1/_6$ von 23 kg 850 g = $^1/_6$ von 24 kg — $^1/_6$ von 150 g = 4 kg — 25 g = 3 kg 975 g.

B. Schriftlich.

Zuerst werden die Aufgaben unter §. 174 in der dort angegebenen Weise (nochmal) gerechnet. Die Zahlen sind so gewählt, daß es, nachdem der Quotient eine, oder zwei, oder drei Decimalstellen erhalten hat, aufgeht.

Nach diesen vorbereitenden Aufgaben werden nun solche gerechnet, wie das Leben sie bietet. Das Leben aber nimmt keine Rücksicht darauf, ob die Division aufgeht oder nicht. Es kommen daher jetzt auch solche Divisionsaufgaben zur Berechnung, bei welchen sich bei fortgesetzter Division eine Decimalzahl mit unendlich oder wenigstens sehr vielen Decimalstellen ergeben würde. Da gilt es zu wissen, wie weit die Division fortzusetzen ist, um einen Quotienten von der Genauigkeit zu erhalten, welche mit der Forderung des Lebens im Einklange steht. Diese Forderung ist nicht hoch. Es genügt, daß der Quotient auf 2, höchstens auf 4 Decimalstellen berechnet werde und zwar:

ist die Mark die Hauptzahl, auf 2 Decimalstellen,
ist das Hektoliter die Hauptzahl, auf 2 Decimalstellen,
ist das Meter die Hauptzahl, auf 2, höchstens auf 3 Decim.,
ist das Kilometer die Hauptzahl, auf 3 Decimalstellen,
ist das Quadratmeter die Hauptzahl, auf 4 Decim.,
ist das Ar die Hauptzahl, auf 2 Decimalstellen,

ist das **Hektar** die Hauptzahl, auf 4 Decimalstellen,
ist der **Centner** die Hauptzahl, auf 2 Decimalstellen,
ist das **Kilogramm** die Hauptzahl, auf 3 Decimalstellen.

Daß 0.5 ₰.; 0,6 ₰.; 0,7 ₰.; 0,8 ₰. und 0,0 ₰. oder, was dasselbe ist, 0,005 ℳ.; 0,006 ℳ. 2c. für einen **ganzen** Pfennig zu rechnen seien, wonach z. B. 4,586 ℳ. = 4,59 ℳ., und daß dem ähnlich auch bei den Maßen und Gewichten verfahren werden könne, wird auf einer spätern Stufe mit den Schülern besprochen.

1) Wie viel ist der 7. Theil von 384 ℳ.?

```
7 | 3 8 4 ℳ. | 5 4,8 5 ℳ.
  | 3 5      |
    3 4
    2 8
      6,0
      5 6
        4 0
        3 5
          5
```

Der 7. Theil von 38 Z = 5 Z, Rest 3 Z; 3 Z + 4 E = 34 E; der 7. Theil von 34 E = 4 E, Rest 6 E. Komma! Komma! 6 E = 60 z.

Der 7. Theil von 60 z = 8 z, Rest 4 z; 4 z = 40 h; der 7. Theil von 40 h = 5 h, Rest 5 h.

Diesen Rest könnten wir in Tausendtel verwandeln. Wir thun es nicht, weil es 1000tel-Mark nicht gibt, sondern brechen die Division hier ab. 1/7 von 384 ℳ. = 54 ℳ. 85 ₰., und 5 ₰. bleiben übrig.

2) Wie viel beträgt 1/13 von 516,82 ℳ.?

```
1 3 | 5 1 6,8 2 ℳ. | 3 9,7 5 ℳ.
    | 3 9          |
      1 2 6
      1 1 7
          9,8
          9 1
            7 2
            6 5
              7
```

Wir bestimmen den Quotienten bis auf 2 Decimalstellen.

Der 13. Theil von 51 Z = 3 Z, Rest 12 Z; 12 Z + 6 E = 126 E.

Der 13. Theil von 126 E = 9 E, Rest 9 E; Komma, Komma! 9 E + 8 z = 98 z u. s. w.

1/13 von 516,82 ℳ. = 39,75 ℳ. und 7 ₰. bleiben übrig.

```
3) 1 6 | 7 5 3,5 m | 4 7,0 9 3 m      4) 2 7 | 1 8,4 5 ha | 0,6 8 3 3 ha
       | 6 4       |                         | 1 6 2      |
         1 1 3                                    2 2 5
         1 1 2                                    2 1 6
             1,5 0                                    9 0
             1 4 4                                    8 1
                 6 0                                  9 0
                 4 8                                  8 1
                 1 2 mm Rest.                           9 qm Rest.
```

Die kleinsten Theile von dem Meter sind die Millimeter, von dem Hektar die Quadratmeter. Der 16. Theil von 753,5 m wird daher bis auf 3, der 27. Theil von 18,45 ha bis auf 4 Decimalstellen berechnet.

5) Wie viel ist der 84. Theil von 61 kg?

84	61,0 kg	0,726 kg × 84
	588	2904
	220	5808
	168	16
	520	61,000 kg
	504	
	16	

Das Kilogramm theilen wir bis auf Gramm, also bis auf 3 Decimalstellen. — Der 84. Theil von 61 E = 0 E; Komma, Komma! 61 E = 610 z; der 84. Theil von 610 z = 7 z, Rest 22 z; 22 z = 220 h; der 84. Theil von 220 h = 2 h, Rest 52 h; 52 h = 520 t; der 84. Theil von 520 t = 6 t, Rest 16 t oder 16 Gramm.

§. 224. Der Divisor ist eine dekadische Zahl.

Wie dividirt man eine ganze Zahl, z. B. 3654 ℳ, durch 10?

3654 ℳ : 10 = 365,4 ℳ

Wie viel ist nun aber der 10. Theil von 365,4 ℳ? Der 10. Theil von 3 H = 3 Z, von 6 Z = 6 E, von 5 E = 5 z, von 4 z = 4 h. Aus den 3 H werden also 3 Z, aus den 6 Z werden 6 E, aus den 5 E werden 5 z, und aus den 4 z werden 4 h. Wodurch können wir dieses Alles auf einmal bewirken? Dadurch, daß wir das Komma eine Stelle nach **links** rücken.

365,4 ℳ : 10 = 36,54 ℳ

Wie dividirt man eine ganze Zahl durch 100? Wie wird man nun eine Decimalzahl durch 100 dividiren? Wie dividirt man eine solche Zahl durch 10? Wie also durch 100 oder 10 × 10?

365,4 ℳ : 100 = 3,654 ℳ

Der 100. Theil von 3 H = 3 E u. s. w. Aus den H werden E, aus den Z werden z, aus den E werden h, aus den z werden t. Jede Ziffer hat jetzt den 100. Theil ihres vorigen Werthes; also ist die ganze Zahl durch 100 dividirt. (Tausendtelmark gibt es nicht; die 4 t werden daher gestrichen.)

Eine Decimalzahl wird durch 10 dividirt, wenn man das Komma eine Stelle, durch 100, wenn man es zwei Stellen nach links rückt. Wie wird man eine Decimalzahl durch 10 × 10 × 10, d. i. durch 10 × 100 oder 1000 theilen?

7583,6 : 10 = 758,36	4,29 : 10 = 0,429
7583,6 : 100 = 75,836	65,1 : 100 = 0,651
7583,6 : 1000 = 7,5836	234,5 : 1000 = 0,2345

Schreibt:

725,8; div. durch 10!	725,8 : 10 = 72,58
894,6 „ „ 100!	894,6 : 100 = 8,946
1357,2 „ „ 1000!	1357,2 : 1000 = 1,3572
96,34 ℳ „ „ 10!	96,34 : 10 = 9,634 ℳ

u. s. w.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 225. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

Aufg. 1. 5 Brüder haben 743 ℳ unter sich zu theilen; wie viel bekommt jeder?

Aufl. Die 743 ℳ sind nach der Zahl der Brüder in 5 gleiche Theile zu theilen; also bekommt jeder $1/5$ von 743 ℳ.

Ausr. $743 = 700 + 40 + 3$; $1/5$ von 700 ℳ = 140 ℳ; $1/5$ von 40 ℳ = 8 ℳ; 140 ℳ + 8 ℳ = 148 ℳ; $1/5$ von 3 ℳ $= 3 \times 20$ oder 60 Pfg. Also bekommt jeder 148 ℳ 60 ₰.

Aufg. 2. 9 Meter Zeug kosten 7,38 ℳ; was kostet 1 Meter?

Aufl. Um zu finden, was 1 Meter kostet, so müssen wir die 7,38 ℳ auf die 9 m gleichheitlich vertheilen; auf 1 m kommt $1/9$ von 7,38 ℳ.

Ausr. $1/9$ von 7 ℳ ist nicht 1 ℳ; 7 ℳ + 38 ₰ = 738 ₰; $738 = 720 + 18$; $1/9$ von $720 = 80$, und $1/9$ von $18 = 2$; $80 + 2 = 82$; also kostet 1 Meter 82 Pfennige.

Aufg. 3. Aus 277 Meter 50 Centimeter Tuch sind 75 Kleidungsstücke von gleicher Größe gemacht worden. Wie viel Tuch wurde zu 1 Kleidungsstück verwendet?

Aufl. Die 277 m 50 cm wurden in 75 gleiche Theile getheilt, und aus jedem dieser 75 Theile wurde 1 Kleidungsstück verfertigt. Zu 1 Kleidungsstück wurde also der 75. Theil von 277 m 50 cm verwendet.

```
Ausr.   75 | 277,50 m | 3,70 m
           | 225      |
           -----
              52,5
              525
              -----
                 0
```

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

B. Enthaltensein.

3 Pfg. | 12 Pfg. | 4

(3 Pfg. sind in 12 Pfg. 4mal enthalten.)

Divisor und Dividend sind benannte Zahlen; der Quotient ist eine reine Zahl.

§. 226. Verfahren.

A. Mündlich.

a. Mit gleichbenannten Zahlen. (Als Vorübung.)

1) Wie oft sind 2 Pfg. (3, 4, 5 2c. Pfg.) in 146 Pfg. enthalten?

Ausr. 2 Pfennige sind in 146 Pfennigen so oft enthalten, als 2 in 146; $146 = 140 + 6$; 2 ist in 140 70mal und in 6 3mal, in 146 also 73mal enthalten. Mithin sind 2 Pfg. in 146 Pfg. 2c.

2) Wie oft sind 11 Centimeter in 387 Centimeter enthalten?

Ausr. $387 = 330 + 57 = 330 + 55 + 2$; 11 liegt in 33 3mal, in 330 also 30mal; 11 liegt ferner in 55 5mal und in 2 $2/11$mal; $30 + 5\,2/11 = 35\,2/11$; 11 cm sind also in 387 cm $35\,2/11$mal enthalten.

3) Wie oft sind 18 Liter in 240 Liter enthalten?

Ausr. 240 = 180 + 60 = 180 + 54 + 6; 18 ist in 180 10mal, in 54 3mal und in 6 $^{6}/_{18}$mal; 10 + 3$^{6}/_{18}$ = 13$^{6}/_{18}$; also ꝛc.

Oder: 18 = 3 × 6; 6 ist in 240 40mal und 3 ist in 40 13$^{1}/_{3}$mal enthalten; also sind 18 Liter in 240 Liter 13$^{1}/_{3}$mal enthalten.

Diese Ausrechnungsweise ist nur da anwendbar, wo wenigstens der eine Faktor des Divisors im Dividenden aufgeht.

4) Wie vielmal sind 35 Ar in 210 Ar enthalten?

Ausr. Ich weiß, wie oft 35 in 70 enthalten ist; 210 = 3 × 70; 35 ist in 70 2mal, in 3 × 70 also 3 × 2 oder 6mal enthalten ꝛc.

5) Wie oft sind 25 Gramm in 1275 Gramm enthalten?

Ausr. 25 ist in 100 4mal, in 1200 also 12 × 4 oder 48mal und in 75 noch 3mal, in 1275 also 48 + 3 oder 51mal enthalten; also ꝛc.

6) Wie oft sind 53 Pfund in 472 Pfund enthalten?

Ausr. 53 liegt in 106 2mal, in 4 × 106 oder 424 also 4 × 2 oder 8mal; 472 — 424 = 48; in 48 liegt 53 noch $^{48}/_{53}$mal. Also sind 53 Pfd. in 472 Pfd. 8$^{48}/_{53}$mal enthalten.

7) Wie oft sind 23 Pfennige in 800 Pfennigen enthalten?

Ausr. Ich weiß, wie oft 23 in 92 enthalten ist. 100 = 92 + 8; 23 liegt in 100 4mal und 8 bleibt übrig; 23 liegt in 800 also 8 × 4 oder 32mal, und 8 × 8 oder 64 bleibt übrig. 23 liegt in 64 oder in 46 + 18 noch 2$^{18}/_{23}$mal; 32 + 2$^{18}/_{23}$ = 34$^{18}/_{23}$. Also ꝛc.

8) Wie oft sind 125 Pfennige in 900 Pfennigen enthalten?

Ausr. 125 = 5 × 25, und 900 = 36 × 25; **1** × 25 ist in **2** × 25 so oft als 1 in 2, **2** × 25 ist in **6** × 25 eben so oft als 5 in 6 enthalten. Also ist **5** × 25 in **36** × 25 eben so oft als 5 in 36, nämlich 7$^{1}/_{5}$mal enthalten.

9) 120 in 560 =?

Ausr. 120 in 560 = 12 in 56 = 3 × 4 in 14 × 4 = 3 in 14 = 4$^{2}/_{3}$.

10) Wie oft sind 37 cm in 364 cm enthalten?

Ausr. 37 ist in 370 10mal enthalten; 364 ist um 6 weniger als 370; es geht also nur 9mal, und 37 — 6 oder 31 bleibt übrig. In diesem Reste ist 37 noch $^{31}/_{37}$mal enthalten; 37 cm sind also in 364 cm 9$^{31}/_{37}$mal enthalten.

11) Wie oft sind 29 Liter in 240 Liter enthalten?

Ausr. Anstatt 29 nehme ich 30; 30 ist in 240, wie 3 in 24, 8mal enthalten. 29 ist 8mal enthalten in 8 × 29 oder 232; 240 — 232 = 8; in 8 liegt 29 noch $^{8}/_{29}$mal. Also sind 29 l in 240 l 8$^{8}/_{29}$ mal enthalten.

b. Mit ungleich und mehrfach benannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie oft sind 20 Pfennige in 7 Mark enthalten?

Ausr. 20 Pfg. sind in 7 Mark so oft enthalten, als ich sie davon wegnehmen kann. Pfennige lassen sich ohne Weiteres aber nur von

Pfennigen wegnehmen. Ich verwandle daher die 7 Mark in Pfennige. 7 Mark = 700 Pfg. Nun heißt die Frage: Wie oft sind 20 Pfg. in 700 Pfg. enthalten? Antwort: So oft als 20 in 700. 20 in 700 = 2 in 70 = 35mal. Also sind 20 Pfg. in 7 Mark 35mal enthalten.

Oder: Ich suche zuerst, wie oft 20 Pfg. in 1 Mark, d. i. in 100 Pfg. enthalten sind. 20 Pfg. sind in 1 Mark 5mal, in 7 Mark also 7 × 5 oder 35mal enthalten.

Beispiel 2. Wie oft sind 8 dm in 12 m enthalten.

Ausr. 12 m = 12 × 10 oder 120 dm. Die Frage ist jetzt: Wie oft sind 8 dm in 120 dm enthalten? Antwort: So oft, als 8 in 120 enthalten ist. 8 ist in 80 10mal und in 40 5mal, in 120 also 15mal. Also 2c.

Beispiel 3. Wie oft sind 24 a in 1 ha 15 a enthalten?

Ausr. 1 ha 15 a = 115 a = 96 + 19 a; 24 a sind in 96 a 4mal, in 19 a $^{19}/_{24}$mal, in 115 a also $4^{19}/_{24}$mal enthalten.

Beispiel 4. Wie vielmal lassen sich 48 l von 3 hl 50 l wegnehmen?

Ausr. 48 l lassen sich von 3 hl 50 l so vielmal wegnehmen, als sie in diesen enthalten sind. 3 hl 50 l = 350 l; 50 l sind in 350 l 7mal enthalten; 48 l sind 7mal enthalten in 7 × 48 oder 336 l; 336 von 350 bleibt 14; 48 l sind in diesen 14 l noch $^{14}/_{48}$mal enthalten. Also lassen sich 48 l von 3 hl 50 l $7^{14}/_{48}$mal wegnehmen.

Beispiel 5. 20 ℳ. sind wie vielmal 1 ℳ. 60 ₰.?

Ausr. 20 ℳ. sind so vielmal 1 ℳ. 60 ₰., als diese in 20 ℳ. enthalten sind. 1 ℳ. 60 ₰. = 160 ₰., und 20 ℳ. = 2000 ₰.; 160 ₰. sind in 2000 ₰. so oft enthalten, wie 160 in 2000; 160 in 2000 = 16 in 200 = 8 in 100 = 2 in 25 = $12^1/_2$. Also sind 20 ℳ. = $12^1/_2$ × 1 ℳ. 60 ₰.

B. Schriftlich.

1) Wie oft sind 4,32 ℳ. in 280,80 ℳ. enthalten?

4,32 ℳ.	280,80 ℳ.	
432	28080	65mal
	2592	
	2160	
	2160	

4 ℳ. 32 ₰. = 432 ₰. und 280 ℳ. 80 ₰. = 28080 ₰. 432 ₰. sind in 28080 ₰. so oft enthalten, als 432 in 28080.

1) Wie vielmal sind 5,40 ℳ. in 120 ℳ. enthalten?

5,40	120,00	
540	12000	
9	200	$22^2/_9$
	18	
	20	
	18	
	2	

5 ℳ. 40 ₰. = 540 ₰., und 120 ℳ. = 12000 ₰.

540 ₰. sind in 12000 ₰. so oft enthalten, als 540 in 12000,

540 in 12000, durch 10 gekürzt = 54 in 1200, durch 6 gekürzt = 9 in 200 = $22^2/_9$mal. Also 2c.

3) Wie vielmal sind 0,36 m in 17,28 m enthalten?

0,36	17,28	
36	1728	
9	432	48

0,36 m = 36 cm, 17,28 m = 1728 cm; 36 in 1728, durch 4 gehoben = 9 in 432 = 48mal.

4) Dividire 2,4 m durch 0,025 m!

0,025	2,400	
25	2400	96
	225	
	150	
	150	

0,025 m = 25 Millimeter, und 2,4 m = 24 Decimeter.

Um wie mit ganzen Zahlen dividiren zu können, so machen wir beide Zahlen gleichnamig; wir geben ihnen gleichviel Decimalstellen, und das geschieht, indem wir der Zahl 2,4 zwei Nullen anhängen. Dann heißt die Frage: Wie oft sind 25 mm in 2400 Millimeter enthalten? Antwort: So oft, als 25 in 2400.

5) Wie oft sind 48 a in 27 ha 59 a 86 qm enthalten?

Die Hauptgröße für die Feldmaße ist das Hektar. Die Ar sind Hundertel, die Quadratmeter Zehntausendtel desselben; die Ar kommen in die erste und zweite Decimalstelle, die Quadratmeter in die dritte und vierte.

0,48 ha	27,5986 ha	
48~~00~~	2659,86	57,49, nahezu $57\frac{1}{2}$mal
	240	
	359	
	336	
	23,8	
	192	
	466	
	432	
	34	

Der Divisor hat 2 Decimalstellen, der Dividend hat 4; der Divisor = 48 Ar, der Dividend = 275986 qm. Wie machen wir die beiden Zahlen gleichnamig? Wir geben dem Divisor, indem wir ihm 2 Nullen anhängen, auch 4 Decimalstellen. 48 a = 4800 qm. Nun ist die Frage: Wie oft sind 4800 qm in 275986 qm enthalten? Antwort: So oft, wie 4800 in 275986. Um jedoch die beiden Nullen des Divisors nicht immer mit fortführen zu müssen, so betrachte ich 4800 als 48 × 100 und dividire zuerst durch 100, indem ich vom Dividenden 2 Stellen abschneide, und das Ergebniß alsdann durch 48.

Man bringt also in allen Fällen den Divisor und den Dividenden zuerst auf gleiche Maß- und Gewichtsorten, dann auf gleichviel Decimalstellen, wodurch beide völlig gleichnamig werden, und dividirt dann wie mit unbenannten ganzen Zahlen. Hat der Divisor am Ende Nullen, so werden sie durch Kürzung weggeschafft.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 227. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Eine Frau verbraucht täglich 25 Gramm Kaffee; wie lange reicht sie mit 1,5 kg.?

Aufl. Von 1,5 kg verbraucht sie am ersten Tag 25 g, am zweiten Tag 25 g, am dritten Tag 25 g u. s. f. So oft sie also 25 g von 1,5 kg wegnehmen kann, so vielmal 1 Tag reicht sie mit ihrem Vorrathe aus. 25 g können aber von 1,5 kg so vielmal weggenommen werden, als sie darinnen enthalten sind. Es fragt sich nun: Wie oft sind 25 g in 1,5 kg enthalten?

Ausr. 1,5 kg = 1000 + 500 = 1500 g; 25 g sind in 100 g 4mal, in 1500 g 15mal so oft, also 15 × 4 oder 60mal enthalten. Mithin reicht die Frau mit 1,5 kg Kaffee 60 × 1 Tag oder 60 Tage.

2) Für 1 ℳ. 50 ₰. erhält man 1 m Zeug, wie viel für 24 ℳ.?

Aufl. So oft ich 1 ℳ. 50 ₰. bezahle, so oft erhalte ich 1 m; für 24 ℳ. erhalte ich also so vielmal 1 m, als 1 ℳ. 50 ₰ in 24 ℳ. enthalten sind.

Ausr. 1 ℳ. 50 ₰. = 150 ₰., und 24 ℳ. = 2400 ₰.; 150 ist in 300 2mal, in 2400 oder 8×300 also 8×2 oder 16mal enthalten. Also ꝛc.

3) Wie viel Kleider lassen sich aus 60 m 8 dm Zeug verfertigen, wenn zu jedem derselben 7 m 6 dm verwendet werden?

Aufl. So oft sich 7,6 m von 60,8 m wegnehmen lassen, so oft also 7,6 m in 60,8 m enthalten sind, so viel Kleider gibt es.

Ausr.

7,6 m	60,8 m	
76	608	8 × 1 Kl. = 8 Kleider.

4) Wie viel Fäßchen Wein à 1,25 hl lassen sich aus einem Fasse füllen, welches 15 hl enthält?

Aufl. So oft 1,25 hl in 15 hl enthalten sind, so viele Fäßchen lassen sich davon füllen.

Ausr.

1,25	15,00	
125	1500	15 × 1 Fß. = 15 Fäßchen.

5) 185 Gramm einer Waare kosten 1 ℳ.; wie hoch kommen 8,5 kg von derselben?

Aufl. So vielmal 185 g dieser Waare ich kaufe, so vielmal 1 ℳ. muß ich bezahlen. So oft daher 185 g in 8,5 kg enthalten sind, so vielmal 1 ℳ. kosten diese.

Ausr.

0,185	8,500	
185	8500	45,94 ℳ.

6) Eine Anzahl von Arbeitern theilte 151,68 ℳ. unter sich. Wie viele waren's ihrer, da jeder 9,48 ℳ. erhielt?

Aufl. Von den 151 ℳ. 68 ₰., welche zu theilen waren, hat ein Arbeiter nach dem andern seine 9 ℳ. 48 ₰. weggenommen. Es waren also so viele Arbeiter, so vielmal 9 ℳ. 48 ₰. von 151 ℳ. 68 ₰. weggenommen werden können, oder so vielmal 9 ℳ. 48 ₰. in 151 ℳ. 68 ₰. enthalten sind.

Ausr. 9,48 | 151,68 |
948 | 15168 | 16 Arbeiter.

Aufg. z. Kopf- und Ziffer.

Durchschnittsrechnung.

§. 228. Verfahren.

1) Auf einem Wochenmarkte kostete das Pfund Butter anfangs 80 ₰., zuletzt 90 ₰., wie viel im Durchschnitt?

Ausr. 1 Pfd., welches anfangs, und 1 Pfd., welches zuletzt verkauft wurde, kosteten zusammen 80 + 90 oder 170 ₰.; das Pfund kostete im Durchschnitte die Hälfte von 170 ₰. = 85 ₰. So viel das eine Pfd. weniger als 85 ₰. kostete, so viel kostete das andere mehr.

2) An einem Schrannentage wurde das Hektoliter Weizen von bester Sorte um 17 ℳ 40 ₰., von geringster Sorte um 14 ℳ 80 ₰. verkauft. Welches ist hiernach der Durchschnittspreis?

Ausr. 17 ℳ 40 ₰. + 14 ℳ 80 ₰. = 32 ℳ 20 ₰.; durch 2 getheilt = 16 ℳ 10 ₰.; der Durchschnittspreis betrug also 16 ℳ 10 ₰.

3) Eine dreiklassige Schule hat in der Unterklasse 60 Schüler, in der Mitteklasse 70 und in der Oberklasse 86. Wie stark ist durchschnittlich eine Klasse?

Ausr. Im Ganzen hat die Schule 60 + 70 + 86 = 216 Schüler; werden dieselben auf die 3 Klassen gleichheitlich vertheilt, so kommt auf eine der 3. Theil von den 216 Schülern = 72.

4) Ein Weinbergsbesitzer erntet von 34 a 10,55 hl, von 88 a 37,30 hl und von 95 a 46,80 hl. Welches ist der durchschnittliche Ertrag eines Ares?

Ausr.

34 a	10,55 hl	
88 „	37,30 „	
95 „	46,80 „	
217 a	94,65 hl	

217 | 94,65 hl | 0,43 hl
868
785
651
134

---

5) Eine Bäuerin verkauft 3 fette Gänse, das Stück zu 4 ℳ und 5, das Stück zu 6 ℳ; wie viel hat sie für 1 Stück im Durchschnitte gelöst?

Ausr. Im Ganzen wurden 3 + 5 oder 8 Stück verkauft. Um finden zu können, wie viel für 1 Stück im Durchschnitt gelöst wurde, muß ich den Erlös für die 8 Stück wissen. Der ist für die 3 Stück à 4 ℳ = 12 ℳ, und für die 5 Stück à 6 ℳ = 30 ℳ, für die 8 Stück also 12 + 30 oder 42 ℳ Von diesem Betrage entfällt auf 1 Stück der 8. Theil = 5 ℳ 25 ₰.

6) Ein Schnittwaarenhändler verkauft 24 m à 1,85 ℳ, 18 m à 1,70 ℳ und 8 m à 1,60 ₰., wie theuer im Durchschnitt das Meter?

24 m à 1,85 ℳ = 44,40 ℳ		50 | 87,80 ℳ | 1,756 ℳ
18 „ à 1,70 „ = 30,60 „		= 1 ℳ 75,6 ₰.
8 „ à 1,60 „ = 12,80 „		
50 m 87,80 ℳ		

Aufg. z. Kopf= u. Zifferr.

Zweite Abtheilung.

Schlußrechnung.

§. 229. Es wird von der Einheit auf eine Mehrheit und von einer Mehrheit auf die Einheit geschlossen.

Die gegebenen gleichartig benannten Zahlen sind:

1. Eine Einheit und eine Mehrheit von gleicher Benennung.

a. Von der Einheit auf die Mehrheit.

Aufg. 1. Wenn 1 Arbeiter 2 ℳ 35 ₰ Lohn erhält, wie viel erhalten 18 Arbeiter?

Aufl. Wenn 1 Arbeiter 2 ℳ 35 ₰ erhält, so erhalten 18 Arbeiter 18 × 2 ℳ 35 ₰.

Ausrechnung.

Mündlich. 18 × 2 ℳ = 36 ℳ; 18 × 30 ₰ = 18 × 0,3 ℳ = 5,4 ℳ = 5 ℳ 40 ₰; 36 ℳ + 5 ℳ 40 ₰ = 41 ℳ 40 ₰; 18 × 5 ₰ = 90 ₰; 41 ℳ 40 ₰ + 90 ₰ = 42 ℳ 30 ₰; 18 Arbeiter verdienen also 42 ℳ 30 ₰.

Schriftlich.

```
  2,35 ℳ
  × 18
  ------
  1880
  235
  ------
  42,30 ℳ
```

Kürzer:

```
  2,35 ℳ × 18
  1880
  ------
  42,30 ℳ
```

(S. §. 158.)

Aufg. 2. Für 1 ℳ erhält man 5 m 75 cm Band; wie viel für 21 ℳ?

Aufl. Wenn man für 1 ℳ 5 m 75 cm Band erhält, so erhält man für 21 ℳ 21 × 5 m 75 cm.

Ausrechnung.

Mündl. 21 × 5 m = 105 m; 21 × 25 cm = 5 m 25 cm, und 21 × 75 cm = 3 × 5 m 25 cm = 15 m 75 cm; 105 m + 15 m 75 cm = 120 m 75 cm.

Schriftl.

```
   5,75 m
   × 21
   ------
    575
  1150
  --------
  120,75 m
```

Kürzer:

```
  5,75 m × 21
  1150
  --------
  120,75 m
```

Aufg. 3. In einem Gasthofe werden täglich 2 kg 650 g Kaffee verbraucht; wie viel in 30 Tagen?

Aufl. Werden in 1 Tage 2 kg 650 g verbraucht, so in 30 Tagen 30 × 2 kg 650 g.

Ausrechnung.

Mündl. 30 × 2 kg = 60 kg; 3 × 650 = 1950, und 10 × 1950 = 19500; 19500 g = 19 kg 500 g; 60 kg + 19 kg 500 g = 79 kg 500 g. Der Verbrauch an Kaffee beträgt also in 30 Tagen 79 kg 500 g.

Schriftl.		Oder:	
	2,650 kg		2,650 kg
	30		3 . 0
	79,500 kg		79,500 kg.

b. Von einer Mehrheit auf die Einheit.

Aufg. 1. Wie berechnet sich 1 m, wenn 28 m 91 ℳ 42 ₰ kosten?

Aufl. 28 m kosten 91 ℳ 42 ₰; 1 m ist der 28. Theil von 28 m; also kostet 1 m auch den 28. Theil von 91 ℳ 42 ₰.

Ausrechnung.

Mündl. Da 28 = 7 × 4, und 7 sowohl in 91 als in 42 aufgeht, so suche ich zuerst den 7. Theil und von diesem dann den 4. Theil. $^{1}/_{7}$ von 91 ℳ 42 ₰ = 13 ℳ 6 ₰; $^{1}/_{4}$ von 13 ℳ = 3 ℳ 25 ₰, und $^{1}/_{4}$ von 6 ₰ = $1^{2}/_{4}$ ₰; 3 ℳ 25 ₰ + $1^{2}/_{4}$ ₰ = 3 ℳ $26^{2}/_{4}$ ₰. Also berechnet sich 1 m auf 3 ℳ $26^{2}/_{4}$ ₰, in ganzen Zahlen 3 ℳ 26 ₰.

Schriftl.

```
28 | 91,42 ℳ | 3,26 ℳ
   | 84      |
     ----
      7,4
      5 6
     ----
      1 82
      1 68
     -----
        14
```

Aufg. 2. Auf 15 ha wurden 148 hl Wein (oder Körner) erzeugt; wie viel auf 1 ha?

Aufl. Wenn 15 ha 148 hl ertrugen, so ertrug 1 ha den 15. Theil von 148 hl. Die 148 hl sind also durch 15 zu theilen.

Ausrechnung.

Mündl. 15 = 3 × 5; $^{1}/_{5}$ von 148 hl = 20 + $9^{3}/_{5}$ oder $29^{3}/_{5}$ hl = 29 hl 60 l; $^{1}/_{3}$ von 29 hl = 9 hl, Rest 2 hl; 2 hl + 60 l = 260 l; $^{1}/_{3}$ von 260 oder 240 + 20 = 80 + $6^{2}/_{3}$ = $86^{2}/_{3}$; das Hektar ertrug also 9 hl $86^{2}/_{3}$ l, in ganzen Zahlen 9 hl 86 l.

Schriftl.

```
15 | 148 hl | 9,86 hl
   | 135    |
   -----
      13,0
      12 0
     -----
       100
        90
     -----
        10
```

2. Die Einheit einer niederen und die Einheit der nächsthöheren Benennung.

a. Von der niederen Einheit auf die höhere.

A. Mündlich.

1) Ein Decimeter Zeug zu 24 ₰.; wie hoch kommt das Meter?
Ausr. 1 m = 10 dm, also 10 × 1 dm; wenn 1 dm 24 ₰. kostet, so kostet das Meter 10 × 24 ₰. = 240 ₰. = 2,40 ℳ.

2) Das Liter zu 16 (24, 45, 72 ꝛc.) ₰.; wie hoch kommt das Hektol.?
Aufl. 1 hl = 100 l, also 100 × 1 l; daher kostet das Hektoliter auch 100mal so viel als 1 Liter.
Ausr. Kostet 1 Liter 16 ₰., so kostet 1 Hektoliter 100 × 16 ₰.;
100 × 1 ₰. = 100 ₰. = 1 ℳ.; 100 × 2 ₰. = 200 ₰. = 2 ℳ.;
100 × 3 ₰. = 300 ₰. = 3 ℳ.; 100 × 16 ₰. = 1600 ₰. = 16 ℳ.
Wenn also das Liter 16 ₰. kostet, so kostet das Hektoliter 16 ℳ.
Kostet 1 Liter 24 ₰., so kostet 1 hl 100 × 24 ₰. = 24 ℳ. ꝛc.

Eben so:
1 Centimeter zu 7 (13, 25, 38) ₰.; was kostet 1 Meter?
1 qcm Vergoldung zu 12 (18, 27) ₰.; was kostet 1 qdm?
1 qdm Kupferblech zu 44 (58, 64) ₰.; was kostet 1 qm?
1 qm Ackerland zu 75 (96) ₰.; wie hoch kommt das Ar?
1 Pfund zu 54 (68, 72, 84) ₰.; was kostet der Centner?

Hieraus geht hervor:

So viele	Pfennige	1 Liter	kostet,	so viele	Mark	kostet	1 Hektoliter.
„	„	„	1 Centim.	„	„	„	„	„	1 Meter.
„	„	„	1 qcm	„	„	„	„	„	1 qdm.
„	„	„	1 qdm	„	„	„	„	„	1 qm.
„	„	„	1 qm	„	„	„	„	„	1 Ar.
„	„	„	1 Pfund	„	„	„	„	„	1 Ctr.
„	„	„	1 Dekagr.	„	„	„	„	„	1 kg.

3) Das Liter zu 1 ℳ. 75 ₰.; was kostet das Hektoliter?
Ausr. 1 hl kostet 100 × 1,75 ℳ. = 100 × 175 ₰. = 175 ℳ.

Eben so:
1 Liter zu 1 ℳ. 84 ₰. (2,36 ℳ.); was kostet das Hektoliter?
1 qm Bauplatz zu 5 ℳ. 72 ₰.; wie hoch kommt das Ar?
1 Ar Ackerland zu 8 ℳ. 90 ₰.; wie hoch kommt das Hektar?
1 Pfd. Gewürz zu 3 ℳ. 50 ₰.; was kostet der Centner?

B. Schriftlich.

Wie wird eine ganze Zahl mit 10, mit 100, mit 1000 mutiplicirt? Wie eine Decimalzahl?

1) Das Gramm Gold zu 2 ℳ. 79 ₰.; was kostet 1 Dekagr.?
Ausr. 2,79 ℳ. × 10 = 27,9 ℳ. = 27 ℳ. 90 ₰.

2) Das Liter Wein zu 1 ℳ. 32 ₰.; was kostet das Hektol.?
Ausr. 1,32 ℳ. × 100 = 132 ℳ.

3) Das Quadratmeter zu 12 ℳ. 80 ₰.; was kostet das Ar?
Ausr. 12,80 ℳ. × 100 — 1280 ℳ.

4) Das Quadratmeter zu 3 ℳ 40 ₰; was kostet das Hektar?
Ausr. 3,40 ℳ × 100 = 340 ℳ das Ar,
340 ℳ × 100 = 34000 ℳ das Hektar.

5) Jemand verdient jede Woche 21 ℳ 60 ₰, wie viel im Jahre?

Ausr.

```
 21,60 ℳ × 52
 ------------
  4320
 10800
 ------------
 1123,20 ℳ
```

b. Von der höheren Einheit auf die niedere.

A. Mündlich.

1) Das Meter Tuch zu 3 ℳ 40 ₰; was kostet 1 Decimeter?

Ausr. 1 dm ist der 10. Theil von 1 m; kostet das Meter 3 ℳ 40 ₰, so kostet das Decimeter den 10. Theil von 3 ℳ 40 ₰; der 10. Theil von 3,40 ℳ oder 340 ₰ = 34 ₰.

2) Das Hektoliter zu 15 (28, 39, 145) ℳ; was kostet 1 Liter?

Aufl. Da 1 hl = 100 l, so ist 1 Liter der 100. Theil von 1 hl; daher kostet 1 Liter auch den 100. Theil von dem, was 1 hl kostet.

Ausr. Kostet 1 hl 15 ℳ, so kostet 1 Liter den 100. Theil von 15 ℳ; der 100. Theil von 1 ℳ = 1 ₰, von 15 ℳ = 15 × 1 ₰ oder 15 ₰.

Kostet 1 hl 28 ℳ, so kostet 1 Liter den 100. Theil von 28 ℳ; der 100. Theil von 28 ℳ = 28 × 1 ₰ oder 28 ₰.

Kostet 1 hl 39 ℳ, so kostet 1 Liter 1/100 von 39 ℳ = 39 ₰.

Eben so:

1 Meter zu 3 (5; 7) ℳ; was kostet 1 Centimeter?
1 qdm zu 4 (8; 11) ℳ; was kostet 1 qcm?
1 qm zu 2 (6; 14) ℳ; was kostet 1 qdm?
1 Ar zu 24 (32; 44) ℳ; was kostet 1 qm?
1 Hektar zu 825 (1572) ℳ; was kostet 1 Ar?
1 Ctr. zu 78 (145; 364) ℳ; was kostet 1 Pfd.?
1 kg zu 4 (6; 8; 10) ℳ; was kostet 1 Dekagr.?

Hieraus geht hervor:

So viele Mark	1 hl	kostet, so viele Pfennige kostet	1 l.
" " "	1 qdm	" " " " "	1 qcm.
" " "	1 qm	" " " " "	1 qdm.
" " "	1 Ar	" " " " "	1 qm.
" " "	1 Hektar	" " " " "	1 Ar.
" " "	1 Centner	" " " " "	1 Pfd.
" " "	1 kg	" " " " "	1 Dekagr.

B. Schriftlich.

1) Das Hektar zu 2150 ℳ; was kostet 1 Ar?
Ausr. 2150 ℳ : 100 = 21,50 ℳ

2) Das Hektoliter zu 485 ℳ; was kostet 1 Liter?
Ausr. 485 ℳ : 100 = 4,85 ℳ

3) Das Ar zu 25 ℳ; was kostet 1 Quadratm.?
Ausr. 25 ℳ : 100 = 0,25 ℳ.

4) Das Meter zu 4,85 ℳ; wie hoch kommt 1 Decimeter?
Ausr. 4,85 ℳ : 10 = 0,485 ℳ (Wie viel Pfg.?)
Antw. 485 ₰ : 10 = 48,5 ₰. (0,485 ℳ = 48,5 ₰.)

Würde bei 0,485 ₰. die Ziffer 5 in der zweiten Stelle stehen, so würde sie 5/100 ℳ oder 5 ₰. gelten; in der dritten Stelle gilt sie den 10. Theil von 5 Pfg. = 0,5 Pfg.

5) Das Meter zu 4,85 ℳ; was kostet 1 Centimeter?
Ausr. 4,85 ℳ : 100 = 0,0485 ℳ. (Wie viel Pfg.?)
Antw. 485 ₰ : 100 = 4,85 ₰. (0,0485 ℳ = 4,85 ₰.)

Was ist nun aber mit obigen 0,5 ₰. und mit diesen 0,85 ₰. anzufangen? Antwort: Wenn die 10tel und 100tel-Pfg. so viel als ½ Pfg. oder mehr als ½ Pfg. betragen, so werden sie für 1 ganzen Pfg. gerechnet; betragen sie weniger, so läßt man sie unberücksichtigt; man achtet sie dann für nichts.

Da 1 Ganzes = 10 z = 100 h; so ist ½ = 5 z = 50 h. Man setzt daher für 0,5 ₰., für 0,6 ₰. rc., sowie für 0,50 ₰., für 0,51 ₰. rc. einen ganzen Pfennig; 0,4 ₰.; 0,3 ₰. rc. dagegen, sowie 0,49 ₰.; 0,48 ₰. rc. achtet man für nichts.

Anstatt 48,5 ₰. setzt man also 48 + 1 oder 49 ₰. und
anstatt 4,85 ₰. setzt man . . 4 + 1 oder 5 ₰.

6) Der Centner zu 57 ℳ 45 ₰.; wie kommt das Pfund?
Ausr. 57,45 ℳ : 100 = 0,5745 ℳ = 57,45 ₰.
Oder: 5745 ₰ : 100 = 57,45 ₰. = 57 ₰.

7) Die monatl. Einnahme des A ist 265 ℳ, wie viel die tägliche?

```
Ausr.    3 0̸ | 2 6,5 ℳ | 8,8 3 3 ℳ = 8 ℳ 8 3,3 ₰.
             | 2 4     |           = 8 ℳ 8 3 ₰.
               -----
                 2,5
                 2 4
                 ----
                   1 0
                     9
                   ----
                   1 0
                     9
                   ----
```

Um zu wissen, ob den Pfennigen, die sich ergeben, noch 1 Pfg. zuzulegen ist oder nicht, so setzen wir das Theilen bei den Münzen bis zu den Tausendteln (auf 3 Decm.) fort.

3. Die Einheit und eine mehrfach benannte Zahl.

a. Die Einheit und die **niedere** Sorte der mehrfach benannten Zahl haben gleiche Benennung.

aa. Der Werth der mehrfach benannten Größe wird berechnet.

Aufgabe 1. Ein Arbeiter verdient in 1 Tg. 1 ℳ 26 ₰., wie viel in 4 Wch. und 3 Tg.?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel ein Arbeiter in 4 Wch. und 3 Tg. verdient. In 1 Tg. verdient er 1 ℳ 26 ₰; also verdient er in 2 Tg. 2 × 1 ℳ 26 ₰, in 3 Tg. 3 × 1 ℳ 26 ₰ u. s. f. Wie vielmal 1 ℳ 26 ₰ verdient er nun aber in 4 Wch. 3 Tg.? Das kann ich nur dann sagen, wenn ich weiß, wie viele Tage dieß sind. 4 Wch. 3 Tg. = 4 × 6 + 3 oder 27 Tage. In 27 Tg. verdient er 27 × 1 ℳ 26 ₰ = 34 ℳ 2 ₰.

Aufg. 2. Das Liter Wein zu 1,45 ℳ; wie berechnet sich ein Fäßchen mit 1,44 hl dieses Weines?

Aufl. 1 Liter kostet 1,45 ℳ; 2 Liter kosten 2 × 1,45 ℳ; 3 Liter kosten 3 × 1,45 ℳ; 1,44 hl = 144 Liter; diese kosten also 144 × 1,45 ℳ

Ausr.

```
     1,4 5 ℳ        144 × 1,45 ℳ = 144 × 145 ₰
   × 1 4 4
   -------
       5 8 0
     5 8 0
   1 4 5
   -------
   2 0 8,8 0 ℳ      20880 ₰ = 208,80 ℳ
```

Aufg. 3. Für 1 Ar werden 17,65 ℳ bezahlt, wie viel ist demnach für 1 ha 34 a zu zahlen?

Aufl. 1 ha 34 a = 134 a. Wenn 1 a 17,65 ℳ kostet, so kosten 134 a 134 × 17,65 ℳ

Ausr. 17,65 ℳ × 134 = 2365,10 ℳ

bb. Der Werth der mehrfach benannten Größe ist gegeben.

Aufg. 1. Man kauft 2 hl 40 l Wein um 96 ℳ; wie berechnet sich das Liter?

Aufl. Wie viel würde 1 Liter kosten, wenn man für 2 Liter 96 ℳ bezahlen müßte? (Die Hälfte von 96 ℳ) Wie viel, wenn 3 Liter 96 ℳ kosten würden? (Den dritten Theil von 96 ℳ) u. s. w. Wenn ich also weiß, was irgend eine Anzahl von Litern kostet, so kann ich bestimmen, den wie vielten Theil davon 1 Liter kostet. Was thun wir daher mit den 2 hl 40 l? (Wir verwandeln sie in Liter. 2 hl 40 l = 240 l.) Wie heißt jetzt die Aufgabe? (240 l zu 96 ℳ; was kostet 1 Liter?) Und wie heißt die Ausrechnung? Antwort: Wenn 240 l 96 ℳ kosten, so kostet 1 Liter den 240. Theil von 96 ℳ; da 240 und 96 den Faktor 24 gemeinschaftlich haben, so zerlege ich den Theiler 240 in 10 × 24; 1/24 von 96 ℳ = 4 ℳ, und 1/10 von 4 ℳ = 40 ₰. Also ꝛc.

```
 2 4 0 | 9 6 ℳ      |
 ----- | ---------- |
 2 4 0 | 9 6 0 0 ₰  | 4 0 ₰
         -------
             0
```

Aufg. 2. 3 Dutzend 4 Stück einer Waare kosteten 86 ℳ; wie wurde das Stück berechnet?

Aufl. Der wie vielte Theil von 3 Duz. 4 Stück ist 1 Stück? (3 Duz. 4 Stck. = 36 + 4 = 40 Stck.; von 40 Stck. ist 1 Stck. der

40. Theil.) Was kosteten 40 Stück? (86 ℳ) Wie viel wird also 1 Stück kosten? (Wenn 40 Stück 86 ℳ kosten, so kostet 1 Stück den 40. Theil von 86 ℳ)

Ausr. Der 40. Theil von 80 ℳ = 2 ℳ; 6 ℳ = 600 ₰; der 40. Theil von 600 (= 400 + 200) ₰ = 15 ₰; das Stück wurde also zu 2 ℳ 15 ₰ berechnet.

40 | 86 ℳ | 2,15 ℳ
80
6,0
40
200
200

Aufg. 3. Ein Eisenbahnzug legte in 1 Stunde und 36 Minuten eine Strecke von 54 Kilometer zurück; wie viel in 1 Minute?

Aufl. 1 Std. 36 Min. = 60 + 36 = 96 Min. Legte der Bahnzug in 96 Minuten 54 Kilometer zurück, so in 1 Minute den 96. Theil von 54 Kilometer. 1 Kilom. = 1000 m; 54 Kilom. = 54000 m. Ich suche also den 96. Theil von 54000 m.

96 | 54000 m | 562,5 m   Oder: 96 | 54 km
96 | 54000 m | 562,5 m

b. Die Einheit und die **höhere** Sorte der mehrfach benannten Zahl haben gleiche Benennung.

Die hieher gehörigen Aufgaben zerfallen wieder in zwei Arten:
aa. 1 hl zu 86 ℳ; wie hoch kommen 3 hl 48 l (3,45 hl)?
bb. 4 hl 35 l (4,35 hl) zu 52,60 ℳ; was kostet 1 hl?

Im Leben kommen dergleichen Aufgaben sehr häufig, vielleicht am häufigsten unter allen vor, und am einfachsten werden sie auch bloß durch Multiplikation oder Division gerechnet. Sie können jedoch erst dann unterrichtlich behandelt werden, wenn der Schüler mit Decimalzahlen multipliciren und durch solche dividiren gelernt hat. Auf dieser Stufe bleiben sie daher noch außer Berücksichtigung.

§. 230. Es wird von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit geschlossen.

Hier unterscheiden sich wieder zweierlei Fälle.

a. Die eine Mehrheit ist ein reines Vielfaches, oder ein einfacher Theil von der andern.

Zuerst werden Gruppen von Aufgaben über einzelne Produktzahlen und deren Faktoren gebildet. Z. B.

$$12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2.$$

12 Pfd. sind 2mal so viel als 6 Pfd.	Von 12 Pfd. sind 6 Pfd. die Hälfte.
3 „ „ „ „ 4 Pfd.	4 Pfd. ein Drittel.
4 „ „ „ „ 3 Pfd.	3 Pfd. ein Viertel.
6 „ „ „ „ 2 Pfd.	2 Pfd. ein Sechstel.

a. Wenn 6 Pfd. Mehl 45 ₰. kosten, so kosten 12 Pfd. 2mal soviel, also 2 × 45 ₰. oder 90 ₰. Wenn 4 Pfd. Mehl 45 ₰. kosten, so kosten 12 Pfd. 3mal so viel, also 3 × 45 oder 135 ₰. Wenn 3 Pfd. Mehl 45 ₰ kosten, so kosten 12 Pfd. 4mal so viel, also 4 × 45 ₰. oder 180 ₰. Wenn 2 Pfd. Mehl 45 ₰. kosten, so kosten 12 Pfd. 6mal so viel, also 6 × 45 ₰. oder 2 ℳ. 70 ₰.

b. Wenn 12 Pfd. Zucker 9 ℳ. kosten, so kosten 6 Pfd. davon 1/2mal so viel, also nur die Hälfte von 9 ℳ. oder 4 ℳ. 50 ₰.; 4 Pfd. kosten nur 1/3mal so viel, also nur den 3. Theil von 9 ℳ. oder 3 ℳ.; 3 Pfd. kosten nur 1/4mal so viel, also nur den 4. Theil von 9 ℳ. oder 2 ℳ. 25 ₰.; 2 Pfd. kosten nur 1/6mal so viel, also nur den 6. Theil von 9 ℳ. oder 1 ℳ. 50 ₰.

In dieser Weise behandle der Lehrer noch einige Produktzahlen und bilde Aufgaben dazu. So etwas muß aus dem Stegreife gehen, frisch und frei.

Nach dieser Uebung werden ähnliche Aufgaben ohne Schwierigkeit gerechnet werden, wobei übrigens folgende Auflösungsweise zu empfehlen ist.

Beispiel 1. 12 Mann verdienen 15 ℳ., wie viel 96 Mann?

Aufl. Berechnet soll werden, was 96 Mann verdienen; nach der Aufgabe wissen wir, was 12 Mann verdienen; 12 Mann verdienen 15 ℳ.; 96 Mann sind 8 × 12 Mann; also verdienen sie auch 8 × 15 ℳ.; 8 × 15 ℳ. = 120 ℳ. Also verdienen ꝛc.

Beispiel 2. 96 ha ertrugen 267 hl, wie viel 16 ha?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel 16 ha ertrugen; die Aufgabe sagt uns, wie viel 96 ha ertrugen; 96 ha ertrugen 267 hl; 16 ha sind von 96 ha der sechste Theil; mithin ertrugen sie auch den 6. Theil von 267 hl; 267 hl = 240 + 24 + 3 hl; 1/6 hievon = 44 hl 50 l. Also ꝛc.

Aufg. 3. Für 7 ℳ. erhält man 4,585 kg; wie viel für 91 ℳ.?

Aufl. 91 ℳ. = 13 × 7 ℳ.; also erhält man für 91 ℳ. 13 × 4,585 kg.

Ausr. 4,5 8 5 kg × 1 3
1 3 7 5 5
5 9,6 0 5 kg

Aufg. 4. Für 120 ℳ. erhält man 25 kg, wie viel für 8 ℳ.?

Aufl. 8 ℳ. sind der 15. Theil von 120 ℳ.; also erhält man für 8 ℳ. den 15. Theil von 25 kg.

Ausr. 15 | 25 kg | 1,666 kg = 1 kg 666 g

b. Die eine Mehrheit ist weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von der andern.

Beispiel 1. 3 m kosten 84 ₰.; was ist für 10 m zu bezahlen?

Verfahren: Was soll nach unsrer Aufgabe berechnet werden? (Was 10 m kosten.) Welche Zahlen sind einfache Theile von 10? (1, 2, 5.) Und von welchen Zahlen ist 10 selbst wieder ein einfacher Theil? (Von 20, 30, 40 ꝛc.) Was 10 m kosten, können wir also auf einmal finden, wenn wir wissen, was 1 m kostet, oder was 2 m, 5 m, 20 m ꝛc. kosten. Das wissen wir aber nicht; denn die Aufgabe sagt uns, was 3 m kosten. Wie kommen wir nun von 3 m auf 10 m? Welche Zahl ist ein

einfacher Theil von 3 und von 10 zugleich? (1.) Wie werden wir also rechnen? (Wir gehen von 3 m auf 1 m und von 1 m auf 10 m.) Ausr. 3 m kosten 84 ₰.; 1 m kostet $^1/_3$ von 84 ₰. oder 28 ₰., und 10 m kosten 10 × 28 ₰. = 280 ₰. = 2 ℳ 80 ₰.

Aufg. 2. 8 Ar Gartenfeld kosten 120 ℳ; wie berechnen sich 9 Ar? Aufl. Ich suche zuerst, was 1 Ar kostet, und dann, was 9 Ar kosten. (Ich gehe oder schließe von 8 Ar auf 1 Ar und von 1 Ar auf 9 Ar.)

Ausr. 8 a = 120 ℳ

$$1 \text{ a} = \frac{120 \text{ ℳ}}{8} = 15 \text{ ℳ}$$

9 a = 15 ℳ × 9 = 135 ℳ

Sprechweise: 8 Ar kosten (sind dem Werthe nach gleich) 120 ℳ 1 Ar kostet $^1/_8$ davon, also 120 ℳ getheilt durch 8. (Die 8 wird untergesetzt und die Division sogleich ausgeführt.) Gibt 15 ℳ So viel kostet 1 Ar. 9 Ar kosten 9mal so viel, nämlich 9 × 15 Mark = 135 Mark. Also kosten 9 Ar 135 Mark.

Aufg. 3. Eine Familie verbraucht in 7 Monaten 26,250 kg Zucker; wie viel demnach in 1 Jahre?

Aufl. Ich berechne zuerst, wie viel Zucker die Familie in 1 Mon. verbraucht, und dann, wie viel sie in 1 Jahre oder in 12 Monaten verbraucht. (Ich gehe oder schließe von 7 Mon. auf 1 Mon. und von 1 Monat auf 12 Monat.)

Ausr. In 7 Mon. 26,250 kg

$$\text{„ } 1 \text{ „ } \frac{26{,}250}{7} = 3{,}750 \text{ kg}$$

„ 12 „ 3,750 kg × 12
7500
45,000 kg = 45 kg.

Sprechweise: In 7 Mon. verbraucht die Familie 26 kg und 250 g; in 1 Mon. verbraucht sie $^1/_7$ davon, also 26 kg 250 g getheilt durch 7. (Die 7 wird untergesetzt und die Division sogleich ausgeführt.) Gibt 3 kg 750 g. So viel verbraucht die Familie in 1 Monat. In 12 Monaten verbraucht sie 12mal so viel. Die 3 kg 750 g sind daher 12mal zu nehmen. Gibt 45 kg.

Die 26,250 kg können auch als 26250 g aufgefaßt und angeschrieben werden. Dann hat es der Schüler nur mit einer einfach benannten ganzen Zahl zu thun.

Ist der Divisor eine mehrstellige Zahl, so wird die Division durch eine Nebenrechnung ausgeführt. Selbstverständlich können hier nur Aufgaben gegeben werden, wo die Division keinen Rest gibt.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

Vierter Cursus.

Decimalbruchrechnung.

Begriff, Lesen und Schreiben der Decimalzahlen.

§. 231. **Vorbemerkung.**

Wie im zweiten Cursus mit dem Aufbau des Zahlensystems nochmal vom Grunde aus begonnen wurde, als unsere Schüler in den aufwärts erweiterten Zahlenraum eingeführt werden sollten; so wird hier, wo wir sie in den nach abwärts erweiterten Zahlenraum tiefer einzuführen beabsichtigen, auch nochmal auf alles das zurück gegriffen, was von der Sache mit ihnen bereits behandelt worden ist.

§. 232. **Begriff.**

Der Lehrer schreibt an die Wandtafel die Ziffer 1. Was gilt dieselbe? (1 Einer.) Dann setzt er an deren Seite gegen die linke Hand eine zweite 1. Was gilt diese? (1 Zehner.) Vergleicht den Werth der 1 in der zweiten Stelle mit dem Werthe der 1 in der ersten Stelle! (Die 1 in der ersten gilt 1 Einer; die 1 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner, 1 Zehner ist 10mal so viel, als 1 Einer; also gilt die 1 in der zweiten Stelle 10mal so viel als die 1 in der ersten Stelle). — Hierauf kommt wieder eine 1 in die dritte Stelle. Was gilt diese? (1 Hunderter.) Vergleicht nun auch den Werth der Ziffer 1 in der dritten Stelle mit dem Werthe der 1 in der zweiten Stelle! (Die 1 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner; die 1 in der dritten Stelle gilt 1 Hunderter; 1 H ist 10mal so groß, als 1 Z; also gilt die 1 in der dritten Stelle 10mal so viel, als die 1 in der zweiten Stelle.) So fort, bis steht:

1 1 1 1 1 1 1

Hindeutend: Die 1 in der 2. Stelle gilt zehnmal so viel als die 1 in der ersten; die 1 in der 3. Stelle gilt 10mal so viel als die 1 in der zweiten u. s. w.

Jede Eins um eine Stelle weiter links gilt also zehnmal so viel als die zu ihrer Rechten.

Nun machen wir denselben Weg auch rückwärts. Vergleicht einmal den Werth der 1 in der sechsten Stelle mit dem Werthe der 1 in der siebenten Stelle! (Die 1 in der 7. Stelle gilt eine Million; die 1 in der 6. Stelle gilt 1 Hunderttausender; 1 HT ist der 10. Theil von 1 Million; also gilt die 1 in der 6. Stelle nur 1/10 von dem, was die 1 in der 7. Selle gilt.) — Vergleiche die Werthe der 1 in der 6. und 5. Stelle miteinander! (Die 1 in der 6. Stelle gilt 1 HT; die 1 in der 5. Stelle gilt 1 Zehntausender; 1 ZT ist 1/10 von 1 HT; also gilt die 1 in der 5. Stelle wieder nur 1/10 von dem, was die 1 in der 6. Stelle gilt) u. s. w.

Die Ziffer 1 gilt also in der 6. Stelle 1/10 von dem, was sie in der 7. gilt, in der 5. Stelle 1/10 von dem, was sie in der 6. gilt ꝛc.

Jede 1 um eine Stelle weiter rechts gilt also immer nur den 10. Theil so viel, als die 1 zu ihrer Linken.

Nun wollen wir die Reihe nach rechts eben so weit fortsetzen, als wir sie vorhin nach links fortgesetzt haben. Damit wir aber die Ziffer 1, welche 1 Einer bedeutet, mit einer andern nicht verwechseln; so machen wir nach derselben ein Komma. Durch dieses Zeichen werden die bereits geschriebenen Ziffern auf ihren Stellen festgehalten.

Was gilt nun die 1, welche ich nach dem Einer, also in die erste Stelle nach dem Komma setze?

1 1 1 1 1 1 1 , 1

Antwort: Den 10. Theil von 1 Einer oder 1 Zehntel. Und was gilt die 1, welche ich eine Stelle nach dem Zehntel, also in die 2. Stelle nach dem Komma setze?

1 1 1 1 1 1 1 , 1 1

Antwort: Den 10. Theil von 1 Zehntel. Welcher Theil ist das von 1 Einer? (1 Einer oder 1 Ganzes = 10 z; theilt man jedes Zehntel wieder in 10 gleiche Theile, so entstehen aus dem Ganzen 10 × 10 oder 100 Theile; 1 z = 10 h; also ist der 10. Theil von 1 z = 1 h.) Die 1 in der 2. Stelle nach dem Komma bedeutet daher 1 Hundertel. Was gilt die 1, welche ich in die dritte Stelle nach dem Komma setze?

1 1 1 1 1 1 1 , 1 1 1

(Die in der 3. Stelle gilt den 10. Theil von dem, was die 1 in der 2. Stelle gilt, also den 10. Theil von 1 Hundertel.) Welcher Theil ist das von 1 Ganzen? (1 Ganzes = 100 h; theilt man jedes Hundertel in 10 gleiche Theile, so entstehen aus dem Ganzen 100 × 10 oder 1000 Theile; 1 h = 10 t; also ist der 10. Theil von 1 h = 1 t.)

So fort bis zu Milliontel.

a. Wie (also) unsere Zahlenordnung von unten (von den Einern an) nach oben hin durch Verzehnfachung sich aufbaut und dieser Aufbau bis in's Unendliche fortgesetzt werden kann; so erweitert sich dieselbe nach unten hin durch die Zehn- oder decimale Theilung und kann auch diese Erweiterung bis in's Unendliche fortgesetzt werden.

b. Gleichwie man den Werth der Ziffern auf der linken Seite des Komma, wo sie Ganze bedeuten, aus ihrer Stelle erkennt; so läßt sich auch der Werth der Ziffern auf der rechten Seite desselben, wo sie Theile bezeichnen, aus ihrer Stelle entnehmen. Die Ziffern in der ersten

Stelle vor dem Komma gelten Einer, in der 2. Stelle Zehner u. s. f.; in der ersten Stelle nach dem Komma gelten sie 10tel, in der zweiten Stelle 100tel, in der dritten Stelle 1000tel ꝛc.

c. Da Zehntel entstehen, wenn man 1 Ganzes in 10 gleiche Theile theilt; 100tel, wenn man $^1/_{10}$ wieder in 10 gleiche Theile zerlegt; 1000tel, wenn man aus $^1/_{100}$ wieder 10 gleiche Theile macht ꝛc.; so nennt man die 10tel, 100tel, 1000tel ꝛc. zehntheilige oder Decimalbrüche, kurz: Decimalen, und die Stellen, welche sie einnehmen, also die Stellen nach dem Komma Decimalstellen. Das Komma heißt Decimalkomma, oder, weil es nach den Einern steht, auch Einerzeichen.

Zahlen, welche aus Ganzen und Decimalen gebildet sind, heißen Decimalzahlen.

d. Sowie
1 Million = 10 HT, 1 HT = 10 ZT, 1 ZT = 10 T, 1 T = 10 H ꝛc.,
so ist 1 E = 10 z, 1 z = 10 h, 1 h = 10 t, 1 t = 10 zt ꝛc.;
und sowie also auch umgekehrt
10 E = 1 Z, 10 Z = 1 H, 10 H = 1 T, 10 T = 1 ZT ꝛc.; so sind
10 Milliontel = 1 ht, 10 ht = 1 zt, 10 zt = 1 t, 10 t = 1 h u. s. w.

Im Zahlensystem besteht durchweg ein und dasselbe Gesetz: jede Einheit enthält 10 Einheiten der nächstniederen Ordnung, und 10 Einheiten irgend einer Ordnung bilden 1 Einheit der nächst höheren Ordnung.

§. 233. Lesen und Schreiben.

a. Nach den einzelnen Stellen.

Angeschrieben:	Gelesen:
347,582	3 H 4 Z 7 E 5 z 8 h 2 t
15069,0718	1 ZT 5 T 6 Z 9 E 0 z 7 h 1 t 8 zt
0,84652	0 E 8 z 4 h 6 t 5 zt 2 ht

u. s. w.

Zur weiteren Uebung im Lesen werden die aus Decimalzahlen bestehenden Aufgaben des Rechenheftes benützt.

Um die Schüler in das Schreiben größerer Decimalzahlen einzuführen, so entwerfen sie auf ihren Schiefertafeln folgende Tabelle und tragen in dieselbe die vom Lehrer diktirten Zahlen ein.

M	HT	ZT	T	H	Z	E	z	h	t	zt	ht	m
				4	7	5	9	2	8			
						3	0	1	4			
			8	0	9	0	7	6	0	5	4	
4	3	0	5	0	0	6	0	8	0	3	0	2

Diktirt:
4 H 7 Z 5 E 9 z 2 h 8 t! 3 E 1 h 4 t!
8 T 9 Z 7 z 6 h 5 zt 4 ht! 4 M 3 HT 5 T 6 E 8 h 3 zt 2 m
u. s. w.

Auch in bunter Mischung. Z. B.: Schreibt in einer Zeile:
a. 6 z, 9 Z, 5 H, 8 h, 4 M, 7 m, 2 T, 5 t, 3 E, 8 ht!
b. 8 HT, 4 ht, 6 T, 9 t, 3 z, 5 Z, 7 h, 2 ZT, 8 zt, 4 H!

b. Im Zusammenhange.

43

Diese (an die Wandtafel geschriebene) Zahl läßt sich auf zweierlei Weise lesen. a. 43 = 4 Zehner + 3 Einer. b. Ich löse die 4 Zehner in Einer auf und vereinige diese mit den 3 Einern. 4 Z = 4 × 10 oder 40 E; 40 E + 3 E = 43 Einer. — Eben so läßt sich der Decimalbruch

0,43

auf zweierlei Weise aussprechen. a. 0,43 = 4 Zehntel und 3 Hundertel. b. Ich verwandle die $^4/_{10}$ in 100tel und nehme die $^3/_{100}$ dazu.
1 z = 10 h; 4 z = 4 × 10 = 40 h; 40 h + 3 h = 43 h.
Also: 0,43 = 4 z + 3 h = 43 h.

0,783 =?

a. 0,783 = 7 z + 8 h + 3 t.
b. Ich verwandle die Zehntel und Hundertel auch in Tausendtel.
1 z = 10 h; 7 z = 7 × 10 = 70 h; 70 h + 8 h = 78 h.
1 h = 10 t; 78 h = 78 × 10 = 780 t; 780 t + 3 t = 783 t.
Also 0,783 = 7 z + 8 h + 3 t = 783 t.

0,65897 =?

a. 0,65897 = 6 z + 5 h + 8 t + 9 zt + 7 ht.
b. Ich verwandle die 10tel, 100tel, 1000tel 2c. auch in 100000tel.
6 z + 5 h = 65 h;
65 h + 8 t = 658 t;
658 t + 9 zt = 6589 zt;
6589 zt + 7 ht = 65897 ht.
Also 0,65897 = 6 z + 5 h + 8 t + 9 zt + 7 ht = 65897 ht.

3,4 =?

1 E = 10 z; 3 E = 3 × 10 = 30 z; 30 z + 4 z = 34 z; 3,4 = 34 z.

57,68 =?

1 E = 100 h; 57 E = 57 × 100 = 5700 h; 5700 h + 68 h = 5768 h.

8,372 =?

1 E = 1000 t; 8 E = 8000 t; 8000 t + 372 t = 8372 t.

Decimalen und Decimalzahlen im Aufgabenhefte werden nun auch in dieser Weise gelesen. Die Schüler finden sich bald zurecht. Sie lesen die Zahlen mit der Benennung des niedrigsten Stellenwerthes. 9,4 = 94 z; 72,86 = 7286 h; 0,79238 = 79238 ht; 684,25 = 68425 h 2c.

So ausgesprochene Zahlen werden nun auch diktando geschrieben und dabei so unter einander gesetzt, daß Komma unter Komma zu stehen kommt. Z. B.

15 E + 7 zt!	15,0007		28 z!	2,8
23 E + 25 zt!	23,0025		365 h!	3,65
237 zt!	0,0237		794 z!	79,4
9864 zt!	0,9864		4026 t!	4,026
6 E + 715 ht!	6,00715		8132 z!	813,2
u. s. w.			u. s. w.	

§. 234. Schreiben und Lesen benannter Decimalzahlen.

1) Welche Theile von der Mark sind: 1 ₰.? 36 ₰.? Schreibt in Decimalform: 18 ₰.! (0,18 ℳ.) 75 ₰.! 1 ℳ. 64 ₰.! 46 ℳ. 8 ₰.! ꝛc.

2) Welche Theile von dem Meter sind die Deci-, Centi- und Millimeter? Schreibt: 4 m 7 dm! 10 m 35 cm! 6 m 8 cm! 785 mm! ꝛc.

3) Welche Theile von dem Kilometer sind die Meter? Schreibt: 5 km 740 m! 12 km 983 m! 3 km 67 m! 9 km 5 m! ꝛc.

4) Ein Quadratmeter, wie viel qdm? wie viel qcm? Welche Theile von dem Quadratmeter sind daher: 1 qdm? 54 qdm? Schreibt: 48 qm 95 qdm! 5 qm 80 qdm! 12 qm 6 qdm! ꝛc.

5) Welche Theile von dem Quadratmeter sind: 1 qcm? 67 qcm? Welche Stellen nehmen die qdm ein? welche die qcm? Schreibt: 8 qm 27 qdm 78 qcm! 3 qm 51 qcm! 6 qm 4 qdm 9 qcm! ꝛc.

6) Eben so mit Hektar, Ar, Quadratmeter.

7) Welche Theile von dem Hektoliter sind die Liter? Schreibt in Decimalform: 83 l! 17 hl 90 l! 10 hl 8 l! ꝛc.

8) Welche Theile von dem Kilogr. sind die Dekagramm? die Gramm? Schreibt: 56 Dekagr.! 56 g! 725 g! ꝛc.

9) Schreibt in Decimalform: 50 Pfd.! 18 Ctr. 10 Pfd.! ꝛc.

Die von den Schülern niedergeschriebenen benannten Decimalzahlen werden zuletzt auch gelesen und zwar zuerst als mehrfach benannte, dann mit der niederen Benennung als einfach benannte Zahlen. Z. B. 46,08 ℳ. = 46 ℳ. 8 ₰. = 4608 ₰.

§. 235. Vom Decimalkomma.

Seiner großen Bedeutung und auch der Vollständigkeit wegen wird das Decimalkomma nochmal Gegenstand der Besprechung. Der Lehrer schreibt die Zahlen und versetzt das Komma, die Schüler vergleichen und urtheilen.

a.

4,3 7 5 2 = 4 Einer,	3 Zehntel,	7 Hundertel	u. s. w.
4 3,7 5 2 = 4 Zehner,	3 Einer,	7 Zehntel	u. s. w.
4 3 7,5 2 = 4 Hunderter,	3 Zehner,	7 Einer	u. s. w.
4 3 7 5,2 = 4 Tausender,	3 Hunderter,	7 Zehner	u. s. w.

Mit jeder Stelle, um welche das Komma von der linken Hand gegen die rechte weiter rückt, gilt jede Ziffer 10mal so viel und wird also die Zahl 10mal so groß.

4,3752 Rückt man das Komma sogleich 2 Stellen nach rechts, so wird 437,52 die Zahl 10 × 10 oder 100mal so groß, und rückt man es sogleich 3 Stellen nach rechts, so wird die Zahl 10 × 10 × 10 oder 1000mal so groß.

b.

3 9 8 1,6 =	3 Tausender,	9 Hunderter,	8 Zehner	u. s. w.
3 9 8,1 6 =	3 Hunderter,	9 Zehner,	8 Einer	u. s. w.
3 9,8 1 6 =	3 Zehner,	9 Einer,	8 Zehntel	u. s. w.
3,9 8 1 6 =	3 Einer,	9 Zehntel,	8 Hundertel	u. s. w.

Mit jeder Stelle, um welche das Komma weiter nach links rückt, gilt jede Ziffer und beträgt die Zahl nur den 10. Theil so viel.
3981,6 Rückt man das Komma sogleich 2 Stellen nach links, so beträgt 39,816 die Zahl dann nur den 100. Theil so viel, und rückt man es sogleich 3 Stellen nach links, so hat die Zahl dann nur den 1000. Theil ihres vorigen Werthes.

Soll also eine Decimalzahl mit 10, 100, 1000 2c. multiplicirt werden, so setzt man das Komma um ein, zwei oder 3 Stellen weiter rechts. Ist eine Decimalzahl aber durch 10, 100, 1000 2c. zu dividiren, so setzt man das Komma um ein, zwei oder drei Stellen weiter links.

§. 236. Von den Nullen.

a.	b.
4,5	8,6
4 0,0 5	0 8,6 0
4 0 0,0 0 5	0 0 8,6 0 0
4 0 0 0,0 0 0	0 0 0 8,6 0 0 0

So oft der Ziffer 4 eine Null angehängt wird, so oft rückt sie eine Stelle weiter nach links und so oft gilt sie 10mal so viel; so oft der Ziffer 5 eine Null vorgesetzt wird, so oft rückt sie eine Stelle weiter rechts und so oft gilt sie den 10. Theil so viel.

Die Ziffern 8 und 6 dagegen bleiben unverrückt auf ihren Stellen, die Ziffer 8 auf der ersten Stelle vor dem Komma, also auf der Einerstelle, die Ziffer 6 auf der ersten Stelle nach dem Komma, also auf der Zehntelstelle. Jene gilt daher mit und ohne Nullen 8 Einer, diese mit und ohne Nullen 6 Zehntel.

Die Nullen haben somit nur dann einen Einfluß auf die Geltung der Ziffern, wenn diese durch sie, wie bei a, aus ihren Stellen gerückt werden. Im andern Falle haben sie, wie bei b, einen Einfluß auf den Stellenwerth der Ziffern nicht; man kann sie setzen und kann sie streichen, wie es die Rechnung eben mit sich bringt.

Beigefügt werden Nullen den Decimalzahlen, wenn solche gleichnamig zu machen sind.

0,6 = 0,60 = 0,600 = 0,6000; d. i. 6 z = 6 × 10 oder 60 h = 60 × 10 oder 600 t = 600 × 10 oder 6000 zt. Um 0,6 und 0,845 gleichnamig zu machen, um also 0,6 auch in Tausendtel zu verwandeln, werden dieser Zahl 2 Nullen angehängt. 0,6 = 0,600,

Gestrichen werden die Nullen nach jeder vollzogenen Operation, wenn sich dabei eine Decimalzahl mit Nullen am Ende ergibt. Denn 0,8000 = 0,800 = 0,80 = 0,8.

Ist jedoch das Resultat eine benannte Zahl, so werden diejenigen Nullen, welche zum vollständigen Ausdrucke der niederen Münz-, Maß- und Gewichtseinheiten gehören, nicht gestrichen, also z. B. nicht bei 4,50 ℳ; 25,80 hl; 3,20 Ctr.; 8,600 kg; 5,70 ha; 1,7380 ha u. s. w. Der Grund ist leicht zu erkennen.

Addition.

§. 237. Verfahren.

1) Zählt zusammen:

a. 8 z + 9 z + 7 z! (8 z + 9 z = 17 z, + 7 z = 24 z = 2,4.)
b. 42 h + 24 h + 68 h! (42 h + 24 h = 66 h, + 68 h = 134 h = 1,34.)
c. 246 t + 358 t! (246 t + 350 t = 596 t, + 8 t = 604 t.)

2) Wie viel betragen folgende Zahlen zusammen: 3,84 + 68,075 + 0,4 + 24,6987?

Ausrechnung.

Man setzt die Zahlen so unter einander, daß Komma unter Komma, auf der linken Seite desselben also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc. und auf der rechten Seite Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. f. zu stehen kommen.

```
 3,84
68,075
 0,4
24,6987
-------
97,0137
```

Die 7 zt stehen allein. Da ist nichts weiter zu addiren. Ich setze also 7 unter den Strich, und zwar in die Stelle der Zehntausendtel, d. i. gerade unter die 7.

8 + 5 = 13, nämlich 13 Tausendtel; 13 t = 10 t + 3 t = 1 h + 3 t. Die 3 Tausendtel unter den Strich, genau unter die Tausendtel; das 1 Hundertel hinüber zu den Hunderteln.

1 + 9 ist 10, und 7 ist 17, und 4 ist 21. Das sind 21 h = 2 z + 1 h. Das 1 Hundertel unter den Strich, gerade unter die Hundertel; die 2 Zehntel hinüber zu den andern Zehnteln.

2 und 6 ist 8, und 4 ist 12, und 8 ist 20, nämlich 20 Zehntel; 20 z = 2 E + 0 z; 0 z unter den Strich in die Reihe der Zehntel; die 2 E hinüber zu den Einern.

Bevor ich weiter rechne, setze ich ein Komma, damit die Theile von den Ganzen sogleich geschieden werden.

2 + 4 + 8 + 3 = 17; 17 Einer = 1 Zehner + 7 Einer ꝛc. Summa: 9 Z 7 E 0 z 1 h 3 t 7 zt = 97,0137.

Sowie 10 Einer = 1 Zehner, 10 Z. = 1 Hunderter &c.; so sind 10 Milliontel = 1 Hunderttausendtel, 10 Hunderttausendtel = 1 Zehntausendtel, 10 Zehntausendtel = 1 Tausendtel u. s. w. Die Decimalbrüche werden daher addirt, wie ganze Zahlen.

7 ist 7; 8 + 5 = 13, ich schreibe 3 und behalte 1; 1 + 9 = 10, + 7 = 17, + 4 = 21, ich schreibe 1 und behalte 2 u. s. w.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

Subtraktion.

§. 238. Verfahren.

1) Wie viel ist

a. 9 z — 5 z? (9 z — 5 z = 4 z.)
b. 84 h — 36 h? (84 h — 30 h = 54 h, — 6 h = 48 h.)
c. 650 t — 472 t? (650 t — 400 t = 250 t, — 72 t = 178 t.)
d. 8,4 — 3,9? (84 z — 30 z = 54 z, — 9 z = 45 z = 4,5.)
e. 4,25 — 1,60? (425 h — 100 h = 325 h, — 60 h = 265 h = 2,65)
f. 1,6 — 0,85? (1,6 = 160 h; 160 h — 85 h = 75 h.)

2) Um wie viel ist die Zahl 91,2831 kleiner als 173,4284?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 173{,}4284 \\ 91{,}2831 \\ \hline 82{,}1453 \end{array}$$

1 Zehntausendtel von 4 Zehntaus. bleiben 3 Zehntausendtel.
3 Tausendtel von 8 Tausendteln bleiben 5 Tausendtel.
8 Hundertel von 2 H. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge 1 Zehntel; 1 Zehntel und 2 Hundertel = 12 Hundertel; 8 Hundertel von 12 Hunderteln bleiben 4 Hundertel.
2 Zehntel von 3 Zehnteln bleibt 1 Zehntel. Und so fort.
Rest: 8 Z 2 E, 1 z 4 h 5 t 3 zt = 82,1453. Also ist die Zahl 91,2831 um 82,1453 kleiner als 173,4284.

3) Von 25,37854 soll die Zahl 9,482 abgezogen werden.

Ausrechnung.

$$\begin{array}{rcr} 25{,}37854 & = & 25{,}37854 \\ 9{,}482 & = & 9{,}48200 \\ \hline 15{,}89654 & = & 15{,}89654 \end{array}$$

Zehntausendtel und Hunderttausendtel sind nicht abzuziehen; daher setzt man unter die 4 ht und 5 zt der Vollzahl Nullen, wodurch die zwei ungleichnamigen Decimalzahlen gleichnamig werden, und subtrahirt dann wie vorhin.

4) Wie groß ist der Unterschied zwischen 42,007 und 17,653?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 4.2.,0.07 \\ 17{,}653 \\ \hline 24{,}354 \end{array}$$

3 Tausendtel von 7 Tausendteln bleiben 4 Tausendtel.

5 Hundertel von 0 Hunderteln geht nicht. 1 Zehntel kann ich nicht entlehnen, denn dergleichen sind nicht da. Ich gehe daher über das Komma weg und borge 1 Einer. Diesen Einer trage ich auf die nächste, d. h. auf die Zehntelstelle über. Allda macht er 10 Zehntel. Von den 10 Zehnteln nehme ich 1 Zehntel und führe dieses auf die Hundertelstelle. 1 Zehntel = 10 Hundertel. Das geborgte Ganze ist jetzt in 9 Zehntel und 10 Hundertel verwandelt. Nun ziehe ich ab. 5 Hundertel von 10 Hundertel bleiben 5 Hundertel.

6 Zehntel von 9 Zehnteln bleiben 3 Zehntel.

7 Einer von 11 Einer bleiben 4 Einer. Und 1 Zehner von 3 Z bleiben 2 Z. Der zu bestimmende Unterschied beträgt 24,354.

5) Um wie viel ist die Zahl 543 größer als die Zahl 123,527?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{rcr} 543 & = & 543.,000 \\ 123,527 & = & 123,527 \\ \hline 419,473 & = & 419,473 \end{array}$$

Von 5 H 4 Z 3 E sind nicht nur 1 H 2 Z 3 E, sondern auch noch 5 z 2 h und 7 t abzuziehen. Man setzt hinter die Vollzahl 543 ein Komma und für die fehlenden Zehntel, Hundertel und Tausendtel drei Nullen. Im Uebrigen ist die Ausrechnung der im vorigen Beispiele gleich.

Man ersetzt also, wenn die gegebenen Zahlen nicht gleichviel Decimalstellen haben, die der einen Zahl fehlenden Stellen durch Nullen und subtrahirt dann wie mit ganzen Zahlen.

Aufg. z. Kopf= u. Zifferr.

§. 239. Das Kürzen mit Korrektur.

Hat eine Zahl mehr Decimalen, als die Genauigkeit der Rechnung es erfordert, so werden die überflüssigen weggelassen, und beträgt von diesen die erste Stelle 5 oder mehr, so wird die letzte der beibehaltenen Stellen um 1 erhöht. Man setzt z. B. statt 5,243582 die Zahl 5,24358 oder 5,2436 oder 5,244 oder 5,24.

Dieß nennt man Abkürzung mit Korrektur.

Verfahren.

1) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 0,49 und 0,4?
Antw.: 4 z = 40 h; der Unterschied zwischen 49 h u. 40 h = 9 h.

2) Wie viel beträgt der Unterschied von 0,49 und 0,5?
Antw.: 5 z = 50 h; der Unterschied von 49 h u. 50 h = 1 h.

3) Wenn man für den zweistelligen Decimalbruch 0,49 einen einstelligen haben will, was ist also besser: 4 z oder 5 z dafür zu setzen? (Setzt man 4 z, so beträgt der Fehler 9 h; setzt man 5 z, so beträgt der Fehler 1 h; man setzt daher für 0,49 besser 0,5, als 0,4.)

Auf gleiche Weise lernen die Schüler einsehen, daß man für 0,48, für 0,47, für 0,46 besser 0,5, als 0,4; dagegen für 0,44, für 0,43 rc. besser 0,4 als 0,5 setzt.

Ob man für 0,45 setzt 0,4 oder 0,5 ist gleich; der Fehler beträgt in beiden Fällen 5 h. Es ist aber Regel, für 1/2 immer ein Ganzes, also für 1/2 Einer einen ganzen Einer, für 1/2 Zehntel ein ganzes Zehntel, für 1/2 Hundertel ein ganzes u. s. f. zu setzen.

0,45 = 4 z + 5 h; 10 h = 1 z; 5 h = 1/2 Zehntel; die 5 h werden daher für 1 z gerechnet; für 0,45 wird also 0,5 gesetzt.

Folgende Decimalzahlen sollen nun gekürzt werden und zwar:

1) Auf 2 Stellen: 6,34|75

Man schneidet die Decimalstellen bis auf zwei ab. Die abgeschnittenen Theile betragen 7 t + 5 zt. Die 5 zt kommen nicht in Betracht, sondern es wird bloß untersucht, ob die 7 t für 1 h zu rechnen sind, oder nicht. 1/2 h = 5 t; die 7 t sind mehr als 1/2 h; man rechnet sie daher für 1 ganzes Hundertel und legt dieses zu den 34 h; gibt 6,35.

2) Auf 3 Stellen: 8,574|392

Die Frage ist: Sind die 3 zt ein halbes Tausendtel, oder nicht? Da 1 t = 10 zt, 1/2 Tausendtel also = 5 zt; so folgt, daß die 3 zt kein halbes Tausendtel sind, also auch für 1 t nicht gerechnet werden. Für 8,574392 wird also bloß 8,574 gesetzt.

3) Auf 2 Stellen: 13,47|985 *M.* = 13,48 *M.*

4) Auf 2 Stellen: 9,36|25 hl = 9,36 hl.

5) Auf 2 Stellen: 7,64|586 Ctr. = 7,65 Ctr.

6) Auf 3 Stellen: 1,482|39 m = 1,482 m.

7) Auf 3 Stellen: 3,853|655 kg = 3,854 kg.
(Genau: 3 kg 853 g 655 mg).

8) Auf 4 Stellen: 2,7148|375 ha = 2,7148 ha.

Zur Uebung lesen die Schüler mehrstellige Decimalzahlen in ihrem Aufgabenhefte, auf eine, oder 2, oder 3 Stellen mit Korrektur gekürzt.

Multiplikation.

§. 240. Der Multiplikator ist eine ganze Zahl.

A. Mündlich.

3 × 0,6! 3 × 6 z = 18 z = 1,8.
5 × 8,7! 5 × 8 = 40; 5 × 0,7 = 3,5; 40 + 3,5 = 43,5.
6 × 1,5! 6 × 1 = 6; 6 × 0,5 = 3; 6 + 3 = 9. Oder:
1,5 = 15 z; 6 × 15 z = 90 z = 9.
4 × 0,18! 4 × 18 h = 72 h.
8 × 0,72! 8 × 72 = 560 + 16 = 576; 576 h = 5,76.
7 × 5,35! 7 × 5 = 35; 7 × 35 h = 2,45; 35 + 2,45 = 37,45.
2 × 0,078! 2 × 78 t = 140 + 16 = 156 t.
10 × 5,4! 10 × 5,4 = 10 × 54 z = 54.
10 × 0,67! 10 × 67 h = 670 h = 6,70.
100 × 0,58! 100 × 58 h = 58.

B. Schriftlich.

1) Wie viel beträgt das Sechsfache von 5,7?

5,7 × 6 34,2	5,7 = 57 z; 6 × 57 = 342; 6 × 67 z = 342 z. Zehntel werden in Ganze verwandelt, wenn man sie durch 10 dividirt, und durch 10 wird dividirt, wenn man rechts eine Stelle abtrennt.

2) Wie viel ist 24 mal 8,63?

8,6 3 × 2 4 3 4,5 2 1 7 2 6 2 0 7,1 2	8,63 = 863 h. 24 × 863 = 20712. 24 × 863 h = 20712 h. 20712 h : 100 = 207,12.

3) Wie viel ist 3,758, multiplicirt mit 36?

3,7 5 8 × 3 6 2 2 4 4 8 1 1 2 7 4 1 3 5,2 8 8	3,758 = 3758 t. Ich rechne 36 × 3758. Gibt 135288; 36 × 3758 Tausendtel = 135288 Tausendtel. Um diese in Ganze zu verwandeln, schneidet man rechts 3 Stellen ab. Gibt 135,288.

Zehntel mit einer ganzen Zahl multiplicirt, gibt Zehntel; Hundertel mit einer ganzen Zahl multiplicirt, gibt Hundertel ꝛc.; Multiplikand und Produkt sind gleichnamig; beide müssen daher auch gleichviel Decimalstellen haben, und eben darum müssen von dem Produkte so viel Stellen abgestrichen werden, als der Multiplikand Decimalstellen hat.

Wie wird eine ganze Zahl mit 10, mit 100, mit 1000 ꝛc. multiplicirt? Wie eine Decimalzahl?

7,4932 × 10 = 74,932
30,465 × 100 = 3046,5
691,56 × 1000 = 691560
483,71 × 10000 = 4837100.

Wie rechnet man 20 × 36? (20 = 2 × 10; 2 × 36 = 72, und 10 × 72 = 720. Oder: 10 × 36 = 360, und 2 × 360 = 720.)

Eben so: 30 × 1,5; 40 × 2,4; 60 × 3,2; 80 × 4,5.

Wie rechnet man 200 × 42? (200 = 2 × 100; 2 × 42 = 84, und 100 × 84 = 8400. Oder: 100 × 42 = 4200, und 2 × 4200 = 8400.)

Eben so: 300 × 28 ₰.; 500 × 36 ₰.; 700 × 64 ₰.

347,8 × 30 3478 × 3 10434	30 = 3 × 10. Hier mult. man zuerst mit 10, indem man das K. 1 St. nach rechts rückt und die Null streicht, dann mit 3.
1,759 × 3100 175,9 × 31 5277 5452,9	3100 = 31 × 100. Man multiplicirt zuerst mit 100, indem man das Komma 2 Stellen nach rechts rückt und die beiden Nullen streicht, dann mit 31.

Ein Zwanzigmarkstück wiegt 7,9649 g; wie viel wiegen a. 425, b. 1000, c. 7500 solche Münzen?

§. 241. Der Multiplikator ist eine Decimalzahl.

A. Mündlich.

1) Wie viel ist 10 × 10? 1 × 10? $^1/_{10}$ × 10? ($^1/_{10}$ mal 10 ist so viel als $^1/_{10}$ von 10. Wie viel ist $^1/_{10}$ von 10? Wie viel ist also auch $^1/_{10}$ mal 10?)

2) Wie viel ist $^1/_{10}$ × 20, 40, 70, 15, 52, 48, 84, 76, 125?

3) Wie viel ist $^1/_{10}$ × 30, $^2/_{10}$ × 30, $^3/_{10}$ × 30, $^7/_{10}$ × 30?
Antw.: $^1/_{10}$×30=3; $^2/_{10}$×30=2×3 oder 6; $^3/_{10}$×30=3×3 2c.

4) $^3/_{10}$ × 70! ($^1/_{10}$ × 70 = 7; $^3/_{10}$ × 70 = 3 × 7 = 21.)
Eben so: $^4/_{10}$ × 90, $^5/_{10}$ × 60, $^8/_{10}$ × 80, $^9/_{10}$ × 40, $^7/_{10}$ × 90!

5) Vergleicht $^1/_{10}$ × 20 mit 1 × 20!

1 × 20 = 20
$^1/_{10}$ × 20 = 2

$^1/_{10}$ × 20 ist der 10. Theil von 1×20; $^1/_{10}$×20=1×20 geth. durch 10.

6) Vergleicht eben so $^2/_{10}$×20 mit 2×20; $^3/_{10}$×20 mit 3×20! 2c.

2 × 20 = 40	3 × 20 = 60
$^2/_{10}$ × 20 = 4	$^3/_{10}$ × 20 = 6
$^2/_{10}$×20 ist der 10. Th. von 2×20 = 2 × 20 getheilt durch 10.	$^3/_{10}$×20 ist der 10. Th. von 3×20 = 3 × 20 getheilt durch 10.

7) Wie rechnet man hiernach $^3/_{10}$ × 70? ($^3/_{10}$ × 70 = 3 × 70 getheilt durch 10; 3 × 70 = 210; 210 getheilt durch 10 = 21.)

8) Rechnet eben so: $^4/_{10}$ × 12, $^5/_{10}$ × 15, $^7/_{10}$ × 14, $^8/_{10}$ × 16!

9) Wie viel beträgt, auf zweierlei Weise gerechnet, $^5/_{10}$ × 80?
a. $^1/_{10}$ × 80 = 8; $^5/_{10}$ × 80 = 5 × 8 oder 40.
b. 5 × 80 = 400; $^5/_{10}$ × 80 = 400 : 10 = 40.

10) Rechnet eben so: $^4/_{10}$×12, $^6/_{10}$×9, $^7/_{10}$×15, $^8/_{10}$×30, $^9/_{10}$×24.

B. Schriftlich.

1) Wie viel ist 0,7 mal 364?

364	0,7 × 364 = 7 × 364, getheilt durch 10.
×0,7	7 × 364 = 2548;
254,8	2548 : 10 = 254,8.

2) Wie viel ist 273, multiplicirt mit 3,5?

2 7 3	
× 3,5	3,5 = 35 z. Ich rechne 35 × 273 und theile das Produkt durch 10.
1 3 6 5	
8 1 9	35 × 273 = 9555;
9 5 5,5	9555 : 10 = 955,5.

3) Wie viel ist 0,01 mal 365?

3 6 5	0,01 × 365 = 1 × 366, getheilt durch 100.
× 0,0 1	1 × 365 = 365;
3,6 5	365 : 100 = 3,65.

4) 574 × 0,08 = 45,92 — Ich rechne 8 × 574.
8 × 574 = 4592.
$^8/_{100}$ × 574 = 4592 : 100 = 45,92.

5) 958 × 0,1 = 9,58
1 × 95,8 = 95,8.
0,1 × 95,8 = 95,8 : 10 = 9,58.

6) 81,25 × 0,7 = 56,875
7 × 8125 = 56875.
7 × 8125 h = 56875 h = 568,75.
0,7 × 8125 h = 568,75 : 10 = 56,875.

Der Multiplikand besteht, da er 2 Decimalstellen enthält, aus 100teln. 100tel mit einer ganzen Zahl multiplicirt, gibt wieder 100tel. Darum sind von dem Produkte zunächst 2 Stellen abzuschneiden. Hier aber besteht der Multiplikator nicht aus einer ganzen Zahl, sondern aus 10teln. Mithin ist das Produkt auch nur den 10. Theil so groß, und daher müssen im Ganzen 2 + 1 oder 3 Stellen abgeschnitten werden.

7) Die Zahl 6,348 mit 0,35 multiplicirt, wie viel?

```
   6,748
 × 0,35     35 × 6348 = 235180.
 -------
  33740
 20244      35 × 6348 t = 235180 t = 235,180.
 -------
 2,35180    0,35 × 6348 t = 235,180 : 100 = 2,35180.
```

Hier sind von dem Produkte 3 Stellen abzuschneiden, weil der Multiplikand aus Tausendteln besteht, und 2 Stellen, weil derselbe nicht 35mal, sondern nur 0,35mal zu nehmen ist. Also müssen im Ganzen 3 + 2 oder 5 Stellen abgeschnitten werden.

8) 0,243 × 0,4 = 0,0972 — Um hier 3 + 1 oder 4 Stellen abschneiden zu können, so ist eine Null vorzusetzen; auch ist die Stelle der Einer, welche fehlen, durch eine solche zu bezeichnen.

Man multiplicirt demnach Decimalzahlen wie ganze Zahlen, dann aber streicht man von dem Produkte so viele Stellen rechts ab, als beide Faktoren Decimalstellen zusammen haben.

§. 242. Die abgekürzte Multiplikation.

Wenn bei einem Produkte aus zwei mehr- oder vielstelligen Decimalzahlen schon die vorderen Decimalen hinlängliche Genauigkeit gewähren, so bedient man sich der abgekürzten Multiplikation.

Man multiplicirt zunächst mit der höchsten Stelle des Multiplikators, dann mit der darauffolgenden 2c. und läßt dabei von dem Multiplikanden von rechts nach links eine Stelle nach der andern außer Rechnung, was durch Punkte bezeichnet werden kann.

Aufg. 4,65782 × 6,475! (Antw. auf 3 Stellen.)

Da die Antwort auf 3 Stellen verlangt wird, so genügt es, die Theilprodukte auf 4 zu bestimmen. — Zur Erleichterung der Auffassung geht der abgekürzten Ausrechnung die ausführliche voran.

```
        4,6578(2)
        6,475
        ─────────────
        279468|               = 6 × 46578
         18631|2              = 4 × 46578
          3260|46             = 7 × 46578
           232|890            = 5 × 46578
        ─────────────
        30,1592|550
```

```
 4,6578      Abgekürzt:
 6,475
──────────
 27,9468     6 × 4,6578
  1,8631     4 × 4,657     (Von 4 × 8 od. 32 zähle 3 zu 4 × 7)
   3260      7 × 4,65      (Von 7 × 7 od. 49 zähle 5 zu 7 × 5)
    233      5 × 4,6       (Von 5 × 5 od. 25 zähle 3 zu 5 × 6)
──────────
 30,1592     Antwort: 30,159.
```

49,7536 × 8,754 auf 3 Stellen = 435,543
64,8925 × 7,4836 auf 4 Stellen = 485,6295
35,812764 × 4,2135 auf 3 St. = 150,897.

§. 243. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

Aufg. 1. Wenn 1 hl 86 ℳ kostet, was kosten 5,4 hl?

Aufl. So vielmal 1 hl, so vielmal 86 ℳ. Wie vielmal 1 hl sind denn aber die 5,4 hl? 5 hl = 5 × 1 hl; $^1/_{10}$ hl ist der 10. Theil von 1 hl, also $^1/_{10}$ × 1 hl; mithin sind $^4/_{10}$ hl = $^4/_{10}$mal 1 hl. Die 5,4 hl = 5,4 mal 1 hl; also kosten sie auch 5,4 × 86 ℳ.

```
Ausr.  86 ℳ × 5,4     5,4 = 54 z; 54 hl würden 54 ×
      ──────────      86 ℳ kosten; 54 Zehntel-Hektoliter kosten
        344           54 × 86 ℳ, getheilt durch 10.
       430
      ──────────
       464,4 ℳ = 464 ℳ 40 ₰.
```

Aufg. 2. Das Hektoliter zu 138 ℳ.; was kosten 4,65 hl?

Aufl. So vielmal 1 hl, so vielmal 138 ℳ.; 4 hl = 4 × 1 hl; 0,01 hl = $^1/_{100}$ × 1 hl; 0,65 hl = $^{65}/_{100}$ × 1 hl; 4,65 hl sind also 4,65 × 1 hl und kosten daher auch 4,65 × 138 ℳ.

```
Ausr.   138 ℳ × 4,65     (138 ℳ mit 4,65 multiplicirt.)
       ──────────────
          690
         828
        552
       ──────────
        641,70 ℳ
```

Aufg. 3. Das Kilogr. zu 8,75 ℳ; was kosten 785 Gramm?

Aufl. So vielmal 1 kg, so vielmal 8,75 ℳ; 1 g ist der 1000. Theil von 1 kg, also 0,001 × 1 kg; 785 g sind 0,785 × 1 kg und kosten daher auch 0,785 × 8,75 ℳ.

```
     8,75 ℳ × 0,785
     ─────
     4375
    7000
   6125
   ──────
   6,86|875 ℳ = 6 ℳ 87 ₰.
```

4) Kostet 1 Meter 3,65 ℳ, so kosten 4 m 60 cm oder 4,6 × 1 m 4,6 × 3,65 ℳ =

```
   3,65 ℳ × 4,6
   ────
   2190
  1460
  ─────
  16,790 ℳ = 16 ℳ 79 ₰.
```

5) Erträgt 1 ha 12,48 hl, so ertragen 8 ha 84 a (= 8,84 × 1 ha) 8,84 × 12,48 hl =

```
   12,48 hl × 8,84
   ───────────────
   4992
  9984
 9984
 ──────────
 110,32|32 hl = 110,32 hl.
```

6) Wie berechnen sich 3 a 27 qm Bauplatz, wenn das Quadratmeter 8,64 ℳ kostet?

So vielmal 1 qm, so vielmal 8,64 ℳ. Ich muß daher zunächst suchen, wie vielmal 1 qm die 3 a 27 qm betragen. 3 a 27 qm = 327 qm, also 327 × 1 qm; mithin kosten sie auch 327 × 8,64 ℳ = 2825,28 ℳ.

7) Wie berechnen sich 3 a 27 qm, wenn das Ar 864 ℳ kostet?

So vielmal 1 a, so vielmal 864 ℳ; 3 a 27 qm = 3,27 a, also 3,27 × 1 a; mithin kosten sie 3,27 × 864 ℳ = 2825,28 ℳ.

8) Wie hoch kommen aber 3 a 27 qm, wenn das Hektar mit 864 ℳ bezahlt wird?

Jetzt heißt es: So vielmal 1 Hektar, so vielmal 864 ℳ. Ich habe daher zunächst zu bestimmen, wie vielmal 1 ha die 3 a 27 qm betragen. 1 ha = 100 a = 10000 qm; 3 a = 0,03 ha, und 27 qm = 0,0027 ha. Mithin sind 3 a 27 qm = 0,0327 ha = 0,0327 × 1 ha; also kosten sie auch 0,0327 × 864 ℳ = 28,2528 ℳ = 28 ℳ 25 ₰.

9) Ein Dampfschiff legte in 4 Minuten 1,275 km zurück; wie weit kam dasselbe in 1 Stunde?

So vielmal 4 Min., so vielmal 1,275 km; 1 Std. oder 60 Min. = 15 × 4 Min.; das Dampfschiff legte also in 1 Stunde 15 × 1,275 km zurück. (19,125 km.)

Division.

§. 244. Der Divisor eine ganze Zahl.

A. Mündlich.

1) Wie viel beträgt a. die Hälfte von 8 z? b. der 3. Th. von 12 h? c. der 4. Th. von 56 h? d. der 6. Theil von 144 t? e. $^1/_8$ von 680 t?

2) Wie viel ist der 5. Theil von 4,5? (4,5 = 45 z; der 5. Theil van 45 z = 9 z.)

3) Der 8. Theil von 3,68! (3,68 = 368 h = 320 + 48 h; der 8. Theil von 320 h = 40 h, von 48 h = 6 h; 40 h + 6 h = 46 h.)

4) Der 7. Theil von 24,5! (24,5 = 21 + 3,5; der 7. Theil von 21 = 3, und der 7. Theil von 3,5 = 0,5; 3 + 0,5 = 3,5.)

5) Der halbe Theil von 1, in Decimalen ausgedrückt!
(1 E = 10 z; der halbe Theil von 10 z = 0,5.)

6) Wie viel ist der 4. Theil von 3, in Decim. ausgedrückt?
(3 E = 30 z; der 4. Theil von 30 z = 7 z Rest 2 z = 20 h; der 4. Theil von 20 h = 5 h; 7 z + 5 h = 0,75; der 4. Theil von 3 = 0,75.)

7) Der 8. Theil von 5, in Decim. ausgedrückt!
(5 E = 50 z; der 8. Theil von 50 z = 6 z, Rest 2 z = 20 h; der 8. Th. von 20 h = 2 h, Rest 4 h = 40 t; der 8. Th. von 40 t = 5 t; 6 z + 2 h + 5 t = 0,625. Der 8. Theil von 5 = 0,625.)

8) Der 3. Theil von 2, in Decim. ausgedrückt!
(2 E = 20 z; der 3. Th. von 20 z = 6 z, Rest 2 z = 20 h; der 3. Th. von 20 h = 6 h, Rest 2 h = 20 t; der 3. Theil von 20 t = 6 t, Rest 2 t. Es geht nicht auf. 6 z + 6 h + 6 t = 0,666; also ꝛc.)

B. Schriftlich.

Beisp. 1. Wie viel beträgt der 4. Theil von 31,8?

Ausrechnung.

4	31,8	7,95	Der 4. Theil von 31 E = 7 E, Rest 3 E; Komma, Komma! 3 E + 8 z = 38 z; der 4. Theil von 38 z = 9 z, Rest 2 z; 2 z = 20 h; der 4. Theil von 20 h = 5 h. Also ist 1/4 von 31,8 = 7,95.
	28		
	3,8		
	36		
	20		
	20		

Beisp. 2. Wie viel ist 0,648 dividirt durch 17?

Ausrechnung.

17	0,648	0,0381 . . .	Der 17. Theil von 0 E = 0 E, Komma; der 17. Theil von 6 z = 0 z; 6 z + 4 h = 64 h; der 17. Theil von 64 h = 3 h, Rest 13 h; 13 h + 8 t = 138 t; der 17. Theil von 138 t = 8 t, Rest 2 t; 2 t = 20 zt; der 17. Theil von 20 zt = 1 zt, Rest 3 zt.
	51		
	138		
	136		
	20		
	17		
	3		

Wir brechen die Division jetzt ab und zeigen die Nichtvollendung derselben durch 3 Punkte hinter dem Quotienten an. Daß dieser an Genauigkeit zunimmt, je länger die Division fortgesetzt wird, versteht sich von selbst. Ein Quotient mit 3 oder 4 Decimalstellen ist übrigens für die gewöhnlichen Fälle genau genug.

Wie dividirt man eine ganze Zahl durch 10, durch 100, durch 1000? Wie eine Decimalzahl?

7 5,8 4 : 10 = 7,5 8 4
9 3,7 2 : 1 0 0 = 0,9 3 7 2
8 7,2 5 : 1 0 0 0 = 0,0 8 7 2 5

Auf welche Weise kann man den 4. Theil von 36 suchen? (a. Der 4. Theil von 36 = 9. b. 4 = 2 × 2; der halbe Theil von 36 = 18, und die Hälfte von 18 = 9.) Sucht auf ähnliche Weise, wie zuletzt, den 20. Theil von 36! (20 = 2 × 10. Ich suche von 36 den halben Theil und von diesem dann den 10. Theil. Der halbe Theil von 36 = 18, und der 10. Theil von 18 = 1,8.) Oder! (Ich suche zuerst den 10. Theil und von diesem die Hälfte. Der 10. Theil von 36 = 3,6, und die Hälfte von 3,6 oder 36 z = 1,8.)

Wie kann man demnach eine Zahl durch 30, 40 ꝛc., durch 400, 900, 1500, 3600 ꝛc. theilen? (Man zerlegt 30 in 3 × 10, 40 in 4 × 10, 400 in 4 × 100, 1500 in 15 × 100 und theilt durch einen Faktor nach dem andern.)

Wie dividirt man auf diese Weise 759,6 durch 4500?

4 5 0 0	7 5 9,6	
4 5 0̸ 0̸	7,5 9 6	0,1 6 8 8

4500 = 45 × 100. Ich dividire zuerst durch 100, indem ich die beiden Nullen streiche und das Komma 2 Stellen nach links rücke, wodurch sich 7,596 ergibt, und hievon suche ich dann den 45. Theil.

Was kostet 1 dm, wenn das Meter mit 7,48 ℳ bezahlt wird?
Antw.: 7,48 ℳ : 10 = 0,748 ℳ = 0,75 ℳ
Oder: 748 ₰ : 10 = 74,8 ₰ = 75 ₰.
Wie hoch kommt 1 cm, das Meter zu 9,80 ℳ?
Antw.: 9,80 ℳ : 100 = 0,0980 ℳ = 0,10 ℳ
Oder: 980 ₰ : 100 = 9,80 ₰ = 10 ₰.
Wie berechnet sich 1 Gramm, das Kilogr. zu 84,20 ℳ?
Antw.: 84,20 ℳ : 1000 = 0,08420 ℳ = 0,08 ℳ
Oder: 8420 ₰ : 1000 = 8,420 ₰ = 8 ₰.
Das Hektar zu 2475 ℳ; wie hoch kommt 1 qm?
Antw.: 2475 ℳ : 10000 = 0,2475 ℳ = 0,25 ℳ
5 hl kosten 486 ℳ; wie berechnet sich das Liter?
Antw.: 486 ℳ : 500 = 4,86 ℳ : 5 = 0,972 ℳ = 0,97 ℳ
In 360 Tg. ertrug ein Kapital 132,5 ℳ Zs., wie viel in 40 Tg.?
Antw.: 132,5 ℳ : 9 = 14,722 . . . ℳ = 14,72 ℳ

§. 245. Der Divisor ist eine Decimalzahl.

a. Die gegebenen Zahlen sind gleichnamig.

Untersucht, wie oft sich 5 von 15 wegnehmen läßt! (15 — 5 = 10, — 5 = 5, — 5 = 0; 3mal.) Warum läßt sich 5 von 15 dreimal wegnehmen? (Weil 15 = 3 × 5, 5 in 15 3mal enthalten ist.)

Nun untersucht, wie oft sich 5 z von 15 z wegnehmen lassen! (15 z — 5 z = 10 z, — 5 z = 5 z, — 5 z = 0 z; auch 3mal.) Wie oft sind daher auch 5 z in 15 z enthalten?

5 z lassen sich von 15 z, wie 5 E von 15 E 3mal wegnehmen; 5 z sind in 15 z, wie 5 E in 15 E, 3mal enthalten.

Untersucht nun auch, wie oft sich 5 h von 15 h, 5 t von 15 t, 5 Milliontel von 15 Milliontel wegnehmen lassen! (3mal.) Also sind auch 5 h in 15 h, 5 t in 15 t und 5 Milliontel in 15 Millionteln, wie 5 in 15, dreimal enthalten.

0,4 m in 0,8 m = 4 dm in 8 dm = 4 in 8 = 2mal.
0,12 ℳ in 0,84 ℳ = 12 ₰ in 84 ₰ = 12 in 84 = 7mal.
0,125 kg in 0,375 kg = 125 g in 375 g = 125 in 375 = 3.

Gleichnamige Decimalen werden dividirt wie ganze Zahlen.

Sucht nun, wie oft enthalten sind:
0,3 in 0,8! 3 z sind in 8 z, wie 3 in 8, $2^2/_3$mal enthalten.
0,5 in 2,4! 5 z sind in 24 z, wie 5 in 24, $4^4/_5$mal.
1,1 in 7,5! 11 z sind in 75 z, wie 11 in 75, $6^9/_{11}$mal.
0,12 in 0,31! 12 h in 31 h = 12 in 31 = $2^7/_{12}$.
0,45 in 1,25! 45 h in 125 h = 45 in 125 = 9 in 25 = $2^7/_9$.
1,75 in 4,50! 175 h in 450 h = 175 in 450 = 7 in 18 = $2^4/_7$.

Schriftlich.

```
1)  4,7 | 347,8 |
    47  | 3478  |  74 × 4,7
          329   |       188
          ---   |      329
           188  |     -----
           188  |     347,8
```

Divisor und Dividend haben gleichviel Decimalstellen und sind also auch gleichnamige Decimalzahlen. 4,7 = 47 z, und 347,8 = 3478 z; 47 z in 3478 z = 47 in 3478.

47 liegt in 3478 74mal. Wie oft ist also auch 4,7 in 347,8 enthalten? Wie oft ist 4,7 zu nehmen, um 347,8 zu erhalten?

```
2) 0,75 | 0,87 |
     75 |   87 |   1,16 × 0,75
            75 |          580
          ---- |         812
           12,0|      -------
            75 |       0,87ØØ
           ----
            450
            450
```

75 h sind in 87 h so oft enthalten als 75 in 87. 75 in 87 = 1,16; also sind auch 75 h in 87 h 1,16mal enthalten. Probe!

```
3) 3,408 | 9,856 |
   3408  | 9856  |   2,89 × 3,408
           6816  |        30672
          ------ |       27264
          3040,0 |       6816
          27264  |       +688
          ------ |      --------
           31360 |      9,856ØØ
           30672
           -----
             688
```

3,408 = 3408 t; 9,856 = 9856 t. 3408 t in 9856 t = 3408 in 9856.

b. Die gegebenen Zahlen sind nicht gleichnamig.

Wie verfährt man, um zu finden, wie oft 5 dm in 4 m enthalten sind? (Man verwandelt die 4 m auch in Decimeter. 4 m = 40 dm; 5 dm sind in 40 dm 8mal enthalten.)

Wie verfährt man, um zu finden, wie oft 5 cm in 4 dm enthalten sind? (Man verwandelt die 4 dm auch in Centimeter. 4 dm = 40 cm; 5 cm in 40 cm = 8mal.)

Wie wird man nun verfahren, um zu finden, wie oft 0,5 in 4 (0,05 in 0,4) enthalten ist!

5 z in 4 E = 5 z in 40 z = 5 in 40 = 8.
5 h in 4 z = 5 h in 40 h = 5 in 40 = 8.

Ungleichnamige Decimalzahlen werden gleichnamig gemacht.

1,2 in 9! 12 z in 90 z = 12 in 90 = 6 in 45 = 2 in 15 = $7^1/_2$.
3,2 in 12! 32 z in 120 z = 32 in 120 = 16 in 60 = 4 in 15 = $3^3/_4$.
0,07 in 0,5! 7 h in 50 h = 7 in 50 = $7^1/_7$.
0,15 in 1,8! 15 h in 180 h = 15 in 180 = 5 in 60 = 12.
0,48 in 3,6! 48 h in 360 h = 4 in 30 = 2 in 15 = $7^1/_2$.
0,075 in 0,15! 75 t in 150 t = 75 in 150 = 3 in 6 = 2.

Schriftlich.

Das schriftliche Verfahren, ungleichnamige Decimalzahlen zu dividiren, ist verschieden. Für Schulen, wo ein Lehrer sämmtliche Altersklassen zu unterrichten hat, vielleicht für die Volksschulen ohne Unterschied, empfiehlt es sich, die gegebenen ungleichnamigen Decimalzahlen gleichnamig zu machen. Wir setzen darum dieses Verfahren als

Erste Weise.

1) 7 dividirt durch 0, 8, wie viel?

```
0,8 | 7,0 |
  8 | 7 0 |   8,7 5 × 0,8
    6 4       ---------
    ---         7,0 0 0
      6,0
      5 6
      ---
       4 0
```

Um zu finden, wie oft 8 z in 7 E enthalten sind, so verwandeln wir diese auch in Zehntel. 7 E = 70 z. Nun ist die Frage: Wie oft sind 8 z in 70 z enthalten? Antwort: So oft als 8 in 70.

2) Wie viel ist 19,6, dividirt durch 0,56?

```
0,5 6 | 1 9,6 0 |
   5 6 | 1 9 6 0 |  3 5 × 0,5 6
       1 6 8         ---------
       -----             2 8 0
         2 8 0         1 6 8
         2 8 0         -------
         -----         1 9,6 0
```

Die eine Zahl hat 2 Decimalstellen, die andere nur eine; die eine besteht in Hunderteln, die andere in Zehnteln. Wir machen beide gleichnamig und dividiren dann wie mit ganzen Zahlen.

3) Wie oft ist 1,625 in 9,1 enthalten?

```
1,625 | 9,100 |
1625  | 9100  |      5,6 × 1,625
        8125              9750
        975,0            8125
        9750            9,1ØØØ
```

Um die Division in eine solche mit ganzen Zahlen zu verwandeln, machen wir beide Decimalzahlen gleichnamig. Wir verwandeln die 91 z, indem wir 2 Nullen beifügen, ebenfalls in Tausendtel.

4) Wie oft ist 5,4 in 22,475 enthalten?

In dieser Aufgabe hat der Divisor weniger Decimalstellen als der Dividend. Die 2 Stellen, welche ihm fehlen, ersetzen wir durch Nullen und schreiben dann sogleich 5400 in 22475.

```
              a.                                   b.
5400 | 22475 | 5,162..           54ØØ | 224,75 | 4,162..
       21600                             216
        875,0                              8,7
        5400                               54
        33500                              335
        32400                              324
         11000                              110
         10800                              108
```

So oft 5400 in 22475 enthalten ist, so oft ist auch der 100. Theil von der einen Zahl in dem 100. Theil von der andern enthalten. Daher sind unter b. bei dem Divisor die 2 Nullen gestrichen und bei dem Dividenden 2 Stellen abgeschnitten.

Zweite Weise.

Hiebei werden die gegebenen ungleichnamigen Decimalzahlen nicht gleichnamig, sondern gerade so vielmal so groß gemacht, als erforderlich ist, um im Divisor eine ganze Zahl zu erhalten. Es kommt der Satz in Anwendung: So oft irgend eine Zahl in einer andern enthalten ist, eben so oft ist irgend ein Vielfaches der ersteren Zahl in dem gleichen Vielfachen der andern enthalten. So oft 2 in 8 enthalten ist, eben so oft liegt 2 × 2 in 2 × 8, 3 × 2 in 3 × 8 u. s. w.

```
1) 8,3 | 135,29 |
   83  | 1352,9 | 16,3
```

Um im Divisor eine ganze Zahl zu erhalten, so wird das Komma auf beiden Seiten eine Stelle nach rechts gerückt, und man dividirt dann mit dem 10fachen des gegebenen Divisors in das 10fache des gegebenen Dividenden.

```
2) 0,48 | 3,672 |
   48   | 367,2 | 7,65
```

Hier wird, um im Divisor eine ganze Zahl zu erhalten, auf beiden Seiten das Komma 2 Stellen nach rechts gerückt und werden hierdurch beide Zahlen 100mal so groß.

```
3) 8,3129 | 3,4664794 |
   83129  | 34664,793 | 0,417
```

4) Wie oft ist 55,7 in 9469 enthalten?

5 5,7	9 4 6 9	
5 5 7	9 4 6 9 0	1 7 0

Bei dem Divisor wird das Komma eine Stelle nach rechts gerückt, und dem Dividenden wird, weil er eine ganze Zahl ist, ein Null angehängt. So sind nun beide Zahlen 10mal so groß.

5) Wie oft ist 0,35 in 16,1 enthalten?

0,3 5	1 6,1 0	
3 5	1 6 1 0	4 6

Um hier das Komma auf beiden Seiten 2 Stellen nach rechts rücken zu können, so wird dem Dividenden eine 0 beigefügt.

6) Wie oft ist 0,02784 in 21,576 enthalten?

0,0 2 7 8 4	2 1,5 7 6 0 0	
2 7 8 4	2 1 5 7 6 0 0	7 7 5.

Hiernach rückt man das Komma bei den zwei gegebenen Zahlen um gleich viele Stellen so weit rechts, bis es bei dem Divisor wegfällt und derselbe als ganze Zahl erscheint. Für die dem Dividenden etwa fehlenden Stellen werden diesem Nullen angehängt.

§. 246. Die abgekürzte Division.

Wie es eine abgekürzte Multiplikation gibt, so gibt es auch eine abgekürzte Division, und wie jene, so thut auch diese der Genauigkeit der Rechnung einen kaum merklichen Eintrag.

3 4 8,7 5 6 3 : 8,3 7 5 = ?

```
3487563 : 83750 = 41,6425 . .
335000
 137563
  83750
  53813 : 8375
  50250
   3563 : 838
   3352
    211 : 84
    168
     43 : 8
     40
      3
```

Divisor und Dividend werden gleichnamig gemacht, und anstatt den Rest jedesmal durch Anhängung einer Null mit 10 zu erweitern, läßt man vom Divisor rechts eine Stelle nach der andern weg und dividirt so wiederholt den 10. Theil des Dividenden durch den 10. Theil des Divisors. Beträgt die wegbleibende Stelle des Divisors 5 oder mehr, so wird die vorhergehende um 1 erhöht.

Hier ist der Divisor zur Erleichterung der Auffassung jedesmal beigesetzt. Dieß kann auch unterlassen und dafür vom gegebenen Divisor eine Stelle nach der andern gestrichen werden.

§. 247. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

1) Wie hoch kommt 1 Meter, wenn 3,5 m 14,7 ℳ. kosten?

Die Schüler werden antworten: „1 m kostet den $3^5/_{10}$ten Theil von 14,6 ℳ.“ Da dieser Ausdruck weder klar, noch mundgerecht ist, so führen wir sie in die Ausdrucksweise ein: „1 m kostet 14,7 ℳ, getheilt durch 3,5.“

Wie hoch kommt das Meter, wenn 3 m 14,7 ℳ kosten? (Auf den 3. Theil von 14,7 ℳ) Wie findet man den 3. Theil von 14,7 ℳ? (Wenn man 14,7 ℳ durch 3 theilt.) Darum sagt man auch: 1 m kostet 14,7 ℳ, getheilt durch 3.

Wie kann man demnach auch sagen, wie hoch 1 m kommt, wenn 4, oder 5, oder 6 m 14,7 ℳ kosten?

Wenn 4 m 14,7 ℳ kosten, so kostet 1 m 14,7 ℳ getheilt durch 4; kosten 5 m 14,7 ℳ, so kostet 1 m 14,7 ℳ getheilt durch 5 u. s. w.

Wie hoch wird nun also 1 m kommen, wenn 3,5 m 14,7 ℳ kosten? (Auf 14,7 ℳ getheilt durch 3,5.)

3,5	14,7 ℳ	
35	147 ℳ	4,2 ℳ
	140	
	7,0	
	70	

3,5 m kosten 14,7 ℳ;
35 m kosten 10 × 14,7 ℳ = 147 ℳ;
1 m kostet 147 ℳ : 35.

2) 7,48 m zu 41,14 ℳ; was kostet 1 Meter? (1 m kostet 41,14 ℳ, getheilt durch 7,48.)

7,48	41,14 ℳ	
748	4114 ℳ	5,5
	3740	
	374,0	

7,48 m kosten 41,14 ℳ;
748 m kosten 100 × 41,14 ℳ = 4114 ℳ;
1 m kostet 4114 ℳ : 748.

3) 4,2 hl zu 136,75 ℳ; wie berechnet sich 1 Hektoliter? (Auf 136,75 ℳ, getheilt durch 4,2.)

4,2	136,75 ℳ	
42	1367,5 ℳ	32,58 ℳ

4,2 hl kosten 136,75 ℳ;
42 hl kosten 10 × 136,75 = 1367,5 ℳ;
1 hl kostet 1367,5 ℳ : 42.

4) 1,75 Ctr. zu 49 ℳ; wie hoch kommt der Centner? (Auf 49 ℳ getheilt durch 1,75.)

1,75	49 ℳ	
175	4900	28 ℳ

1,75 Ctr. kosten 49 ℳ;
175 Ctr. kosten 100 × 49 ℳ = 4900 ℳ;
1 Ctr. kostet 4900 : 175.

5) Wenn 3,75 m Tuch **ein** Kleidungsstück geben, wie viel dergleichen lassen sich aus 100 m Tuch von gleicher Breite verfertigen? (So viele Kleidungsstücke, als 3,75 m in 100 m enthalten sind.)

3,75 m	100 m	
375	10000	26 Kl.
	750	
	2500	
	2250	
	250 cm Rest.	

3,75 m = 375 cm
100 m = 10000 cm
375 cm sind in 10000 cm 26mal enthalten; also geben 100 m Tuch 26 Kleider, und 250 cm bleiben übrig.

6) In wie viele Theile wurden 25,92 ha Wald abgetheilt, wenn jeder Theil 1,7280 ha beträgt?

Aufl. Von dem Ganzen wurde ein Theil nach dem andern weggemessen, und da jeder Theil 1,7280 ha beträgt, so sind es so viele Theile, als 1,7280 ha von 25,92 ha weggenommen werden können, in diesen also enthalten sind.

Ausr. 1 7 2 8 0̸ | 2 5 9 2 0 0̸ | 15 × 1 Th. = 15 Theile.
1 7 2 8
8 6 4 0
8 6 4 0

Vermischte Aufgaben.

§. 248.

Aufg. 1. Aus 3 Ballen Tuch von 28,6 m, 31,55 m und 33,57 m wurden 24 Waffenröcke verfertigt, und 1,32 m blieb übrig. Wie viel Tuch ist zu jedem Rocke verwendet worden?

Aufl. Zuerst addire ich die 3 Ballen. Diese wurden aber nicht vollständig verwendet, sondern es blieb ein Rest von 1,32 m. Um zu finden, wie viel Tuch zu den 25 Röcken wirklich verwendet worden ist, so ziehe ich 1,32 m von der Summe ab. Von dem, was sich nun ergibt, kommt auf 1 Rock der 24. Theil.

Dieß läßt sich in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{(28{,}60\text{ m} + 31{,}55\text{ m} + 33{,}57\text{ m}) - 1{,}32\text{ m}}{24} = x$$

a.
2 8,6 0 m
3 1,5 5
3 3,5 7
9 3,7 2 m

b.
9 3,7 2 m
— 1,3 2 m
9 2,4 0 m

c.
2 4 | 9 2,4 2 m | 3,8 5 m
7 2
2 0,4
1 9 2
1 2 0

x = 3,85 m

Wir benützen diese Aufgabe zu einer zweiten:

Aufg. 2. Aus 3 Ballen Tuch wurden 24 Waffenröcke verfertigt. Zu jedem derselben wurden 3,85 m verwendet, und ein Stückchen von 1,32 m blieb übrig. Der eine Ballen Tuch hatte 28,60 m, der andere 31,55 m; wie viel der dritte?

a. Die 24 Röcke erforderten
3,8 5 m × 2 4
1 5 4 0
7 7 0
9 2,4 0 m

b. Die 3 Ballen enthielten also mit dem Reste
9 2,4 0 m
+ 1,3 2
9 3,7 2 m

c. Der 1. und 2. Ballen betrugen
2 8,6 0 m
+ 3 1,5 5
6 0,1 5 m

d. Folglich betrug der 3. Ballen
9 3,7 2 m
— 6 0,1 5
3 3,5 7 m

Aufg. 3. Eine Bäuerin verkauft an einen Konditor 18,5 kg Butter, das Kilo zu 2,30 ℳ, und nimmt dagegen 4 kg Kaffee, das Kilo zu 3,15 ℳ, und 7 kg Zucker, das Kilo zu 1,20 ℳ. Wie viel baares Geld erhält dieselbe?

Butter:	Kaffee:	Zucker:
18,5 × 2,3 ℳ	3,15 ℳ × 4	1,2 ℳ × 7
555	12,60 ℳ	8,4 ℳ
370	+ 8,40 „	
42,55 ℳ	21,00 ℳ	
− 21,00 „		
21,55 ℳ baar.		

Aufg. 4. 1 franz. Fr. gilt 0,80 ℳ. Wie viel Mark betragen 3000 Fr.? (3000 × 0,80 ℳ = 2400 ℳ)

Aufg. 5. Wie viel fr. Fr. machen hiernach 1000 ℳ?

Aufl. So oft ich dem Wechsler 0,80 ℳ zahle, so oft erhalte ich von ihm 1 fr. Fr.; für 1000 ℳ erhalte ich daher so vielmal 1 Fr., als 0,80 ℳ in 1000 ℳ enthalten sind. (1250 Fr.)

6) Gewöhnlich befinden sich unter 100 Einwohnern eines Ortes 14 schulpflichtige Kinder. Wie viel schulpflichtige Kinder wird es in einer Stadt geben, welche a. 8400, b. 120000, c. 9850 Einwohner hat?

Aufl. So vielmal 100 Einw., so vielmal 14 schulpflichtige Kinder. Die Stadt mit 8400 Einw. hat also 84 × 14 = 1176, die Stadt mit 120000 Einw. hat 1200 × 14 = 16800, die Stadt mit 9850 Einw. hat 98,5 × 14 = 1379 schulpflichtige Kinder.

7) Wenn 100 kg Soole 36,890 kg Salz enthalten, wie viel Salz enthalten 4760 kg Soole? (47,6 × 36,89 kg = 1755,964 kg.)

8) Ein Händler bezahlt für das Meter Tuch 6,75 ℳ und verkauft es wieder um 7,60 ℳ; wie viel gewinnt er an 54 Meter?

Aufl. An 1 m gewinnt er 7,60 — 6,75 = 0,85 ℳ, an 54 m also 54 × 0,85 ℳ = 45,90 ℳ.

9) Wie viel gewinnt ein Weinhändler an 1 hl, welches er um 87 ℳ gekauft, wenn er das Liter um 1,20 ℳ abgibt? (33 ℳ)

10) A hatte 1250 ℳ ausgeliehen und bekam für jedes Hundert nur 72,80 ℳ wieder zurück. Wie viel beträgt sein Verlust?

Aufl. An 100 ℳ verlor A 100 — 72,8 = 27,2 ℳ; an 1250 ℳ verlor er also 12,5 × 27,2 ℳ = 340 ℳ.

11) 100 ℳ geben jährlich 4,5 ℳ Zins; wie viel Zins geben 1750 ℳ jährlich? (17,5 × 4,5 ℳ = 78,75 ℳ)

12) A bezahlt von 4800 ℳ Kap. jährlich 228 ℳ und B von 7640 ℳ Kp. 343,80 ℳ Zins. Wie viel Zins bezahlt jeder von 100 ℳ Kp.?

Aufl. A bezahlt von 48 × 100 ℳ Kapital 228 ℳ Zins, von 100 ℳ also 228 ℳ : 48 = 4,75 ℳ; B bezahlt von 76,4 × 100 ℳ Kap. 343,80 ℳ Zins, von 100 ℳ also 343,8 ℳ : 76,4 = 4,5 ℳ.

13) Von 4770 ℳ erhielt A die Hälfte, B 1 Drittel und C den Rest; wie viel jeder? (A 2385 ℳ, B 1590 ℳ, C 795 ℳ.)

14) Von 3146 ℳ soll A $^2/_5$, B $^3/_8$ und C das Uebrige erhalten; wie viel kommt auf jeden? (A erhält den 5. Theil von 3146 ℳ 2mal = 1258,40 ℳ; B $^1/_8$ von 3146 ℳ 3mal = 1179,75 ℳ; C 3146 − (1258,40 ℳ + 1179,75 ℳ) = 707,85 ℳ)

15) Von 130 ℳ erhält A 38,70 ℳ, B 12,65 ℳ mehr als A, und C so viel als A und B zusammen weniger 50,10 ℳ; wie viel jeder? (A 38,70 ℳ, B 51,35 ℳ, C 39,95.)

16) Für 45 ₰ erhält von 0,320 kg; wie viel für 3,60 ℳ?

Aufl. 3,60 ℳ = 360 ₰ = 4 × 90 = 8 × 45 ₰. Erhält man also für 40 ₰ 0,320 kg, so erhält man für 3,60 ℳ 8×0,320=2,560 kg.

17) 8 Arbeiter verdienen 62,72 ℳ, wie viel 5 derselben?

Aufl. Ich suche zuerst, was 1 Arbeiter erhält, dann, wie viel 5 Arbeiter erhalten.

Ausr. 8 Arb. 62,72 ℳ

1 „ $\frac{62,72 \text{ ℳ}}{8} = 7,84$ ℳ

5 „ 7,84 ℳ × 5 = 39,20 ℳ

Sprechweise: 8 Arbeiter verdienen 62,72 ℳ; 1 Arbeiter erhält den 8. Theil davon, also 62,72 ℳ, getheilt durch 8; gibt 7,84 ℳ; 5 Arbeiter erhalten 5mal so viel, also 7,84 ℳ multiplicirt mit 5 = 39,20 ℳ

18) A gab zum Bau einer Eisenbahn 84 Ar Ackerfeld ab und erhielt dafür 2005,50 ℳ; wie viel wird B für 1 ha 43 a von gleicher Bodengüte erhalten?

Ausr. 84 a 2005,50 ℳ

1 a $\frac{2005,50 \text{ ℳ}}{84} = 23,875$ ℳ

143 a 23,875 ℳ × 143 = 3414,125 ℳ

Oder: 0,84 ha 2005,50 ℳ

0,01 ha $\frac{2005,50 \text{ ℳ}}{84} = 23,875$ ℳ

1,43 ha 23,875 ℳ × 143 = 3414,125 ℳ

Sprechweise: 0,84 ha kosten 2005,50 ℳ; 0,01 ha ist von 0,84 ha der 84. Theil, also kostet es nur den 84. Theil so viel, nämlich 2005,50 ℳ getheilt durch 84 = 23,875 ℳ; 1,43 ha sind 143 × 0,01 ha und kosten daher 143mal so viel als 0,01 ha, also 23,875 ℳ multiplicirt mit 143 = 3414 ℳ 12,5 ₰.

Fünfter Cursus.

Die gemeinen Brüche.

Erste Abtheilung.

Besondere Behandlung der gewöhnlich vorkommenden Brüche.

Halbe.

§. 249. Gang und Verfahren.

A. Anschaulich und frei im Kopfe.

$^1/_2$ $^1/_2$

1) Theile ich dieses Ganze (ein Stäbchen, einen Papierstreifen, 1 Nuß, 1 Apfel, 1 Linie) in 2 gleiche Theile, so erhalte ich 2 Halbe. Ein Theil davon ist 1 Halbes. Wie erhalte ich daher $^1/_2$? (Wenn ich 1 Ganzes in 2 gleiche Theile zerlege und einen davon nehme.) $^1/_2$ Jahr, wie viel Monat? wie viel Wochen? $^1/_2$ Monat, wie viel Tage? $^1/_2$ Tag, wie viel Stunden? $^1/_2$ Std., wie viel Min.? $^1/_2$ Dtz., $^1/_2$ Schock, wie viel Stück? $^1/_2$ kg, $^1/_2$ Pfd., wie viel Gramm? $^1/_2$ Bll. Papier, wie viel Ries? $^1/_2$ Rs., wie viel Buch? 2c.

2)

a. Das erste Ganze $= {}^2/_2$; das andere Ganze gibt wieder $^2/_2$; 2 G. machen also $2 \times {}^2/_2$ oder $^4/_2$; das dritte G. gibt wieder $^2/_2$; 3 G. machen daher $3 \times {}^2/_2$ oder $^6/_2$ u. s. w. So zuerst. Dann: 5 G. $= 5 \times {}^2/_2$ oder $^{10}/_2$; 8 G. $= 8 \times {}^2/_2$ oder $^{16}/_2$; 10 G. $= 10 \times {}^2/_2 = {}^{20}/_2$ 2c. $1^1/_2 = {}^2/_2 + {}^1/_2 = {}^3/_2$; $5^1/_2 = {}^{10}/_2 + {}^1/_2 = {}^{11}/_2$; $7^1/_2 = {}^{15}/_2$ u. s. w.

b. Wie viel Ganze machen $^8/_2$? $^2/_2 = 1$ G. Nehme ich daher $^2/_2$ von $^8/_2$ weg, so habe ich 1 G.; nehme ich vom Reste wieder $^2/_2$, so habe ich wieder 1 G. u. s. f. So vielmal $^2/_2$ in $^8/_2$ enthalten sind, so vielmal 1 Ganzes habe ich. $^2/_2$ sind in $^8/_2$ 4mal enthalten; $^8/_2 = 4 \times {}^2/_2$, also auch 4×1 G. oder 4 G.

$^{14}/_{2} = ?$ G. $^{2}/_{2}$ sind in $^{14}/_{2}$ 7mal enthalten; $^{14}/_{2} = 7$ G.
$^{10}/_{2} = ?$ G. $^{2}/_{2}$ sind in $^{10}/_{2}$ 5mal enthalten; $^{10}/_{2} = 5$ G.
$^{18}/_{2} = ?$ G. $^{2}/_{2}$ sind in $^{18}/_{2}$ 9mal enthalten; $^{18}/_{2} = 9$ G. So wieder zuerst. Dann: $^{4}/_{2} = 2$, $^{6}/_{2} = 3$, $^{16}/_{2} = 8$, $^{22}/_{2} = 11$ ꝛc. $^{11}/_{2} = {}^{10}/_{2} + {}^{1}/_{2} = 5^{1}/_{2}$, $^{17}/_{2} = {}^{16}/_{2} + {}^{1}/_{2} = 8^{1}/_{2}$; $^{9}/_{2} = 4^{1}/_{2}$ u. s. w.
Uebung 2 und 3 bis zur Schlagfertigkeit.

3) $^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2}$! ($^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} = {}^{2}/_{2} = 1$.) $1 - {}^{1}/_{2}$! ($1 = {}^{2}/_{2}$; $^{2}/_{2} - {}^{1}/_{2} = {}^{1}/_{2}$.)
Reihenbildung mit $^{1}/_{2}$:

a. $^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} = 1$	b. $10 - {}^{1}/_{2} = 9^{2}/_{2} - {}^{1}/_{2} = 9^{1}/_{2}$
$1 + {}^{1}/_{2} = 1^{1}/_{2}$ od. anderthalb	$9^{1}/_{2} - {}^{1}/_{2} = 9$
$1^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} = 2$	$9 - {}^{1}/_{2} = 8^{2}/_{2} - {}^{1}/_{2} = 8^{1}/_{2}$
$2 + {}^{1}/_{2} = 2^{1}/_{2}$ od. dritthalb	$8^{1}/_{2} - {}^{1}/_{2} = 8$
So fort bis 10.	u. s. w.

Reihenbildung mit $2^{1}/_{2}$ und 3, mündlich und schriftlich:

a. $1 + 2^{1}/_{2} = 3^{1}/_{2}$	b. $100 - 2^{1}/_{2} = 98 - {}^{1}/_{2} = 97^{1}/_{2}$
$3^{1}/_{2} + 3 = 6^{1}/_{2}$	$97^{1}/_{2} - 3 = 94^{1}/_{2}$
$6^{1}/_{2} + 2^{1}/_{2} = 8 + 1$ od. 9	$94^{1}/_{2} - 2^{1}/_{2} = 92^{1}/_{2} - {}^{1}/_{2} = 92$
$9 + 3 = 12$	$92 - 3 = 89$
$12 + 2^{1}/_{2} = 14^{1}/_{2}$	$89 - 2^{1}/_{2} = 87 - {}^{1}/_{2} = 86^{1}/_{2}$
u. s. w.	u. s. w.

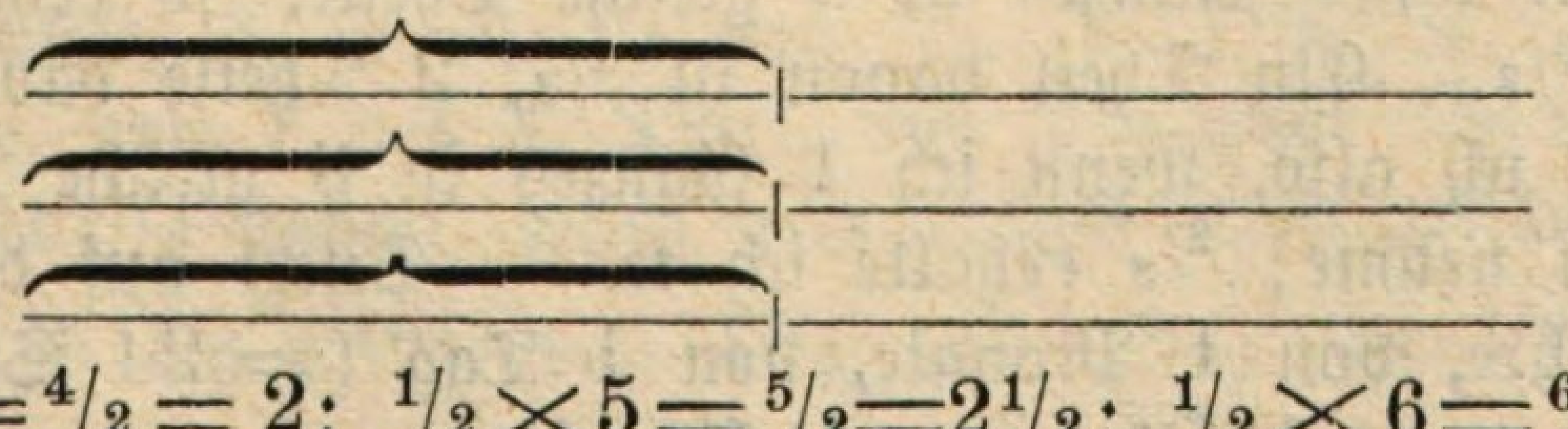
Aufg. Wie viel muß man zu $27^{1}/_{2}$ legen, um 50 zu erhalten?

Ausr. Zu $27^{1}/_{2}$ noch $^{1}/_{2}$ gibt 28, zu 28 noch 2 gibt 30, und zu 30 noch 20 gibt 50; $^{1}/_{2} + 2 + 20 = 22^{1}/_{2}$. — Probe: $27^{1}/_{2} + 22^{1}/_{2} = 49 + 1$ oder 50.

Aufg. Um wie viel ist die Zahl 100 größer als $63^{1}/_{2}$?
a. Durch Zulegen: $63^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} = 64$, $+ 6 = 70$, $+ 30 = 100$; $^{1}/_{2} + 6 + 30 = 36^{1}/_{2}$.
b. Durch Abziehen: $100 - 60 = 40$, $40 - 3 = 37$, $37 - {}^{1}/_{2} = 36^{1}/_{2}$.
Von 72 ℳ werden $27^{1}/_{2}$ ℳ ausgegeben; wie viel ist übrig?

4) a. $2 \times {}^{1}/_{2} = {}^{2}/_{2} = 1$; $3 \times {}^{1}/_{2} = {}^{3}/_{2} = 1^{1}/_{2}$; $4 \times {}^{1}/_{2} = {}^{4}/_{2} = 2$ u. s. w.
b. $3 \times 2^{1}/_{2} = 2^{1}/_{2} + 2^{1}/_{2} + 2^{1}/_{2} = 3 \times 2 + 3 \times {}^{1}/_{2} = 6 + 1^{1}/_{2} = 7^{1}/_{2}$.
$4 \times 3^{1}/_{2} = 4 \times 3 + 4 \times {}^{1}/_{2} = 12 + 2$ oder 14; $7 \times 4^{1}/_{2} = 28 + 3^{1}/_{2} = 31^{1}/_{2}$.
Das Kilo zu 3,50 ℳ; wie berechnen sich 8, 15, 24, 45 Kilo?

c. $1 \times 1 \quad = 1$
$^{1}/_{2} \times 1 \quad = {}^{1}/_{2}$
$^{1}/_{2} \times 2 \quad = {}^{2}/_{2} = 1$
$^{1}/_{2} \times 3 \quad = {}^{3}/_{2} = 1^{1}/_{2}$



$^{1}/_{2} \times 4 = {}^{4}/_{2} = 2$; $^{1}/_{2} \times 5 = {}^{5}/_{2} = 2^{1}/_{2}$; $^{1}/_{2} \times 6 = {}^{6}/_{2} = 3$ u. s. w.
d. $2^{1}/_{2} \times 7 = ?$ $2^{1}/_{2} \times 7 = 2 \times 7 + {}^{1}/_{2} \times 7 = 14 + 3^{1}/_{2} = 17^{1}/_{2}$.
$3^{1}/_{2} \times 8 = 24 + 4 = 28$; $5^{1}/_{2} \times 9 = 45 + 4^{1}/_{2} = 49^{1}/_{2}$.

Kostet 1 m Zeug 5 ℳ, so kosten $7^{1}/_{2}$ m $7^{1}/_{2} \times 5$ ℳ $= 35 + 2^{1}/_{2} = 37^{1}/_{2}$ ℳ.

5) a. Wie vielmal $\frac{1}{2}$ ist 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3? ꝛc. ($1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{2}$; $2 = \frac{4}{2} = 4 \times \frac{1}{2}$ u. s. w.) $\frac{1}{2}$ kg zu 1,40 ℳ; was kosten 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ kg?

b. Der wie vielte Theil ist $\frac{1}{2}$ von 1, von $1\frac{1}{2}$, von 2? u. s. w. ($\frac{1}{2}$ ist von 1 der halbe Theil, von $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ der dritte Theil ꝛc.) Was kostet $\frac{1}{2}$ Dutzend, wenn 1 ($1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ ꝛc.) Dutzend 24 ℳ kostet?

c. Wie viel ist der 3. Theil von $1\frac{1}{2}$? $\frac{1}{5}$ von $2\frac{1}{2}$? $\frac{1}{7}$ von $3\frac{1}{2}$? ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; der 3. Theil von $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; der 5. Theil ꝛc.) Wie viel ist der 3. Theil von $25\frac{1}{2}$? ($25\frac{1}{2} = 24 + 1\frac{1}{2}$ u. s. w.)

6) Wie oft liegt $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{2}$ in 1? Wie oft liegt 1 in 1? Wie oft 1 in $\frac{1}{2}$? — Jede Zahl ist in ihrem Doppelten 2mal, in ihrer Hälfte $\frac{1}{2}$mal enthalten. Wie oft liegt 8 in 16? 16 in 8? ($\frac{1}{2}$mal.) — 12 in 24? 24 in 12?

Wie oft lassen sich 3 E von 6 E, 3 Halbe von 6 Halben wegnehmen? $\frac{3}{2}$ sind daher in $\frac{6}{2}$, wie 3 in 6, 2mal enthalten.

Wie oft liegt $1\frac{1}{2}$ in $10\frac{1}{2}$? ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, und $10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$; $\frac{3}{2}$ sind in $\frac{21}{2}$ so oft enthalten wie 3 in 21, nämlich 7mal.)

A gibt täglich $2\frac{1}{2}$ ℳ aus; wie lange reicht er mit 100 ℳ? Er reicht so viele Tage aus, als $2\frac{1}{2}$ ℳ in 100 ℳ enthalten sind. $2\frac{1}{2}$ in $100 = \frac{5}{2}$ in $\frac{200}{2} = 5$ in $200 = 40$mal; also 40 Tage.

B. Schriftlich.

1) $57\frac{1}{2}$
$75 = \frac{75}{2}$

2) $\frac{785}{2} = 392\frac{1}{2}$

3) $573\frac{1}{2}$
$+398\frac{1}{2}$
972

4) $480.\frac{2}{2}$
$-172\ \frac{1}{2}$
$307\ \frac{1}{2}$

5) $7 \times 12\frac{1}{2}$
$7 \times 12 = 84$
$7 \times \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
$7 \times 12\frac{1}{2} = 87\frac{1}{2}$

6) $5\frac{1}{2} \times 9$
$5 \times 9 = 45$
$\frac{1}{2} \times 9 = 4\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2} \times 9 = 49\frac{1}{2}$

7) $4\frac{1}{2}$ | $38\frac{1}{2}$ | $8\frac{5}{9}$
9 | 77
72
5

Drittel.

§. 250.

$\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$

1) Theile ich 1 Ganzes in 3 gleiche Theile, so erhalte ich Drittel. 1 Ganzes $= \frac{3}{3}$. Ein Theil davon ist $\frac{1}{3}$, 2 Theile davon sind $\frac{2}{3}$. Ein Drittel erhalte ich also, wenn ich 1 Ganzes in 3 gleiche Theile zerlege und 1 Theil davon nehme; $\frac{2}{3}$ erhalte ich ꝛc. — Sucht auf diese Weise $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ von 1 Jahre, von 1 Monate, von 1 Tag (= 24 Std.), von 1 Std., von 1 Minute, von 1 Dtz., von 1 Schock!

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in 3tel und umgekehrt. (Das Verfahren ist wie bei den Halben.)

3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$! $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$! $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$! $1 - \frac{1}{3}$! $1 - \frac{2}{3}$!

Reihenbildung mit $^2/_3$, mündlich und schriftlich:

a. $^2/_3 + ^2/_3 = ^4/_3 = 1^1/_3$
$1^1/_3 + ^2/_3 = 1^3/_3 = 2$
$2 + ^2/_3 = 2^2/_3$
u. s. f.

b. $10 - ^2/_3 = 9^3/_3 - ^2/_3 = 9^1/_3$
$9^1/_3 - ^2/_3 = 8^4/_3 - ^2/_3 = 8^2/_3$
$8^2/_3 - ^2/_3 = 8$
u. s. f.

Reihenbildung mit $3^2/_3$ und 4, mündlich und schriftlich:

a. $1 + 3^2/_3 = 4^2/_3$
$4^2/_3 + 4 = 8^2/_3$
$8^2/_3 + 3^2/_3 = 11^4/_3 = 12^1/_3$
u. s. w.

b. $100 - 3^2/_3 = 97 - ^2/_3 = 96^1/_3$
$96^1/_3 - 4 = 92^1/_3$
$92^1/_3 - 3^2/_3 = 91^4/_3 - 3^2/_3 = 88^2/_3$
u. s. w.

Bei $100 - 3^2/_3$ wird gerechnet: $100 - 3 = 97, - ^2/_3 = 96^1/_3$. Bei $92^1/_3 - 3^2/_3$ heißt es: $^2/_3$ von $^1/_3$ geht nicht; $92^1/_3 = 91^4/_3$; nun steht: $91^4/_3 - 3^2/_3$; $^4/_3 - ^2/_3 = ^2/_3$, $91 - 3 = 88$; also ist 2c.

Aufg. Wie viel beträgt der Unterschied zwischen $12^1/_3$ und 30?

a. Durch Zulegen: $12^1/_3 + ^2/_3 = 13$, $+ 17 = 30$; $^2/_3 + 17 = 17^2/_3$.

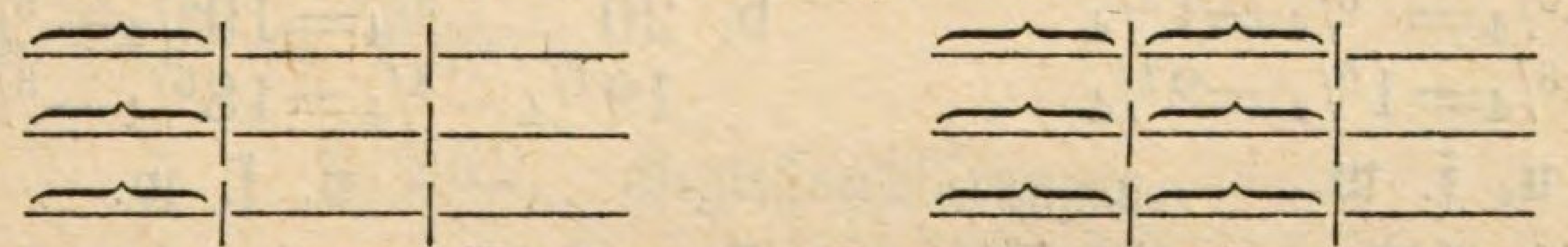
b. Durch Abziehen: $30 - 12 = 18$, $18 - ^1/_3 = 17^2/_3$.

Von $20^1/_3$ Schock Eier sind noch $7^2/_3$ Schock vorhanden; wie viel sind verkauft oder verbraucht worden? ($12^2/_3$ Schock oder 12 Schck 40 Stck.)

4) a. $2 \times ^2/_3 = ^4/_3 = 1^1/_3$; $7 \times ^2/_3 = ^{14}/_3 = 4^2/_3$; $8 \times ^2/_3 = ^{16}/_3 = 5^1/_3$.

b. $4 \times 2^2/_3$! $4 \times 2 = 8$; $4 \times ^2/_3 = ^8/_3 = 2^2/_3$; $8 + 2^2/_3 = 10^2/_3$.

Wenn täglich $8^2/_3$ Dtz. Bleistifte gemacht werden, wie v. in 1 Wch.?

c. 

$^1/_3 \times 1 = ^1/_3$, $^1/_3 \times 2 = ^2/_3$, $^1/_3 \times 3 = ^3/_3$ 2c. $^2/_3 \times 1 = ^2/_3$, $^2/_3 \times 2 = ^4/_3 = 1^1/_3$ 2c.

d. $2^1/_3 \times 4$! $2^1/_3 \times 7 = 2 \times 7 + ^1/_3 \times 7 = 14 + 2^1/_3 = 16^1/_3$.
$4^2/_3 \times 5$! $4 \times 5 = 20$; $^2/_3 \times 5 = ^{10}/_3 = 3^1/_3$; $20 + 3^1/_3 = 23^1/_3$.
Ein Kapital gibt in 1 Jahre 32 *M.* Zins; wie viel in $4^2/_3$ J.?

5) a. Wie vielmal $^1/_3$ sind $^2/_3$, 1, $1^1/_3$, $2^2/_3$, $3^1/_3$? ($^2/_3$ sind $2 \times ^1/_3$; 1 Ganzes ist $3 \times ^1/_3$; $1^1/_3$ oder $^4/_3 = 4 \times ^1/_3$ 2c.)

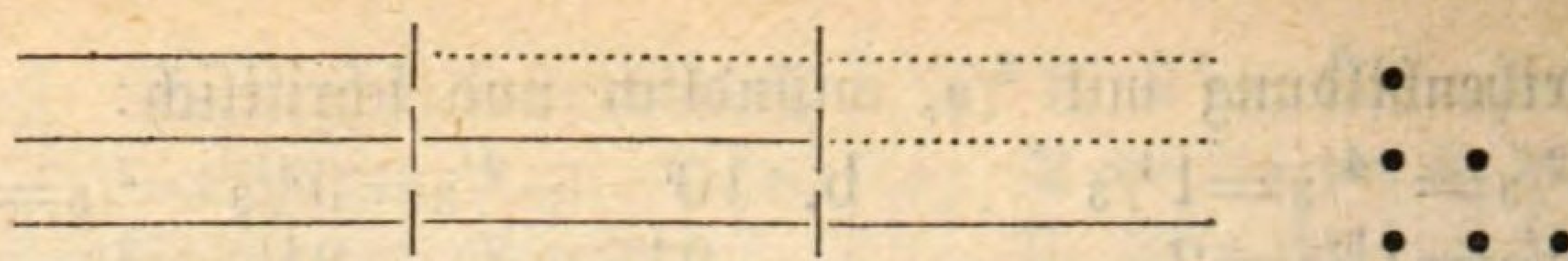
Aufg. Ein Bahnzug legt in $^1/_3$ Std. 8 km zurück; wie viel in $^2/_3$ Std.? in $2^1/_3$ Std.? in $5^1/_3$ Std.? in $8^2/_3$ Std.?

b. Der wie vielte Theil ist $^1/_3$ von $^2/_3$, 1, $1^1/_3$? 2c. ($^1/_3$ ist von $^2/_3$ die Hälfte, von 1 der 3. Theil, von $1^1/_3$ oder $^4/_3$ der 4. Theil 2c.)
Was kostet $^1/_3$ Schock, wenn $2^2/_3$ Schock 9,60 *M.* kosten?

c. Wie viel ist die Hälfte von $4^2/_3$, von $1^1/_3$, von $7^1/_3$?

Ausr. Die Hälfte von $4^2/_3 = 2^1/_3$. — Die Hälfte von $1^1/_3$ ist nicht 1 Ganzes; $1^1/_3 = ^4/_3$; die Hälfte von $^4/_3 = ^2/_3$. — Auf die Hälfte von $7^1/_3$ kommen Ganze; $7^1/_3 = 6 + 1^1/_3$; die Hälfte hievon $= 3^2/_3$.

Mit 500 *M.* reicht Jemand $8^1/_3$ Monat; wie lange mit 100 *M.*?

6) 

$^{1}/_{3}$ ist in $^{1}/_{3}$, wie 1 in 1, 1mal;	$^{2}/_{3}$ sind in $^{2}/_{3}$, wie 2 in 2, 1mal;
$^{1}/_{3}$ ist in $^{2}/_{3}$, wie 1 in 2, 2mal;	$^{2}/_{3}$ sind in $^{1}/_{3}$, wie 2 in 1, $^{1}/_{2}$mal;
$^{1}/_{3}$ ist in $^{3}/_{3}$, wie 1 in 3, 3mal.	$^{2}/_{3}$ sind in $^{3}/_{3}$, wie 2 in 3, $1^{1}/_{2}$mal.

Wie oft sind 1 Dtz. 4 Stück (= $1^{1}/_{3}$ Dtz.) in 24 Dtz. enthalten? Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

Viertel.

§. 251.



1) Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 4 gleiche Theile zerlegt? — Wie erhalte ich $^{1}/_{4}$ von 1 Ganzen? Wie $^{2}/_{4}$, wie $^{3}/_{4}$? — Verwandelt $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ Jahr in Monate, in Wochen; $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ Tage in Stunden, $^{3}/_{4}$ Stunden in Minuten, $^{3}/_{4}$ Min. in Sekunden, $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ Dtz. und Schock in Stück, $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ *M.* in Pfg., Kilogr. und Pfund in Gramm! $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ Buch in Bogen!

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in 4tel und umgekehrt.

3) $^{1}/_{4} + ^{1}/_{4}$! $^{2}/_{4} + ^{1}/_{4}$! $^{3}/_{4} - ^{1}/_{4}$! $1 - ^{1}/_{4}$! $1 - ^{3}/_{4}$!

Reihenbildung mit $^{3}/_{4}$, mündlich und schriftlich:

a. $^{3}/_{4}+^{3}/_{4}= ^{6}/_{4}=1^{2}/_{4}$	b. $20 - ^{3}/_{4}=19^{4}/_{4}-^{3}/_{4}=19^{1}/_{4}$
$1^{2}/_{4}+^{3}/_{4}=1^{5}/_{4}=2^{1}/_{4}$	$19^{1}/_{4}-^{3}/_{4}=18^{5}/_{4}-^{3}/_{4}=18^{2}/_{4}$
u. s. w.	u. s. w.

Reihenbildung mit $4^{3}/_{4}$ und 5, mündlich und schriftlich:

a. $2 + 4^{3}/_{4}= 6^{3}/_{4}$	b. $100 - 4^{3}/_{4}=96 - ^{3}/_{4}=95^{1}/_{4}$
$6^{3}/_{4}+5 = 11^{3}/_{4}$	$95^{1}/_{4}-5 = 90^{1}/_{4}$
$11^{3}/_{4}+4^{3}/_{4}=15^{6}/_{4}=16^{2}/_{4}$	$90^{1}/_{4}-4^{3}/_{4}=89^{5}/_{4}-4^{3}/_{4}=85^{2}/_{4}$
u. s. f.	u. s. f.

Um wie viel ist die Zahl $12^{3}/_{4}$ kleiner als $31^{1}/_{4}$?

a. Zulegen: $12^{3}/_{4}+^{1}/_{4}=13$, $+18^{1}/_{4}=31^{1}/_{4}$; $^{1}/_{4}+18^{1}/_{4}=18^{2}/_{4}$.

b. Abziehen: $31^{1}/_{4}-10=21^{1}/_{4}$, $-2=19^{1}/_{4}$, $-^{3}/_{4}=18^{2}/_{4}$.

Von 40 Ctr. Waare wurden $14^{3}/_{4}$ und $12^{3}/_{4}$ Ctr. verkauft; wie viel beträgt der Rest? ($12^{2}/_{4}$ Ctr.)

4) a. $12\times^{3}/_{4}$! $12\times^{3}/_{4}=^{36}/_{4}=9$. Oder: $12\times^{3}/_{4}=12\times^{1}/_{4}+12\times^{1}/_{4}+12\times^{1}/_{4}$; $12\times^{3}/_{4}=12\times^{1}/_{4}$, 3mal genommen. Man rechnet daher:

$12 \times ^{1}/_{4} = 3$, und $12 \times ^{3}/_{4} = 3 \times 3$ oder 9.

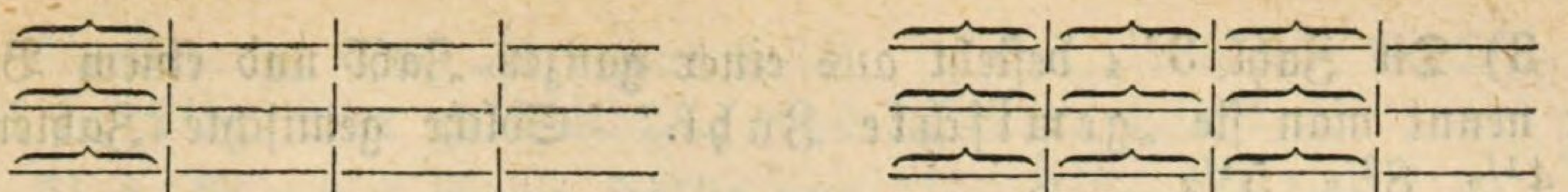
18×25 *₰.* $= 18 \times ^{1}/_{4}$ *M.* $= 4^{2}/_{4}$ *M.* $= 4{,}50$ *M.*

13×75 *₰.* $= 13 \times ^{3}/_{4}$ *M.* $= ^{39}/_{4}$ *M.* $= 9^{3}/_{4}$ *M.* $= 9{,}75$ *M.*

Bis zur Schlagfertigkeit!

b. $5 \times 3^{3}/_{4}$! $5 \times 3 = 15$; $5 \times ^{3}/_{4} = 3^{3}/_{4}$; $15 + 3^{3}/_{4} = 18^{3}/_{4}$.

100 *M.* tragen jährlich $4^{3}/_{4}$ *M.* Zs.; wie viel Zs. geben 3200 *M.*?

c. 

$\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{4}$; $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ 2c. $\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$ 2c.

d. $7\frac{1}{4} \times 5$! $7\frac{1}{4} \times 5 = 7 \times 5 + \frac{1}{4} \times 5 = 35 + 1\frac{1}{4} = 36\frac{1}{4}$.
$8\frac{3}{4} \times 7$! $8 \times 7 = 56$; $\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$; $56 + 5\frac{1}{4} = 61\frac{1}{4}$.
1 hl kostet 18 ℳ; 5,75 hl kosten $5\frac{3}{4} \times 18$ ℳ. = 103,50 ℳ.

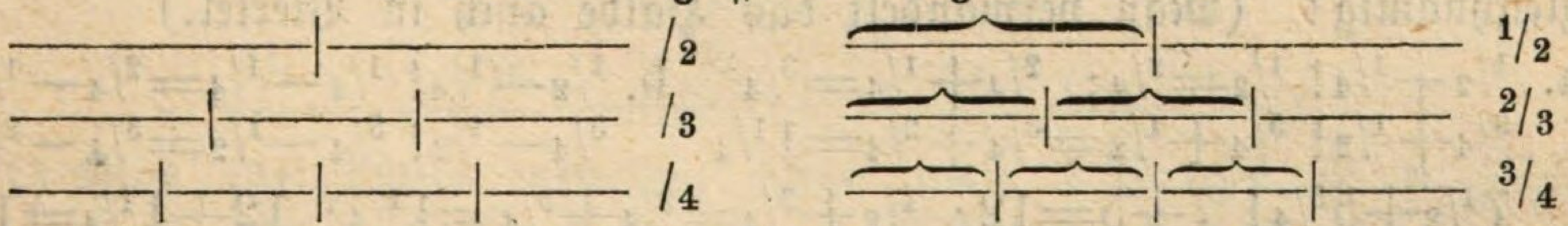
5) a. Wie vielmal $\frac{1}{4}$ sind $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$? 2c. ($\frac{2}{4} = 2 \times \frac{1}{4}$, also 2mal so viel als $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, also 3mal so viel als $\frac{1}{4}$ 2c.)
$\frac{1}{4}$ Dtz. Stühle zu 7,40 ℳ; was kosten $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4}$ Dtz.?

b. Der wie vielte Theil ist $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{4}$, von $\frac{3}{4}$, von 1, $1\frac{1}{4}$? 2c. ($\frac{1}{4}$ ist von $\frac{2}{4}$ die Hälfte, von $\frac{3}{4}$ der 3. Theil, von 1 der 4. Theil 2c.)
Ein Kapital gibt jährlich 175 ℳ. Zs.; wie viel in $\frac{1}{4}$ Jahr?

c. Wie viel ist der 3. Theil von $12\frac{3}{4}$, von $2\frac{1}{4}$, von $17\frac{1}{4}$?
Ausr. Der 3. Theil von $12\frac{3}{4} = 4\frac{1}{4}$; der 3. Theil von $2\frac{1}{4}$ oder $\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$; der 3. Theil von $17\frac{1}{4}$ oder $15 + 2\frac{1}{4} = 5\frac{3}{4}$.
Von $1\frac{1}{4}$ ha erntete man $21\frac{1}{4}$ hl, wie viel von $\frac{1}{4}$ ha?

6) Wie oft sind $\frac{3}{4}$ enthalten in $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$? $\frac{3}{4}$ sind in $\frac{3}{4}$, wie 3 in 3, 1mal; $\frac{3}{4}$ sind in $\frac{6}{4}$, wie 3 in 6, 2mal 2c.
Wie oft ist $2\frac{1}{4}$ in $16\frac{3}{4}$ enthalten?
Ausr. $2\frac{1}{4}$ in $16\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ in $\frac{67}{4} = 9$ in $67 = 7\frac{4}{9}$mal.
A erhält $1\frac{3}{4}$ ℳ. Tagelohn; wie lange muß er arbeiten, um 50 ℳ. zu verdienen? ($28\frac{4}{7}$ Tg.)
Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 252. Begriffserklärungen.

1) 

a. Die Zahlen unter den kleinen schrägen Strichen zeigen an, in wie viel gleiche Theile das Ganze zerlegt ist und wie die Theile heißen. Weil sie die Theile benennen, so heißt man sie „Nenner".

b. Die Zahlen über den Strichen zeigen an, wie viel Theile von dem Ganzen genommen oder weggebrochen sind; sie zählen die Theile, welche der Bruch enthält. Daher heißt man sie „Zähler".
Wie heißt der Zähler und wie der Nenner von dem Bruche $\frac{1}{2}$? Wie von dem Bruche $\frac{2}{3}$? von $\frac{3}{4}$? Was sagt uns bei dem Bruche $\frac{3}{4}$ der Nenner 4? Was der Zähler 3?

2) Die (angeschriebenen) Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ haben gleiche Nenner. Der Theil des ersten Bruches heißt Drittel, und die 2 Theile des andern Bruches heißen Drittel. Weil die beiden Brüche gleiche Nenner haben, so haben ihre Theile gleiche Namen. Brüche mit gleichen Nennern sind gleichnamige Brüche. — Von den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ hat jeder einen andern Nenner. Die Theile heißen Halbe, Drittel, Viertel. Es sind also 3 ungleichnamige Brüche.

3) Die Zahl $3^3/_4$ besteht aus einer ganzen Zahl und einem Bruche; daher nennt man sie „gemischte Zahl." Solche gemischte Zahlen sind auch $4^1/_2$, $8^2/_3$, $5^1/_4$.

4) Soll gesucht werden, wie oft $1^1/_2$ in einer andern Zahl enthalten ist, so muß man $1^1/_2$ in $^3/_2$ verwandeln. Man muß die gemischte Zahl also erst dazu „einrichten", wozu sie gebraucht werden will. Darum nennt man das Verwandeln von $1^1/_2$ in $^3/_2$, $2^1/_3$ in $^7/_3$, $3^1/_4$ in $^{13}/_4$ „das Einrichten der gemischten Zahl."

Fragen: Mit wie vielen Zahlen wird ein (gemeiner) Bruch geschrieben? Wie heißen sie? Was sagt der Nenner? Der Zähler? — Welche Brüche nennt man gleichnamige Brüche? welche ungleichnamige? — Was versteht man unter einer gemischten Zahl? Was ist mit der Zahl $7^1/_3$ zu thun, wenn sie eingerichtet werden soll?

Halbe und Viertel.

§. 253.

1) Was für Theile entstehen, a. wenn man 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theilt? b. wenn man jedes Halbe wieder in 2 gleiche Theile zerlegt?



$$^2/_2 = {^4/_4}\ ;\ ^4/_4 = {^2/_2}$$
$$^1/_2 = {^2/_4}\ ;\ ^2/_4 = {^1/_2}$$

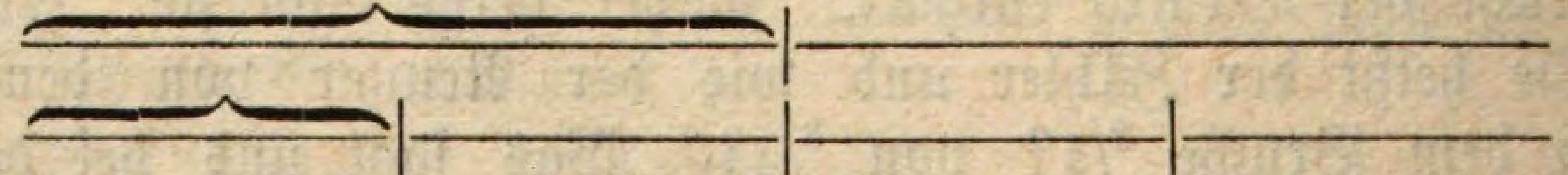
Vergleicht $^1/_2$ Dtz. mit $^2/_4$ Dtz., $^1/_2$ Tg. mit $^2/_4$ Tg., $^1/_2$ Std. mit $^2/_4$ Std.!

2) Da $^1/_2 = {^2/_4}$, so kann man $^2/_4$ für $^1/_2$ setzen und $^1/_2$ für $^2/_4$. Wie heißen die Nenner von $^1/_2$ und $^1/_4$? Die zwei Brüche haben verschiedene Nenner; was für Brüche sind es also? Wie macht man beide gleichnamig? (Man verwandelt das Halbe auch in Viertel.)

a. $^1/_2 + {^1/_4}$! $^1/_2 = {^2/_4}$; $^2/_4 + {^1/_4} = {^3/_4}$ b. $^1/_2 - {^1/_4}$! $^1/_2 - {^1/_4} = {^2/_4} - {^1/_4} = {^1/_4}$
$^3/_4 + {^1/_2}$! $^3/_4 + {^1/_2} = {^3/_4} + {^2/_4} = 1^1/_4$ $^3/_4 - {^1/_2}$! $^3/_4 - {^1/_2} = {^3/_4} - {^2/_4} = {^1/_4}$
$7^1/_2 + 5^3/_4$! $7 + 5 = 12$; $^1/_2 + {^3/_4} = {^2/_4} + {^3/_4} = 1^1/_4$; $12 + 1^1/_4 = 13^1/_4$.
$9^3/_4 - 2^1/_2$! $9^3/_4 - 2^1/_2 = 9^3/_4 - 2^2/_4$; $9 - 2 = 7$, $^3/_4 - {^2/_4} = {^1/_4}$; $7^1/_4$.
$8^1/_2 - 4^3/_4$! $8^1/_2 - 4^3/_4 = 8^2/_4 - 4^3/_4 = 7^6/_4 - 4^3/_4 = 3^3/_4$.

Wie viel beträgt der Unterschied von $^1/_4$ und $^1/_2$? von $^1/_2$ und $^3/_4$? $^3/_4$ kg, wie viel Pfund? ($^3/_4 = {^1/_2} + {^1/_4}$; 750 g = 500 + 250 g.) A zählt $10^1/_2$, B $12^1/_4$ Jahr; wie viel ist B älter als A?

3) $^1/_2 \times 1$ = $^1/_2$
$^1/_2 \times {^1/_2}$ = $^1/_4$



$^1/_2 \times 1^1/_2$! $^1/_2 \times 1 = {^1/_2}$, und $^1/_2 \times {^1/_2} = {^1/_4}$; $^1/_2 + {^1/_4} = {^3/_4}$.
$^1/_2 \times 2^1/_2$! $^1/_2 \times 2 = 1$, und $^1/_2 \times {^1/_2} = {^1/_4}$; $1 + {^1/_4} = 1^1/_4$.
$^1/_2 \times 3^1/_2$! $^1/_2 \times 3 = 1^1/_2$, und $^1/_2 \times {^1/_2} = {^1/_4}$; $1^1/_2 + {^1/_4} = 1^3/_4$.

So fort bis zur Schlagfertigkeit.

4) Wie vielmal $^1/_4$ ist $^1/_2$, $1^1/_2$, $2^1/_2$? ($^1/_2 = {^2/_4} = 2 \times {^1/_4}$; also ist $^1/_2$ 2mal so viel als $^1/_4$; $1^1/_2 = {^4/_4} + {^2/_4} = {^6/_4} = 6 \times {^1/_4}$ ꝛc.)

Der wie vielte Theil ist $^1/_4$ von $^1/_2$, von $1^1/_2$, von $2^1/_2$? ($^1/_4$ ist von $^1/_2$ oder $^2/_4$ die Hälfte, von $1^1/_2$ oder $^6/_4$ der 6. Theil ꝛc.)

$^1/_4$ Ctr. zu 5,60 ℳ; was kostet $^1/_2$ Ctr., $1^1/_2$ Ctr.? $2^1/_2$ Ctr.? $^1/_2$ ($1^1/_2$, $2^1/_2$) Liter zu 5,40 ℳ; was kostet $^1/_4$ Liter?

5) a. Wie viel ist die Hälfte von $1^1/_2$, $2^1/_2$, $3^1/_2$? ꝛc.
($1^1/_2 = {}^3/_2$; die Hälfte von $^1/_2 = {}^1/_4$, von $^3/_2 = {}^3/_4$.)
2 hl Wein zu $25^1/_2$ ($36^1/_2$, $75^1/_2$) ℳ; was kostet 1 hl?

b. Wie verfährt man, um zu finden, wie oft 40 ₰ in 2 ℳ enthalten sind? (Man verwandelt die 2 ℳ auch in Pfennige.) Man macht also beide Zahlen gleichnamig. Wie wird man nun auch verfahren, um zu finden, wie oft $^1/_2$ in $^3/_4$ liegt?
$^1/_2 = {}^2/_4$; $^2/_4$ sind in $^3/_4$, wie 2 in 3, $1^1/_2$mal enthalten.
Wie oft ist $1^1/_4$ in $15^1/_2$ enthalten?

Ausr. Man verwandelt beide Zahlen in 4tel. $1^1/_4 = {}^5/_4$; $15^1/_2 = 60 + 2 = {}^{62}/_4$; $^5/_4$ in $^{62}/_4 = 5$ in $62 = 12^2/_5$mal.

Wie vielmal 100 ℳ hat A ausgeliehen, wenn er von jedem Hundert $4^1/_2$ ℳ und im Ganzen $24^3/_4$ ℳ Zins erhält?

Aufl. So vielmal $4^1/_2$ ℳ Zs. A erhält, so vielmal 100 ℳ hat er ausgeliehen. Die Frage ist nun: wie oft sind $4^1/_2$ ℳ Zs. in $24^3/_4$ ℳ Zins enthalten? Man verwandelt beide Zahlen in 4tel. $4^1/_2 = {}^{18}/_4$, $24^3/_4 = {}^{99}/_4$; $^{18}/_4$ in $^{99}/_4 = 18$ in $99 = 2$ in $11 = 5^1/_2$mal. Das ausgeliehene Geld beträgt also $5^1/_2 \times 100 = 550$ ℳ.

$272^1/_2$	2	$174.^1/_4$	5	$1^1/_4$	$25^1/_2$	
$+ 97^3/_4$	3	$- 86^1/_2$	2	$1^1/_4$	$25^2/_4$	—
$370^1/_4$	$^5/_4 = 1^1/_4$	$87^3/_4$	$^3/_4$	5	102	$20^2/_5$

Fünftel.

§. 254.

$^1/_5$ | $^1/_5$ | $^1/_5$ | $^1/_5$ | $^1/_5$

1) Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 5 gleiche Theile zerlegt? Wie erhalte ich $^1/_5$ von 1 G.? wie $^2/_5$? ꝛc.

Verwandelt $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$ ℳ in Pfg., Hektoliter in Liter, Centner in Pfd., Meter in Centim., Monate in Tage, Schock in Stück, Kilogr. und Pfund in Gramm, Heft und Buch in Bogen!

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in 5tel und umgekehrt.

3) $^2/_5 + {}^2/_5$! $^3/_5 + {}^2/_5$! $^4/_5 - {}^3/_5$! $1 - {}^1/_5$, $1 - {}^3/_5$, $1 - {}^4/_5$!

Reihenbildung mit $^4/_5$, mündlich und schriftlich.

a. $^4/_5 + {}^4/_5 = {}^8/_5 = 1^3/_5$ b. $20 - {}^4/_5 = 19^5/_5 - {}^4/_5 = 19^1/_5$
$1^3/_5 + {}^4/_5 = 1^7/_5 = 2^2/_5$ $19^1/_5 - {}^4/_5 = 18^6/_5 - {}^4/_5 = 18^2/_5$
u. s. w. u. s. w.

Reihenbildung mit $5^3/_5$ und 6.

a. $1 + 5^3/_5 = 6^3/_5$ b. $100 - 5^3/_5 = 99^5/_5 - 5^3/_5 = 94^2/_5$
$6^3/_5 + 6 = 12^3/_5$ $94^2/_5 - 6 = 88^2/_5$
$12^3/_5 + 5^3/_5 = 18^1/_5$ $88^2/_5 - 5^3/_5 = 87^7/_5 - 5^3/_5 = 82^4/_5$
u. s. w. u. s. w.

Wie viel ist $40^2/_5$ mehr als $19^4/_5$? Antwort: $20^3/_5$.

4) $26 \times \frac{4}{5} = \frac{104}{5} = 20\frac{4}{5}$. Oder: $26 \times \frac{1}{5} = 5\frac{1}{5}$, $\times 4 = 20\frac{4}{5}$.
$8 \times 9\frac{4}{5} = 8 \times 9 + 8 \times \frac{4}{5}$. Oder: $8 \times 9\frac{4}{5} = 8 \times 10 - 8 \times \frac{1}{5}$.
1 kg zu $2\frac{3}{5}$ *M.*; wie hoch kommen 4, 7, 12, 18 kg?

$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$ $\frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$, $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$ ꝛc.
$\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$, $\frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$ ꝛc. $\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$, $\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ ꝛc.
$8\frac{4}{5} \times 6$! $8 \times 6 = 48$; $\frac{4}{5} \times 6 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$; $48 + 4\frac{4}{5} = 52\frac{4}{5}$.
Der Centner zu 16 *M.*; wie hoch kommen $9\frac{3}{5}$ Ctr.?

5) a. Wie vielmal $\frac{1}{5}$ sind $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $1\frac{1}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{5}$? ꝛc.
b. Der wie vielte Theil ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $1\frac{1}{5}$? ꝛc.
$\frac{1}{5}$ Pfd. zu 32 ₰; wie hoch kommen $4\frac{4}{5}$ Pfd.?
$6\frac{2}{5}$ Ctr. zu 560 *M.*; wie berechnet sich $\frac{1}{5}$ Ctr.?
c. Wie viel ist der 4. Theil von $\frac{4}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $8\frac{4}{5}$, $26\frac{2}{5}$?
Für 8 *M.* erhält man $44\frac{4}{5}$ m; wie viel für 1 *M.*?

6) $\frac{3}{5}$ in $\frac{9}{5}$! $\frac{3}{5}$ lassen sich von $\frac{9}{5}$, wie 3 von 9, 3mal wegnehmen; $\frac{3}{5}$ sind daher in $\frac{9}{5}$, wie 3 in 9, 3mal enthalten.

$\frac{3}{5}$ in $\frac{1}{5}$! Von $\frac{3}{5}$ ist in $\frac{1}{5}$, wie von 3 in 1, nur der 3te Theil enthalten; $\frac{3}{5}$ in $\frac{1}{5}$ ist daher $=$ 3 in 1 $= \frac{1}{3}$mal.

$\frac{3}{5}$ in $1\frac{2}{5}$! $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$; $\frac{3}{5}$ in $\frac{7}{5}$ $=$ 3 in 7 $= 2\frac{1}{3}$.

$2\frac{2}{5}$ in $8\frac{3}{5}$! $2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$, $8\frac{3}{5} = \frac{43}{5}$; $\frac{12}{5}$ sind in $\frac{43}{5}$ so oft enthalten wie 12 in 43, nämlich $3\frac{7}{12}$mal.

$1\frac{1}{5}$ kg kosten 1 *M.*; was kosten $10\frac{4}{5}$ kg? (9 *M.*)

Sechstel; Halbe, Drittel und Sechstel.

§. 255.

1) Wie entstehen Sechstel? Wie erhält man $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ ꝛc. von 1 Ganzen? $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ Dtz., Schock, wie viel Stück? $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ Mon., wie viel Tage? $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ Stunden, wie viel Minuten?

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in 6tel und umgekehrt.

3) Reihenbildung mit $\frac{5}{6}$, mündlich und schriftlich:

a. $\frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = 1\frac{4}{6}$ b. $20 - \frac{5}{6} = 19\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = 19\frac{1}{6}$
$1\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = 1\frac{9}{6} = 2\frac{3}{6}$ $19\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = 18\frac{7}{6} - \frac{5}{6} = 18\frac{2}{6}$
u. s. w. u. s. w.

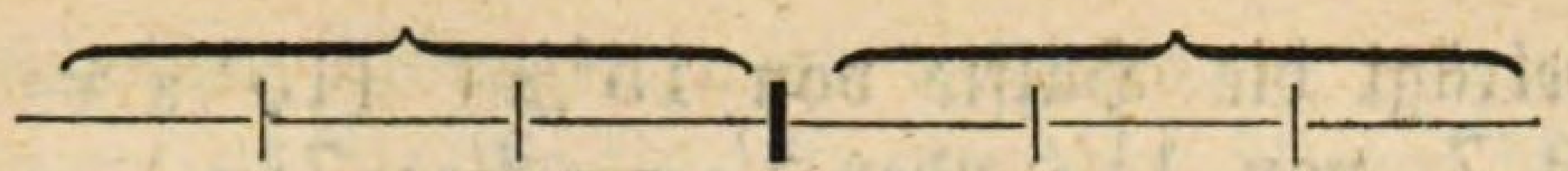
Die übrigen Arten von Aufgaben siehe Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 256.

1) a.

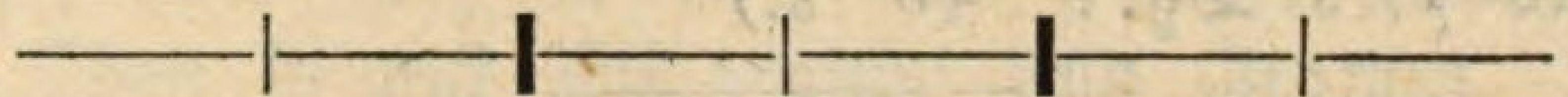
$1 = \frac{2}{2}$. Theilt man jedes Halbe wieder in 2 gleiche Theile, so werden aus den 2 Theilen 2×2 oder 4 Theile, also 4tel. Bekannt.

Theilt man jedes Halbe in 3 gleiche Theile, so werden aus den 2 Theilen 2×3 oder 6 Theile, also 6tel. $\frac{2}{2} = \frac{6}{6}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

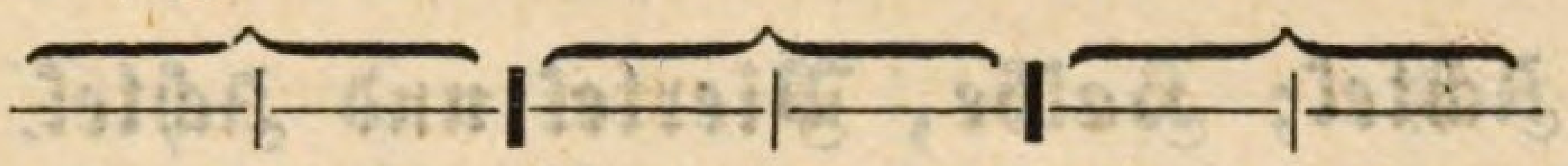


Vereinigt man von den $^6/_6$ je $^3/_6$ in 1 Theil, so bilden sich aus den 6 Theilen wieder 2 Theile, also 2 Halbe. $^6/_6 = {^2/_2}$; $^3/_6 = {^1/_2}$.

Zur weiteren Befestigung werden $^1/_2$ und $^3/_6$ Jahr in Monate, $^1/_2$ und $^3/_6$ Mon. in Tage, $^1/_2$ und $^3/_6$ Stunden in Minuten aufgelöst.

b. 

$1 = {^3/_3}$. Theilt man jedes 3tel wieder in 2 gleiche Theile, so werden aus den 3 Theilen 3×2 oder 6 Theile, also 6tel; $^3/_3 = {^6/_6}$; $^1/_3 = {^2/_6}$; $^2/_3 = {^4/_6}$.



Vereinigt man von den $^6/_6$ wieder je 2 in 1 Theil, so bilden sich aus den 6 Theilen 3 Theile, also 3tel. $^6/_6 = {^3/_3}$, $^2/_6 = {^1/_3}$, $^4/_6 = {^2/_3}$.

$^1/_3$ Schock = 20 Stck., und $^2/_6$ Schock = 20 Stck.; $^1/_3$ Schck. = $^2/_6$ Schck.

2) $^1/_2 + {^1/_6}$! Um diese Brüche addiren zu können, so muß man das Halbe auch in 6tel verwandeln. Man muß beide Brüche gleichnamig machen. $^1/_2 = {^3/_6}$; $^3/_6 + {^1/_6} = {^4/_6} = {^2/_3}$.

$^5/_6 + {^2/_3}$! $^2/_3 = {^4/_6}$; $^5/_6 + {^4/_6} = {^9/_6} = 1^3/_6$ oder $1^1/_2$.

$^2/_3 + {^1/_2}$! $^2/_3 = {^4/_6}$, $^1/_2 = {^3/_6}$; $^4/_6 + {^3/_6} = {^7/_6} = 1^1/_6$.

$^1/_2 - {^1/_6}$! $^1/_2 = {^3/_6}$; $^3/_6 - {^1/_6} = {^2/_6}$ oder $^1/_3$.

$^5/_6 - {^1/_3}$! $^5/_6 - {^1/_3} = {^5/_6} - {^2/_6} = {^3/_6}$ oder $^1/_2$.

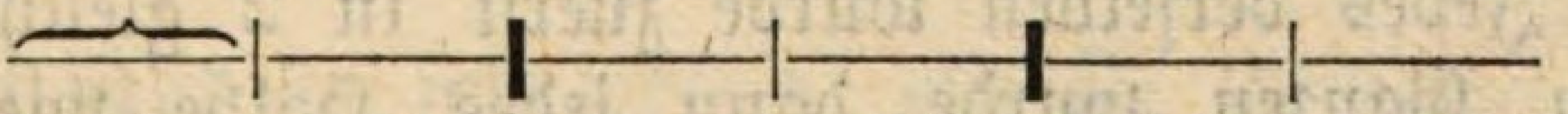
$^2/_3 - {^1/_2}$! $^2/_3 = {^4/_6}$, $^1/_2 = {^3/_6}$; $^4/_6 - {^3/_6} = {^1/_6}$.

Wie viel beträgt der Unterschied von $^1/_2$ und $^1/_3$?

Ausr. $^1/_2 = {^3/_6}$, $^1/_3 = {^2/_6}$; $^1/_2$ ist also um $^1/_6$ größer als $^1/_3$, und $^1/_3$ ist um $^1/_6$ kleiner als $^1/_2$.

$4^1/_2 + 5^2/_3$! $4 + 5 = 9$; $^1/_2 + {^2/_3} = {^3/_6} + {^4/_6} = 1^1/_6$; $9 + 1^1/_6 = 10^1/_6$.

$9^2/_3 - 4^1/_2$! $9^2/_3 - 4^1/_2 = 9^4/_6 - 4^3/_6 = 5^1/_6$.

3) $^1/_2 \times {^1/_3}$! 

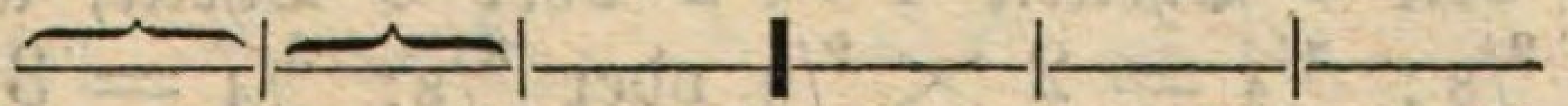
$^1/_2 \times 1$ ist die Hälfte von 1; $^1/_2 \times {^1/_3}$ ist die Hälfte von $^1/_3$. Wie findet man die Hälfte von $^1/_3$? (Man theilt $^1/_3$ in 2 gleiche Theile und nimmt 1 Theil davon; $^1/_3 = {^2/_6}$; die Hälfte von $^2/_6 = {^1/_6}$.) Wie viel ist also $^1/_2 \times {^1/_3}$? $^1/_2 \times {^1/_3} = {^1/_6}$.

$^1/_2 \times {^2/_3}$! 

$^1/_2 \times {^1/_3} = {^1/_6}$; $^1/_2 \times {^2/_3} = 2 \times {^1/_6} = {^2/_6} = {^1/_3}$.

$^1/_3 \times {^1/_2}$! 

$^1/_3 \times 1$ ist der dritte Theil von 1; $^1/_3 \times {^1/_2}$ ist der 3. Theil von $^1/_2$. Wie erhält man den 3. Theil von $^1/_2$? (Man theilt 2c.; $^1/_2 = {^3/_6}$; der 3. Theil von $^3/_6 = {^1/_6}$.) Wie viel ist also $^1/_3 \times {^1/_2}$?

$^2/_3 \times {^1/_2}$! 

$^1/_3 \times {^1/_2} = {^1/_6}$; $^2/_3 \times {^1/_2} = 2 \times {^1/_6} = {^2/_6} = {^1/_3}$.

$^1/_2 \times 5^1/_3$! $^1/_2 \times 5 = 2^1/_2$; $^1/_2 \times {^1/_3} = {^1/_6}$; $2^1/_2 + {^1/_6} = 2^4/_6 = 2^2/_3$.

$7^2/_3 \times {^1/_2}$! $7 \times {^1/_2} = 3^1/_2$; $^2/_3 \times {^1/_2} = {^2/_6}$; $3^1/_2 + {^2/_6} = 3^5/_6$.

4) Wie stehen $^1/_6$ und $^1/_3$ zu einander? ($^1/_3 = {^2/_6}$; $^1/_3$ ist also 2mal so groß als $^1/_6$, und $^1/_6$ ist die Hälfte von $^1/_3$.) $^1/_6$ und $^1/_2$!

Wie viel beträgt die Hälfte von $15^1/_3$? ($15^1/_3 = 14 + 1^1/_3$; die Hälfte von 14 ist 7, von $1^1/_3$ oder $^4/_3 = ^2/_3$; $7^2/_3$.)

5) Wie oft ist $^1/_6$ enthalten in $^1/_2$? $^1/_2$ in $^2/_3$? $^2/_3$ in $1^1/_2$? ($^1/_2 = ^3/_6$; $^1/_6$ ist in $^3/_6$, wie 1 in 3, 3mal; $^1/_2$ in $^2/_3 = ^3/_6$ in $^4/_6 = 3$ in $4 = 1^1/_3$mal; $^2/_3$ in $1^1/_2 = ^4/_6$ in $^9/_6 = 2^1/_4$mal.) $12^1/_2$ Dtz. sind wie vielmal so viel als $1^1/_3$ Dtz.? ($9^3/_8$.)

Die Siebentel werden kurz behandelt. Es genügt, ganze und gemischte Zahlen in Siebentel zu verwandeln und diese wieder zurückzuführen.

Achtel; Halbe, Viertel und Achtel.

§. 257.

1) Wie entstehen 8tel? Wie erhält man $^1/_8$, $^2/_8$, $^3/_8$ ɔc. von 1 Ganzen? Verwandelt $^1/_8$, $^2/_8$, $^3/_8$ ɔc. Ctr. in Pfund, Kilogr. in Gramm! Wird durch wiederholtes Rechnen völlig eingeübt.

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in 8tel und umgekehrt.

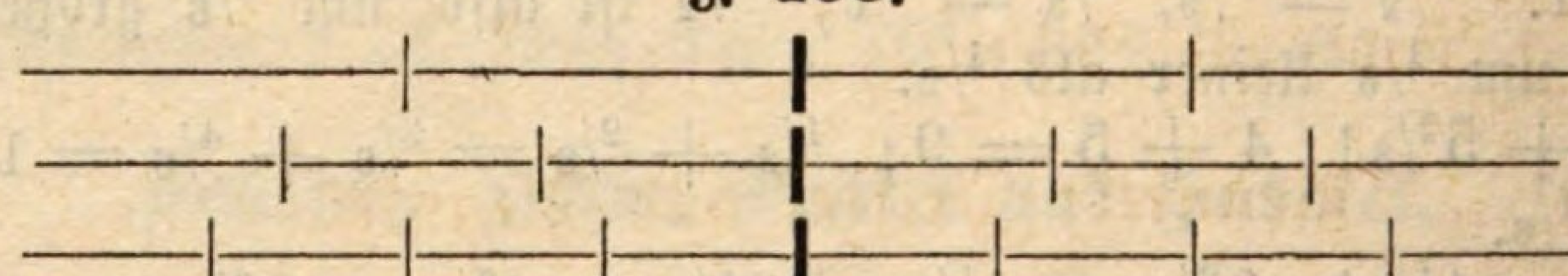
3) Reihenbildung mit $^1/_8$, $^2/_8$, $^3/_8$ ɔc., mündlich und schriftlich:

a. $^1/_8 + ^2/_8 = ^3/_8$
$^3/_8 + ^3/_8 = ^6/_8$
$^6/_8 + ^4/_8 = 1^2/_8$ ɔc.

b. $10 - ^1/_8 = 9^8/_8 - ^1/_8 = 9^7/_8$
$9^7/_8 - ^2/_8 = 9^5/_8$
$9^5/_8 - ^3/_8 = 9^2/_8$ ɔc.

Die übrigen Arten von Aufgaben siehe Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 258.

1) 

a. 3 Ganze. Jedes derselben wurde zuerst in 2 gleiche Theile getheilt. Vom ersten Ganzen wurde dann jedes Halbe wieder in 2, vom andern jedes wieder in 3, vom dritten jedes in 4 gleiche Theile zerlegt. Der Augenschein zeigt, daß $^2/_2 = ^4/_4$, $^1/_2 = ^2/_4$; $^2/_2 = ^6/_6$, $^1/_2 = ^3/_6$; $^2/_2 = ^8/_8$, $^1/_2 = ^4/_8$.

Zieht man (durch kleine Bögen) von den $^4/_4$ je $^2/_4$, von den $^6/_6$ je $^3/_6$, von den $^8/_8$ je $^4/_8$ in einen Theil zusammen, so bilden sich aus den 4teln, 6teln und 8teln wieder Halbe. $^4/_4 = ^2/_2$, $^2/_4 = ^1/_2$; $^6/_6 = ^2/_2$, $^3/_6 = ^1/_2$; $^8/_8 = ^2/_2$, $^4/_8 = ^1/_2$.



b. $1 = ^4/_4$. Theilt man jedes 4tel wieder in 2 gleiche Theile, so werden aus den 4 Theilen 4×2 oder 8 Theile, also 8tel. $^4/_4 = ^8/_8$; $^1/_4 = ^2/_8$; $^2/_4 = 2 \times ^2/_8$ oder $^4/_8$; $^3/_4 = 3 \times ^2/_8$ oder $^6/_8$. Vereinigt man von den $^8/_8$ je $^2/_8$ wieder in 1 Theil, so bilden sich aus denselben so viele größere Theile, als 2 in 8 enthalten ist, nämlich 4; $^8/_8 = ^4/_4$; $^2/_8 = ^1/_4$; $^4/_8 = ^2/_4 = ^1/_2$;

$^6/_8$  $= ^3/_4$.

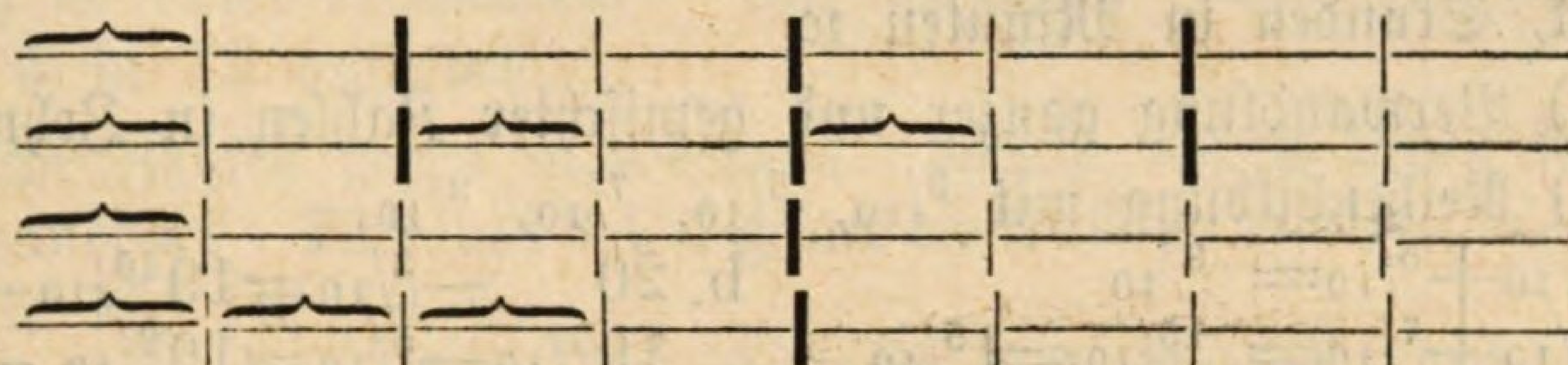
Durch wiederholtes Abfragen wird eingeübt:
$^1/_2 = {^4/_8}$, $^4/_8 = {^1/_2}$; $^1/_4 = {^2/_8}$, $^2/_8 = {^1/_4}$; $^3/_4 = {^6/_8}$; $^6/_8 = {^3/_4}$.

$^3/_8$ Ctr. $= {^2/_8} + {^1/_8} = {^1/_4} + {^1/_8}$ Ctr. $= 25 + 12^1/_2$ Pfd. $= 37^1/_2$ Pfd.
$^5/_8$ Ctr. $= {^4/_8} + {^1/_8} = {^1/_2} + {^1/_8}$ Ctr. $= 50 + 12^1/_2$ Pfd. $= 62^1/_2$ Pfd.
$^7/_8$ Ctr. $= {^6/_8} + {^1/_8} = {^3/_4} + {^1/_8}$ Ctr. $= 75 + 12^1/_2$ Pfd. $= 87^1/_2$ Pfd.
Eben so mit Kilogramm und Gramm.

---

2) $^5/_8 + {^1/_2}$! $^5/_8 + {^1/_2} = {^5/_8} + {^4/_8} = {^9/_8} = 1^1/_8$.
$^3/_4 - {^3/_8}$! $^3/_4 - {^3/_8} = {^6/_8} - {^3/_8} = {^3/_8}$.

3) $^1/_2 \times {^1/_4}$ $= {^1/_8}$
$^1/_2 \times {^3/_4}$ $= {^3/_8}$
$^1/_4 \times {^1/_2}$ $= {^1/_8}$
$^3/_4 \times {^1/_2}$ $= {^3/_8}$



$^1/_2 \times 7^3/_4$! $^1/_2 \times 7 = 3^1/_2$; $^1/_2 \times {^3/_4} = {^3/_8}$; $3^1/_2 + {^3/_8} = 3^7/_8$.
$9^3/_4 \times {^1/_2}$! $9 \times {^1/_2} = 4^1/_2$; $^3/_4 \times {^1/_2} = {^3/_8}$; $4^1/_2 + {^3/_8} = 4^7/_8$.

4) $^1/_4$ ist das doppelte, $^1/_2$ das 4fache von $^1/_8$; $^1/_8$ ist die Hälfte von $^1/_4$, der 4. Theil von $^1/_2$.

Wie viel ist die Hälfte von $11^3/_4$? ($11^3/_4 = 10 + 1^3/_4$; die Hälfte von $10 = 5$; $1^3/_4 = {^7/_4}$; die Hälfte von $^1/_4 = {^1/_8}$, von $^7/_4 = {^7/_8}$; also ist die Hälfte von $11^3/_4 = 5^7/_8$.)

5) Wie oft ist $1^1/_8$ in $15^1/_2$ enthalten? ($1^1/_8 = {^9/_8}$; $15^1/_2 = {^{120}/_8} + {^4/_8} = {^{124}/_8}$; $^9/_8$ in $^{124}/_8 = 9$ in $124 = 13^7/_9$.)

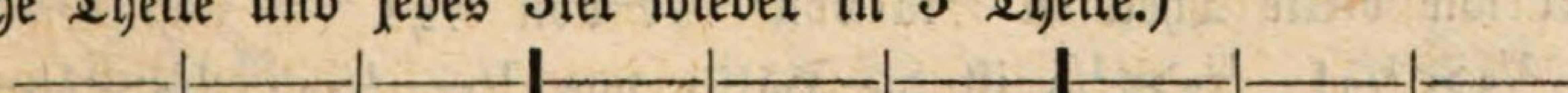
Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

Neuntel; Drittel und Neuntel.

§. 259.

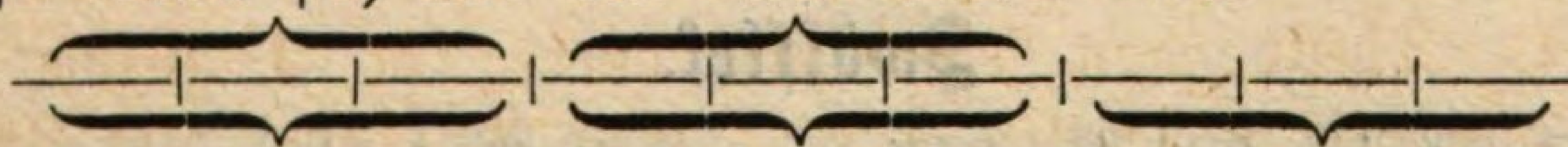
1) Die Neuntel an sich werden, wie die Siebentel, kurz behandelt. Den Stoff hiezu bietet das Aufgabenheft.

Wie theilt man 1 Ganzes in 9 gleiche Theile? (Man theilt es in 3 gleiche Theile und jedes 3tel wieder in 3 Theile.)



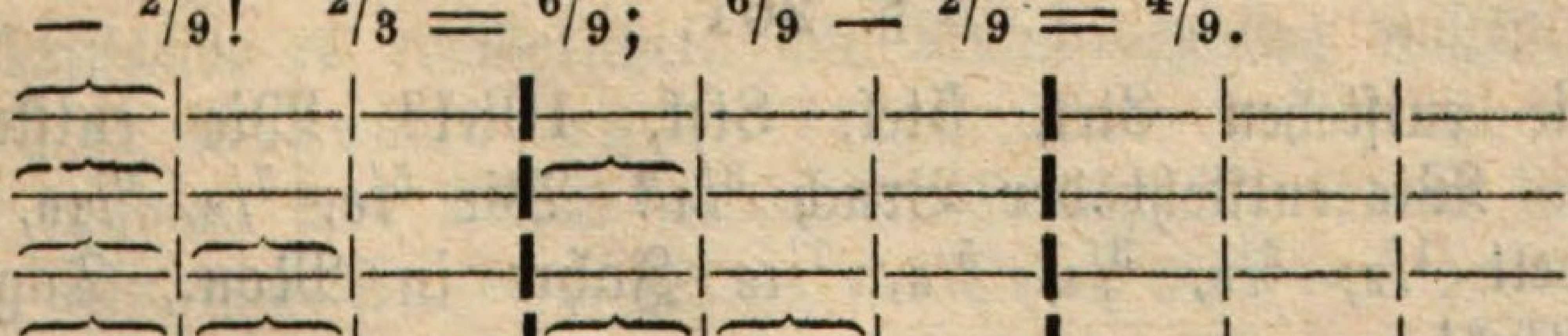
$^3/_3 = {^9/_9}$; $^1/_3 = {^3/_9}$; $^2/_3 = {^6/_9}$.

Zieht man (durch kleine Bögen) von den $^9/_9$ je 3 in einen Theil zusammen, so bilden sich aus den 9teln wieder 3tel.

$^3/_9 = {^1/_3}$  $^6/_9 = {^2/_3}$

2) $^4/_9 + {^1/_3}$! $^1/_3 = {^3/_9}$; $^4/_9 + {^3/_9} = {^7/_9}$.
$^2/_3 - {^2/_9}$! $^2/_3 = {^6/_9}$; $^6/_9 - {^2/_9} = {^4/_9}$.

3) $^1/_3 \times {^1/_3}$ $= {^1/_9}$
$^1/_3 \times {^2/_3}$ $= {^2/_9}$
$^2/_3 \times {^1/_3}$ $= {^2/_9}$
$^2/_3 \times {^2/_3}$ $= {^4/_9}$



$^1/_3 \times 7^2/_3$! $^1/_3 \times 7 = ^7/_3 = 2^1/_3$; $^1/_3 \times ^2/_3 = ^2/_9$; $2^1/_3 + ^2/_9 = 2^5/_9$.
$5^2/_3 \times ^2/_3$! $5 \times ^2/_3 = ^{10}/_3 = 3^1/_3$; $^2/_3 \times ^2/_3 = ^4/_9$; $3^1/_3 + ^4/_9 = 3^7/_9$.
Stoff zur weiteren Uebung siehe Auf. z. Kopf= und Ziffërr.

Zehntel; Halbe, Fünftel und Zehntel.

§. 260.

1) Wie entstehen 10tel? Wie erhält man $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ von einem Ganzen? Verwandelt $^1/_{10}$, $^2/_{10}$ rc. Meter in Centimeter und Millimeter, Mark in Pfg., Hektoliter in Liter, Kilogr. und Pfund in Gramm, Schock in Stück, Stunden in Minuten rc.

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in Zehntel.

3) Reihenbildung mit $^3/_{10}$, $^5/_{10}$, $^7/_{10}$, $^9/_{10}$.

a.	b.
$^3/_{10} + ^5/_{10} = ^8/_{10}$	$20 - ^3/_{10} = 19^{10}/_{10} - ^3/_{10} = 19^7/_{10}$
$^8/_{10} + ^7/_{10} = ^{15}/_{10} = 1^5/_{10}$	$19^7/_{10} - ^5/_{10} = 19^2/_{10}$ —
$1^5/_{10} + ^9/_{10} = 1^{14}/_{10} = 2^4/_{10}$	$19^2/_{10} - ^7/_{10} = 18^{12}/_{10} - ^7/_{10} = 18^5/_{10}$
$2^4/_{10} + ^3/_{10} = 2^7/_{10}$	$18^5/_{10} - ^9/_{10} = 17^{15}/_{10} - ^9/_{10} = 17^6/_{10}$
u. s. w.	u. s. w.

Stoff zu den übrigen Uebungen siehe Aufgabenheft.

---

1) Welche Theile von den Halben an bis zu den 9teln lassen sich in 10tel verwandeln und welche nicht? (Die Versuche zeigen, daß sich nur Halbe und 5tel, also nur diejenigen Theile in 10tel verwandeln lassen, deren Nenner in 10 aufgehen.)

$^2/_2 = ^{10}/_{10}$, $^1/_2 = ^5/_{10}$; $^5/_5 = ^{10}/_{10}$, $^1/_5 = ^2/_{10}$, $^2/_5 = ^4/_{10}$ rc.

Untersucht, wie viele 10tel sich wieder in einen bestimmten Theil vereinigen lassen! (Die Versuche zeigen, daß man von den $^{10}/_{10}$ nur je 2 oder 5 in einen Theil vereinigen kann.) Und warum? Weil nur 2 und 5 in 10 aufgehen.

$^2/_{10} = ^1/_5$, $^4/_{10} = ^2/_5$, $^6/_{10} = ^3/_5$, $^8/_{10} = ^4/_5$; $^5/_{10} = ^1/_2$.

2) Addirt $^1/_2 + ^7/_{10}$! $^1/_2 = ^5/_{10}$; $^5/_{10} + ^7/_{10} = ^{12}/_{10} = 1^2/_{10} = 1^1/_5$.
Wie viel ist $^4/_5 - ^1/_2$? $^4/_5 = ^8/_{10}$, $^1/_2 = ^5/_{10}$; $^8/_{10} - ^5/_{10} = ^3/_{10}$.
Wie groß ist der Unterschied von $^1/_2$ und $^1/_5$?
Der wie vielte Theil ist $^1/_{10}$ von $^1/_5$? von $^1/_2$?

3) $^1/_2 \times ^1/_5$! $^1/_2 \times ^1/_5$ ist die Hälfte von $^1/_5 = ^1/_{10}$; $^1/_2 \times ^1/_5 = ^1/_{10}$.
$^1/_5 \times ^1/_2$! $^1/_5 \times ^1/_2$ ist der 5. Th. von $^1/_2 = ^1/_{10}$; $^1/_5 \times ^1/_2 = ^1/_{10}$.
Hiernach auch die übrigen Fälle.

Zwölftel.

Zugleich Wiederholung und Erweiterung.

§. 261.

1) Wie entstehen 3tel, 5tel, 8tel, 10tel? Wie entstehen 12tel, 16tel? rc. — Wie entsteht der Bruch $^3/_4$? Wie $^5/_6$, $^7/_8$, $^9/_{10}$, $^5/_{12}$, $^{13}/_{15}$? — Verwandelt $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_{12}$ Jahre in Mon., Tage in Std., Schock in Stück!

2) Verwandelt die Zahlen 1 bis 10 in 12tel, 15tel, 16tel, 18tel, 20stel!

3) Richtet die gemischte Zahl $17\frac{1}{2}$ ein! ($17\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$.) Eben so $4\frac{3}{4}$, $8\frac{2}{3}$, $5\frac{7}{8}$, $7\frac{5}{12}$ u. s. w.

4) Führt auf eine ganze oder gemischte Zahl zurück: 18 Halbe, 3tel, 4tel, 5tel ꝛc.; 25 Halbe, 3tel, 4tel, 5tel ꝛc. ꝛc.

---

5) Verwandelt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ in 12tel! (1 G. $= \frac{12}{12}$; $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{2}{3} = 2 \times 4$ oder $\frac{8}{12}$ u. s. w.) — Verwandelt auch $\frac{1}{5}$ in 12tel! (Der Versuch zeigt, daß es nicht geht.) Welche Theile also nur lassen sich in 12tel verwandeln? Und warum? Weil nur die Zahlen 2, 3, 4 und 6 in 12 aufgehen.

6) Welche Zahlen gehen in 14 auf? Welche Theile lassen sich daher in 14tel verwandeln? Wie viel 14tel geben die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$? ꝛc. — Ebenso mit 15, 16, 18 ꝛc.

Da diese Uebung zugleich das Zerlegen der Produktzahlen in ihre Faktoren erneuert, so werde sie möglichst ausgedehnt.

7) Welche Theile bilden sich, wenn man in 1 Theil vereinigt $\frac{2}{4}$? $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$? $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$? $\frac{3}{9}$? $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}$? $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$?

Einen Bruch in kleineren Zahlen ausdrücken, heißt, ihn **kürzen** oder **heben**. $\frac{2}{4}$, gekürzt $= \frac{1}{2}$.

8) Wie viel Theile entstehen aus $\frac{12}{12}$, wenn man je $\frac{4}{12}$ in 1 Theil vereinigt? Antwort: So viele Theile, als $\frac{4}{12}$ in $\frac{12}{12}$ oder 4 in 12 enthalten ist, also 3; $\frac{12}{12} = \frac{3}{3}$.

Wie viel 3tel bilden sich hiernach aus $\frac{8}{12}$? Aus $\frac{8}{12}$ bilden sich so viel 3tel, als $\frac{4}{12}$ in $\frac{8}{12}$ oder 4 in 8 liegt, nämlich 2; $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$\frac{8}{12}$ werden in $\frac{2}{3}$ verwandelt, wenn man den Zähler und den Nenner durch 4 dividirt. — $\frac{9}{12}$, durch 3 gehoben oder gekürzt $= \frac{3}{4}$; $\frac{10}{12}$, durch 2 gekürzt $= \frac{5}{6}$.

Welches ist die größte Hebezahl und der kürzeste Ausdruck für $\frac{6}{9}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{14}{21}$? ꝛc.

9) 1 Mon. $= \frac{1}{12}$ J.	1 Tg. $= \frac{1}{30}$ Mon.	1 Stck. $= \frac{1}{60}$ Schck.
2 Mon. $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ J.	2 Tg. $= \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ M.	2 Stck. $= \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ Sch.
3 Mon. $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ J.	3 Tg. $= \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ M.	3 Stck. $= \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ Sch.
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Weiteren Stoff zu den vorstehenden Uebungen, sowie zu einer nach Art der Operationen geordneten Wiederholung bieten die Aufgaben z. Kopf- und Zifferrechnen.

§. 262.

Die ausführliche individuelle Behandlung der Brüche von den Halben an bis zu den Zwölfteln hat einen doppelten Zweck. Für Schulen, wo Zeit und Umstände es ermöglichen, die Bruchrechnung vollständig durchzunehmen, soll sie **Begründungskursus** sein, in dem nicht die Operation und Regel, sondern das Objekt selbst, die Bruchzahl, Grund der Eintheilung ist, in dem also von Stufe zu Stufe ein Bruch nach dem andern anschaulich und allseitig behandelt wird, ganz so, wie man mit den Zahlen der ersten

Zehner oder des ersten Hunderts zu thun pflegt. Für andere Schulen dagegen, welche sich auf das Nothwendigste zu beschränken haben, soll die erste Abtheilung das ganze Pensum aus der Bruchrechnung bilden. Denn kann diese nicht gründlich und gleichmäßig durchgearbeitet werden, so ist es ohne Frage besser, Zeit und Kraft auf den nächstliegenden und ergiebigsten Theil ihres Gebietes zu verwenden, als das Ganze in Angriff zu nehmen und es dann doch nur flüchtig und lückenhaft zu bearbeiten, zumal auch das Formelbildende nicht in dem Wieviel, sondern in dem Wie liegt. Außer den Decimalbrüchen auch noch die ganze gemeine Bruchrechnung durchzunehmen, ist namentlich da unmöglich, wo ein Lehrer sämmtliche Schülerklassen zu unterrichten hat. In einer solchen Schule wird kaum mehr als das, was die erste Abtheilung enthält, geleistet werden können. Und mehr ist auch für die im gewöhnlichen Leben vorkommenden Rechnungsfälle nicht erforderlich.

Die Maße und Gewichte mit nicht decimalen Währungszahlen.

§. 263.

Wie die rechnerische Behandlung der Münzen, Maße und Gewichte mit decimalen Währungszahlen dem Rechnen mit den Decimalzahlen sich anschließt, so die Behandlung der Maße und Gewichte mit nichtdecimalen Währungszahlen dem Rechnen mit den gemeinen Brüchen, weßhalb letztere hier ihre geeignete Stelle findet.

1. Resolviren.

1) Wiederholte Einübung der Vielfachen von 12.

2) 1 Jahr = 12 Monate, 2 Jahre = 2 × 12 oder 24 Mon., 3 Jahre = 3 × 12 oder 36 Mon. u. s. w. bis 10 J. = 10 × 12 oder 120 Mon.

3) 6 Jahre 7 Mon., wie viel Monate?

Ausr. 6 J. = 6 × 12 oder 72 Mon., 72 Mon. + 7 Mon. = 79 Mon.

Eben so werden, nachdem in jedem einzelnen Falle die Vielfachen der betreffenden Währungszahl eingeübt sind, Monate in Tage, Tage in Stunden, Stunden in Minuten, Mandel und Schock in Stück, Centner in Kilogramm aufgelöst.

4) 73 Schck. = ? Stck.	5) 135 Ctr. = ? kg
60	50
4380 Schck.	6750 kg

1 Sch. = 60 St. (60 unter gesetzt); 73 Sch. = 73 × 60 od. 60 × 73 St.

6) 8 Std. 36 Min. 45 Sek. = ?

60	1 Std. = 60 Min. (60 untergesetzt); 8 Std. = 8
516 Min.	× 60 oder 60 × 8 Min., + 36 Min. = 516 Min.
60	1 Min. = 60 Sek.; 516 Min. = 516 × 60
31005 Sek.	oder 60 × 516 Sek., + 45 Sek. = 31005 Sek.

2. Reduciren.

1) Wie heißen die Vielfachen von 12? (24, 36 2c.) Aus wie vielmal 12 besteht 36, 72 2c.? Wie viel Dutzend sind 24, 48, 72 2c. Stück?

2) 105 Stück, wie viel Dutzend?
Ausr. 105 Stück = 96 + 9 Stück = 8 Dutzend 9 Stück.

3) 795 Stück = ? Dtz. 4) 4785 Tage, wie viel Jahre?

Ausrechnung.

12 Stck. = 1 Dtz. So oft 12 Stck. in 795 Stck. enthalten sind, so viele Dutzend machen diese.

12	795	66 Dtz.
	72	
	75	
	72	
	3 Stck.	

365 Tg. = 1 J. So oft 365 Tg. in 4785 Tg. enthalten sind, so viele Jahre betragen diese.

365	4785	13 Jahre
	365	
	1145	
	1097	
	40 Tage.	

Ist eine niedere Sorte auf eine entfernt höhere zurückzuführen, z. B. Sekunden auf Stunden; so verwandelt man sie zuerst in die nächsthöhere Sorte und diese in die entfernt höhere, die Sekunden also in Minuten und die Minuten in Stunden.

3. Addiren und Subtrahiren.

1) 37 Schck. 30 Stck.
128 „ 40 „
96 „ 48 „
262 Schck. 58 Stck.

60 | 118 | 1 Schck.
| 60 |
58 Stck.

	30
37 $^1/_2$ Schck.	15
128 $^2/_3$ „	20
96 $^4/_5$ „	24
262$^{29}/_{30}$ Sch.	$^{59}/_{30}$ = 1$^{29}/_{30}$

Die kleinste Zahl, in welcher die Nenner 2 und 3 aufgehen, ist 6, und die kleinste Zahl, in der 6 und 5 zugleich aufgehen, ist 6 × 5 oder 30; $^1/_2$, $^2/_3$ und $^4/_5$ werden also in 30stel verwandelt.

2) 127. Schbr. 32 Bd. (92)
-- 84 „ 54 „
42 Schbr. 38 Bd.

3) 8.0. Schbr. — Bd. (60)
— 37 „ 45 „
42 Schbr. 15 Bd.

Oder: 8.0. Schbr.
— 37 $^3/_4$ „
42 $^1/_4$ Schbr.

4. Multipliciren.

Aufg. 8 Schbr. 48 Bd. × 21 = ?

Ausrechnung.

a. 48×21
96
60 | 1008 | 16 Schbr.
60
408
360
48 Bd.

b. 8×21
168 Schbr.
+ 16 „ 48 Bd.
185 Sch. 48 Bd.

Oder: 48 Bd. = $^4/_5$ Schbr.
21×8$^4/_5$ Schbr. =
21×8 = 168
+21×$^4/_5$ = 16$^4/_5$
184$^4/_5$ Schbr.

5. Dividiren.

1) Wie oft sind 2 Std. 45 Min. in 24 Std. enthalt

2 Std. 45 Min.	24 St.	$2^3/_4$ | 24 × 4
60	60	11 | 96 | $8\,^8/_{11}$
165 Min.	1440 Min.	88
165	1440 = $8\,^8/_{11}$ mal.	8
	1320	
	$\frac{120}{165} = \frac{24}{33} = {}^8/_{11}$	

2) Wie viel beträgt $^1/_{25}$ von 837 Schock 48 Stck.?

25	837 Schck.	48 Stck.	33 Schck. $30^{18}/_{25}$ Stck.
	75	720	
	87	768	
	75	75	
	12 × 60	18	
	720 Stck.		

Aufg. z. Kopf- u. Ifferr.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Brüchen überhaupt.

I. Begriff, Bezeichnung, Arten und Formveränderung der Brüche.

§. 264. Begriff der Brüche.

Wie erhält man $^1/_3$, und wie $^2/_3$? Man erhält $^1/_3$, wenn man das Ganze in 3 gleiche Theile zerlegt und einen davon nimmt, $^2/_3$, wenn man von den 3 gleichen Theilen des Ganzen 2 nimmt. Wie erhält man $^1/_4$, und wie $^3/_4$? $^1/_5$, $^4/_5$? $^1/_8$, $^5/_8$?

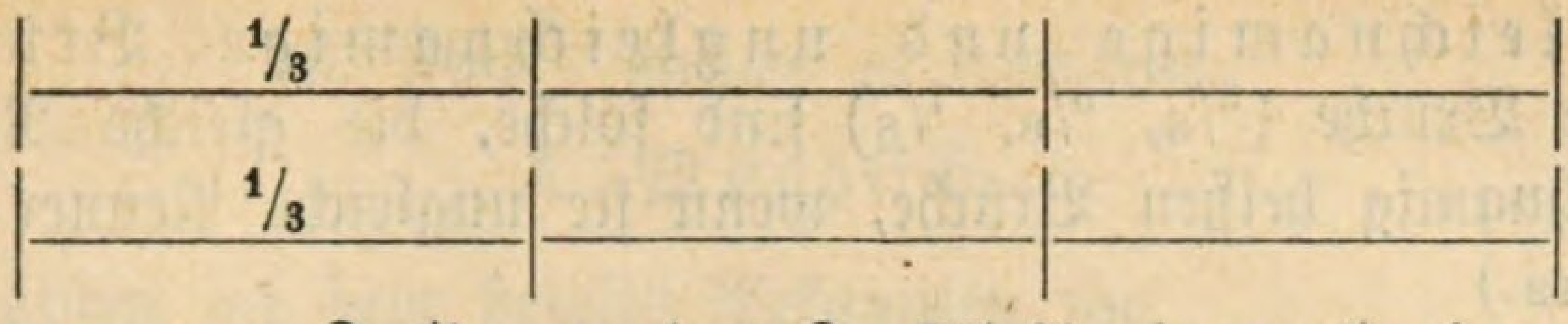
Was versteht man demnach unter $^1/_3$ und was unter $^2/_3$? ($^1/_3$ ist einer und $^2/_3$ sind zwei von den 3 gleichen Theilen eines Ganzen.) Was versteht man unter $^1/_4$, $^3/_4$, $^1/_6$, $^5/_6$?

Die ganzen Zahlen entstehen, indem man die Eins wiederholt zu sich nimmt; die Theil- oder Bruchzahlen, indem man von der Eins, d. i. von einem Ganzen einen oder mehrere gleiche Theile wegbricht oder wegnimmt. Unter einem Bruche versteht man daher einen oder mehrere gleiche Theile von einem Ganzen. Das ist die unsern Schülern schon bekannte gewöhnliche Auffassung.

Brüche, welche mehr als einen Theil enthalten, können auch auf eine zweite Weise entstehen. Wie viel ist der 3. Theil von 2? ($^2/_3$.) Der Bruch $^2/_3$ kann demnach auch entstehen, wenn man den 3. Theil von 2 Ganzen nimmt. $^2/_3$ erhält man also:

$^1/_3$	$^1/_3$	

a. indem man von 1 Ganzen den 3 Theil zweimal nimmt;



b. indem man von 2 Ganzen den 3. Theil einmal nimmt.

Auf welche doppelte Weise können hiernach die Brüche $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$ ꝛc. entstehen? Und wie läßt sich demgemäß der Bruch $^2/_3$ Jahr auffassen und auflösen? (Ich betrachte $^2/_3$ Jahr als $^2/_3$ von 1 Jahre, und da rechne ich: $^1/_3$ von 1 J. $=$ 4 Mon., $^2/_3 = 2 \times 4$ oder 8 Mon.; oder ich betrachte $^2/_3$ J. als den 3. Theil von 2 J., und nun rechne ich: 2 J. $=$ 24 Mon.; der 3. Theil von 24 Mon. $=$ 8 Mon.)

Eben so $^3/_4$ Jahre, $^4/_5$ Mon., $^5/_6$ Schock, $^3/_{10}$, $^7/_{10}$ Kilogramm.

§. 265. Bezeichnung der Brüche.

$^1/_2$ ist größer als $^1/_3$, und $^1/_3$ ist größer als $^1/_4$; eben so sind $^4/_5$ mehr als $^3/_5$, und $^3/_5$ sind mehr als $^2/_5$. Der Werth eines Bruches hängt von der Größe und von der Anzahl seiner Theile, also von Zweierlei ab. Daher sind auch zur Bezeichnung eines Bruches zwei Zahlen erforderlich, eine, um die Größe, und eine, um die Anzahl seiner Theile zu bestimmen.

3 Zähler
—
4 Nenner

Die Zahl, welche die Größe der Theile bestimmt, ist der Nenner; der sagt, wie die Theile heißen und eben damit auch, in wie viel gleiche Theile das Ganze zerlegt ist und wie groß sie sind. Heißen die Theile 4tel, so folgt hieraus, daß das Ganze in 4 gleiche getheilt und jeder Theil der 4. Theil desselben ist. —

Die Zahl, welche die Anzahl der Theile bestimmt, die der Bruch enthält, ist der Zähler. Der Bruch $^3/_4$ enthält 3 von den 4 gleichen Theilen des Ganzen.

Der doppelten Entstehungsweise der (mehrtheiligen) Brüche entspricht die doppelte Leseweise. Gelesen wird der Bruch $^3/_4$ entweder: 3 Viertel, oder: 3 getheilt durch 4.

Wie lassen sich demnach folgende (an die Wandtafel geschriebene) Brüche aussprechen: $^{17}/_{31}$, $^{72}/_{97}$, $^{113}/_{116}$, $^{371}/_{1000}$?

§. 266. Arten der Brüche.

Man unterscheidet ganze, gebrochene und gemischte Zahlen. Die gebrochenen Zahlen oder Brüche zerfallen wieder

a. in Stamm- und Zweigbrüche. Stammbrüche nennt man die eintheiligen Brüche, z. B. $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ u. s. w.; Zweig- oder abgeleitete Brüche heißen die mehrtheiligen Brüche, z. B. $^2/_3$, $^5/_6$, $^7/_8$, $^{13}/_{16}$ ꝛc.

b. In echte und unechte Brüche. Enthält ein Bruch weniger Theile, als das Ganze hat, so heißt er echter Bruch. Enthält ein Bruch alle Theile des Ganzen oder mehr als ein Ganzes, so heißt er unechter Bruch. Beispiele!

c. In gleichnamige und ungleichnamige Brüche. Gleichnamige Brüche ($^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$) sind solche, die gleiche Nenner haben; ungleichnamig heißen Brüche, wenn sie ungleiche Nenner haben. ($^5/_6$, $^5/_8$, $^7/_{12}$.)

d. In einfache Brüche und Doppelbrüche. Ein einfacher Bruch ist ein solcher, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind ($^3/_4$, $^{15}/_{17}$); Doppelbrüche sind solche Brüche, bei welchen Zähler oder Nenner, oder beide selber wieder Brüche sind. Z. B.

$\frac{^3/_4}{2}$, $\frac{2^3/_4}{5}$, $\frac{^5/_6}{^2/_3}$, $\frac{3^4/_5}{1^2/_3}$. Gelesen: $^3/_4$ dividirt durch 2 u. s. w.

§. 267. Ganze und gemischte Zahlen in unechte Brüche zu verwandeln und umgekehrt.

Mündlich.

a. 16 Ganze, wie viel 8tel? 1 G. = $^8/_8$, 16 G. = 16 × $^8/_8$; 16 × 8 oder 8 × 16 = 128; 16 G. = $^{128}/_8$.
12 Ganze, wie viel 9tel, 12tel, 15tel, 16tel, 18tel? rc.

$12^7/_8$, wie viel 8tel?
12 G. = 12 × 8 oder $^{96}/_8$, + $^7/_8$ = $^{103}/_8$; $12^7/_8$ = $^{103}/_8$.
Eben so $8^5/_{16}$, $11^5/_9$, $13^6/_7$, $16^9/_{11}$, $8^5/_{12}$ u. s. w.

b. $^{75}/_4$, wie viel Ganze?
$^4/_4$ = 1 G.; so oft also $^4/_4$ in $^{75}/_4$ enthalten sind, so viel Ganze habe ich; $^4/_4$ sind in $^{75}/_4$ 18mal enthalten, und $^3/_4$ bleiben übrig; $^{75}/_4$ = $18^3/_4$. Wie viel Ganze sind $^{75}/_2$, $^{75}/_3$, $^{75}/_5$, $^{75}/_6$ u. s. w.

Schriftlich.

a. $563^5/_6$ = $^{3383}/_6$
6×3=18+5=23; 6×6=36 +2=38; 6×5=30+3=33.

b. $^{2483}/_9$ = $275^8/_9$
9 in 24=2, Rest 6; 9 in 68=7, Rest 5; 9 in 53=5, Rest 8.

Decimalbrüche.

a. 4 Ganze, wie viel 10tel, 100tel, 1000tel?
4 = 4,0 = 4,00 = 4,000, d. i. 4 E = 40 z = 400 h = 4000 t.
Man setzt das Komma und hinter dasselbe die entsprechende Anzahl von Nullen.

b. 5,3 = 50 z + 3 z = 53 z; 7,2 = 72 z; 19,6 = 196 z.
7,48 = 700 h + 48 h = 748 h; 92,36 = 9236 h.
3,175 = 3000 t + 175 t = 3175 t; 52,948 = 52948 t.
Man läßt das Komma außer Acht und liest die Zahl mit der Benennung des gegebenen niedrigsten Stellenwerthes.

c. 7548 z = 754,8; 9625 h = 96,25; 81264 t = 81,264.

§. 268. Brüche zu erweitern.

A. Mündlich.

Wir knüpfen bei dem bereits Bekannten an.

a) Welche Theile lassen sich in 6tel verwandeln? (Halbe und 3tel.) Welche in 8tel? in 9tel? in 10tel? — Wie entstehen aus den Halben 4tel? 6tel? 8tel? 10tel? (Viertel entstehen, wenn man ein Halbes wieder in zwei gleiche Theile theilt, Sechstel, wenn man $^1/_2$ wieder in 3 gleiche Theile theilt u. s. f.) — Theilt nun 1 Halbes auch in 6 und in noch mehr gleiche Theile und seht zu, was für Theile entstehen. (Theile ich $^1/_2$ in 6 gleiche Theile, so gibt das Ganze 2 × 6 oder 12 gleiche Theile, also 12tel; theile ich rc.) Demnach ist (an die Wandtafel geschrieben)

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20} \text{ rc.}$$

Die Nenner 4, 6, 8 rc. sind Vielfache oder Produktzahlen aus 2; Halbe lassen sich also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 2 sind. — In welche Theile lassen Halbe sich nicht verwandeln?

Wie entstehen aus den Dritteln 6tel und 9tel? (6tel, wenn man $^1/_3$ in 2 gleiche Theile theilt, und 9tel, wenn man $^1/_3$ in drei gleiche Theile theilt.) — Theilt nun $^1/_3$ auch in 4 und mehr gleiche Theile und seht zu, was für Theile entstehen! (Theile ich $^1/_3$ in 4 gleiche Theile, so gibt das Ganze 3 × 4 oder 12 gleiche Theile, also 12tel; theile ich $^1/_3$ in 5 gleiche Theile; so gibt rc.) Demnach ist

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{6}{18}=\frac{7}{21}=\frac{8}{24}=\frac{9}{27}=\frac{10}{30} \text{ rc.}$$

Die Nenner 6, 9, 12 rc. sind Vielfache oder Produktzahlen aus 3; Drittel lassen sich also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 3 sind. — In welche Theile können 3tel nicht verwandelt werden?

Sucht nun auch, in was für Theile sich 4tel, 5tel, 6tel rc. verwandeln lassen. (4tel lassen sich in 8tel, 12tel, 16tel, 20stel rc., also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 4 sind; 5tel lassen sich in 10tel, 15tel, 20stel rc., also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 5 sind u. s. f.)

b) Von welchen Zahlen ist 24 die Produktzahl? (Von 2, 3, 4, 6, 8, 12.) Welche Theile lassen sich daher in 24stel verwandeln? (Halbe, Drittel rc.) — Von welchen Zahlen ist 36 die Produktzahl? Welche Theile lassen sich daher in 36stel verwandeln? u. s. w.

c) Wie viel 24stel gibt $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$? Das Ganze hat $^{24}/_{24}$; das Halbe hat die Hälfte von $^{24}/_{24} = {}^{12}/_{24}$; $^1/_3$ hat den 3. Theil von $^{24}/_{24} = {}^8/_{24}$ rc.

Wie viel 28stel gibt $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_7$, $^1/_{14}$? — Wie viel 30stel gibt $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_{10}$, $^1/_{15}$? u. s. w.

d. $^4/_5$, wie viel 75stel?

1 G. = $^{75}/_{75}$; $^1/_5 = {}^{15}/_{75}$; $^4/_5 = 4 \times 15$ oder $^{60}/_{75}$.

Verwandelt ebenso $^2/_3$ in 51stel, $^3/_4$ in 72stel, $^4/_5$ in 85stel! Wie viel 60stel geben $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$, $^7/_{10}$, $^{11}/_{12}$, $^8/_{15}$?

Schriftlich.

$^3/_4$, wie viel 96stel?

4	96	24
	8	3
	16	72
	16	

$1 = {}^{96}/_{96}$
$^1/_4 =$ ist der 4. Theil von $^{96}/_{96} = {}^{24}/_{96}$
$^3/_4 = 3 \times {}^{24}/_{96} = {}^{72}/_{96}$.

Der Bruch $^3/_4$ ist dem Werthe nach $= {}^{72}/_{96}$, nur ist er jetzt in größeren Zahlen ausgedrückt. Jedes 4tel ist in 25 gleiche Theile getheilt. Zähler und Nenner von $^{72}/_{96}$ sind daher auch 24mal so groß als Zähler und Nenner von $^3/_4$. Und eben deßhalb wird das Verwandeln eines Bruches in kleinere Theile „das Erweitern“ desselben genannt.

Wie werden Decimalbrüche erweitert?

0,7 = 0,70 = 0,700 = 0,7000. Man denkt oder spricht: 1 z = 10 h, 7 z = 7 × 10 oder 70 h; 1 h = 10 t, 70 h = 70 × 10 oder 700 t u. s. w.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

§. 269. Brüche zu kürzen oder zu heben.

A. Mündlich.

Wir gehen wieder von dem bereits Bekannten aus.

a. $^4/_4 = 1$ Ganzes; $^2/_4$ in einen Theil vereinigt $= {}^1/_2$.

$^6/_6 = 1$ G.; $^3/_6$ vereinigt $= {}^1/_2$; $^2/_6 = {}^1/_3$; $^4/_6$ sind so vielmal $^1/_3$, als $^2/_6$ in $^4/_6$ enthalten sind; $^2/_6$ in $^4/_6 =$ 2mal; $^4/_6 = {}^2/_3$.

$^8/_8 = 1$ G.; $^4/_8 = {}^1/_2$; $^2/_8 = {}^1/_4$; $^6/_8$ sind so vielmal $^1/_4$, als $^2/_8$ in $^6/_8$ enthalten sind; $^2/_8$ in $^6/_8 =$ 3mal; $^6/_8 = {}^3/_4$.

$^9/_9 = 1$ G.; $^3/_9 = {}^1/_3$; $^6/_9 = 2 \times {}^3/_9 = 2 \times {}^1/_3 = {}^2/_3$.

$^{10}/_{10} = 1$ G.; $^5/_{10} = {}^1/_2$; $^2/_{10} = {}^1/_5$, $^4/_{10} = {}^2/_5$ u. s. w.

Bei den 12teln dürfte es um der Schwachbegabten willen gut sein, auf die Veranschaulichung zurück zu greifen.

Eine Linie wird in 12 gleiche Theile getheilt. Von denselben werden zuerst je 2, dann je 3, dann je 4 rc. in einen Theil zusammengefaßt.

$^2/_{12} = {}^1/_6$; $^3/_{12} = {}^1/_4$; $^4/_{12} = {}^1/_3$; $^5/_{12}$ geben keinen bestimmten Theil, und warum? Weil 5 in 12 nicht aufgeht. $^6/_{12} = {}^1/_2$ rc.

$^2/_{12}$, $^3/_{12}$, $^4/_{12}$ und $^6/_{12}$ lassen sich in einen einfachen Theil des Ganzen vereinigen, weil die Zähler dieser Brüche (2, 3, 4, 6) in dem Nenner 12 aufgehen; $^8/_{12}$, $^9/_{12}$ und $^{10}/_{12}$ lassen sich auf größere Theile zurück führen, weil die Zähler dieser Brüche (8, 9, 10) mit dem Nenner 12 gemeinschaftliche Maße oder Faktoren haben.

b. Welcher Theil vom Ganzen bildet sich, wenn man $^3/_{18}$ in einen Theil vereinigt? Eben so $^6/_{18}$, $^9/_{18}$, $^7/_{28}$, $^8/_{32}$ rc.

Wie viele Theile lassen sich immer zusammenfassen (oder welche Zahlen gehen in Zähler und Nenner zugleich auf) bei $^{10}/_{15}$, $^{12}/_{16}$, $^{21}/_{24}$, $^{27}/_{36}$, $^{32}/_{48}$? rc.

Ein gegebener Bruch läßt sich in kleineren Zahlen ausdrücken, d. i. er läßt sich kürzen oder heben, wenn es eine Zahl gibt, welche in dem

Zähler und dem Nenner desselben aufgeht, und wir kürzen ihn, indem wir seinen Zähler und Nenner durch die Zahl, welche in beiden aufgeht, dividiren.

Welches ist der kürzeste Ausdruck für $^{20}/_{24}$, $^{33}/_{44}$, $^{45}/_{50}$, $^{50}/_{60}$, $^{24}/_{48}$, $^{32}/_{48}$, $^{30}/_{48}$, $^{40}/_{48}$? u. s. w. Auf die mehrmalige Kürzung ($^{56}/_{70} = {^{28}/_{35}} = {^{4}/_{5}}$) kommen die Schüler wohl von selbst.

B. Schriftlich.

Es sei der Bruch $^{75}/_{100}$ zu kürzen.

Der Bruch $^{75}/_{100}$ enthält 75 von 100 gleichen Theilen. In 75 und 100 gehen die Zahlen 5 und 25 auf. Fasse ich je 25 Theile in 1 Theil zusammen, so bilden sich aus den 75 Theilen so viele größere Theile, als 25 in 75, und aus den 100 Theilen so viele, als 25 in 100 enthalten ist.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\quad}_{25}} \\ 75 & 3 \\ \hline 100 & 4 \end{array} \qquad \text{Oder:} \qquad \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\quad}_{5}\ \underbrace{\quad}_{5}} \\ 75 & 15 & 3 \\ \hline 100 & 20 & 4 \end{array}$$

Tritt der Fall ein, daß die Hebezahl (der gemeinschaftliche Theiler, oder das gemeinschaftliche Maß), d. i. die Zahl, die in dem Zähler und dem Nenner eines Bruches aufgeht, nicht sogleich gefunden wird, so werden mit den Schülern die Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen nach §. 183 durchgenommen. Und erlaubt es die Zeit, so werden sie auch in das Verfahren eingeführt, das größte gemeinschaftliche Maß nach §. 184 zu finden.

Wie werden Decimalbrüche gekürzt?

a. 0,8000 = 0,800 = 0,80 = 0,8. Fortlassen der Nullen.

b. 0,40827 = 0,4083 = 0,408 = 0,41 (§. 239).

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

§. 270. **Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.**

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, heißt: ihn in 10teln, in 100teln, in 1000teln u. s. w. ausdrücken. In 10tel lassen sich solche gemeine Brüche verwandeln, deren Nenner in 10 aufgeht, also Halbe und Fünftel; in 100tel solche, deren Nenner in 100 aufgeht, also Halbe, 4tel, 5tel, 10tel, 20stel, 25stel, 50stel; in 1000tel solche, deren Nenner in 1000 aufgeht, also Halbe, 4tel, 5tel, 8tel u. s. w.

Folgende gemeine Brüche werden nun frei im Kopfe in Decimalbrüchen ausgedrückt: $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$; $^{1}/_{5}$, $^{2}/_{5}$, $^{3}/_{5}$, $^{4}/_{5}$; $^{1}/_{8}$, $^{3}/_{8}$, $^{5}/_{8}$, $^{7}/_{8}$; $^{1}/_{10}$, $^{3}/_{10}$, $^{7}/_{10}$, $^{9}/_{10}$; $^{1}/_{20}$, $^{7}/_{20}$, $^{13}/_{20}$, $^{19}/_{20}$; $^{1}/_{25}$ u. s. w.

1 Ganzes = $^{10}/_{10}$ = $^{100}/_{100}$ = $^{1000}/_{1000}$; also ist $^{1}/_{2}$ = 0,5 = 0,50 = 0,500; $^{1}/_{4}$ = 0,25 = 0,250; $^{3}/_{4}$ = 0,75 = 0,750; $^{1}/_{5}$ = 0,2 = 0,20 = 0,200; $^{2}/_{5}$ 2c.

Verwandle a. $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{10}$, $^{1}/_{20}$, $^{1}/_{25}$, $^{1}/_{50}$, $^{1}/_{100}$ ℳ in Pfennig! Ebenso: Meter in Centimeter, Hektoliter in Liter, Ar in Quadratmeter, Hektar in Ar, Centner in Pfund.

b. $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{10}$, $^{1}/_{20}$, $^{1}/_{25}$, $^{1}/_{50}$, $^{1}/_{100}$, $^{1}/_{1000}$ kg in Gramm!

c. $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$, $^{7}/_{10}$, $^{13}/_{20}$, $^{17}/_{25}$, $^{39}/_{50}$, $^{61}/_{100}$ ℳ in Pfennig!

Ausr. 1 ℳ = 100 ₰; $\frac{1}{4}$ ℳ = 25 ₰; $\frac{3}{4}$ ℳ = 3 × 25 oder 75 ₰.
Oder: $\frac{3}{4}$ ℳ = der 4. Th. von 3 ℳ oder 300 ₰ = 70 + 5 oder 75 ₰.
d. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{47}{50}$, $\frac{89}{100}$, $\frac{423}{1000}$ kg in Gramm.

Es kommt jedoch auch vor, daß man gemeine Brüche in Decimalbrüchen auszudrücken hat, deren Nenner in 10, oder 100, oder 1000 nicht aufgehen, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ ꝛc. Wie wird nun in diesem Falle verfahren? Wie z. B. bei $\frac{1}{3}$, um diesen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln? ($1 = \frac{10}{10}$; $\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$, Rest $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$; $\frac{1}{3}$ von $\frac{10}{100} = \frac{3}{100}$, Rest $\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$; $\frac{1}{3}$ von $\frac{10}{1000} = \frac{3}{1000}$, Rest $\frac{1}{1000}$. Also ist $\frac{1}{3}$ nahezu $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = 0{,}333$.

$\frac{2}{3}$ ist der 3. Th. von 2. Der 3. Theil von 2 Ganzen ist **kein** Ganzes; 2 G. = $\frac{20}{10}$; $\frac{1}{3}$ von $\frac{20}{10} = \frac{6}{10}$, Rest $\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$; $\frac{1}{3}$ von $\frac{20}{100} = \frac{6}{100}$, Rest $\frac{2}{100} = \frac{20}{1000}$ u. s. f.

Verwandle nun $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$ ꝛc. ℳ in Pfennig!
a. 1 ℳ = 100 ₰; $\frac{1}{3}$ ℳ = $33\frac{1}{3}$ ₰; $\frac{2}{3}$ ℳ = 2 × $33\frac{1}{3}$ ₰ = $66\frac{2}{3}$ ₰.
b. $\frac{2}{3}$ ℳ = der 3. Th. v. 2 ℳ oder 200 ₰ = 60 + $6\frac{2}{3}$ = $66\frac{2}{3}$ ₰.
Ebenso Meter in Centimtr., Meter in Millimtr., Kilogr. in Gramm ꝛc.

Um einen gemeinen Bruch, z. B. $\frac{7}{8}$ **schriftlich** in einen Decimalbruch zu verwandeln, so verfährt man wie folgt:

1) $\frac{7}{8}$ = 7, getheilt durch 8. Ich suche also den 8. Theil von 7.

```
8 | 7,0 | 0,8 7 5
  | 6 4 |
    6 0
    5 6
      4 0
```

Der 8. Theil von 7 E = 0 E; Komma, Komma! 7 E = 70 **Zehntel**; der 8. Theil von 70 z = 8 z, Rest 6 z; 6 z = 60 **Hundertel**; der 8. Theil von 60 h = 7 h, Rest 4 h; 4 h = 40 **Tausendtel**; der 8. Theil von 40 t = 5 t. $\frac{7}{8}$ oder der 8. Theil von 7 = 0,875.

2) $\frac{5}{9}$ = ?

```
9 | 5,0 | 0,5 5 5 . . .
  | 4 5 |
    5 0
    4 5
      5 0
      4 5
        5
```

$\frac{5}{9}$ = 5, getheilt durch 9. Der 9. Th. von 5 E = 0 E; Komma, Komma! 5 E = 50 z; der 9. Th. von 50 z = 5 z, Rest 5 z; 5 z = 50 h; der 9. Th. von 50 h = 5 h u. s. f. Bei fortgesetzter Theilung würde sich immer 5 als Rest, im Quotienten also auch immer die Ziffer 5 ergeben. Der Bruch $\frac{5}{9}$ läßt sich daher **nicht vollständig** als Decimalbruch ausdrücken. Daher setzt man $\frac{5}{9}$ = 0,555 . . .

3) $\frac{7}{12}$ kg, wie viel Gramm? $\frac{7}{12}$ kg = 7 kg, getheilt durch 12.

```
1 2 | 7,0 | 0,5 8 3 3 . . . kg = 583 g
      1 0 0
        4 0
          4
```

Verwandelt man $\frac{7}{8}$ in einen Decimalbruch, so geht die Division zuletzt auf; $\frac{7}{8}$ ist genau 0,875. Bei $\frac{5}{9}$ geht die Division nicht auf; $\frac{5}{9}$ ist also nicht genau 0,555. Der gemeine Bruch wird aber um so genauer durch einen Decimalbruch ausgedrückt, je länger man die Division fortsetzt. Für gewöhnlich genügen drei Decimalstellen.

Wenn die Division aufgeht, so nennt man den Decimalbruch, welcher sich ergibt, einen endlichen; geht die Division nicht auf, so heißt der Decimalbruch ein unendlicher. Den unendlichen Decimalbrüchen werden als Kennzeichen einige Punkte beigefügt.

Endliche Decimalbrüche erhält man von solchen gemeinen Brüchen, deren Nenner Primfaktoren oder Produkte aus Primfaktoren von 10, oder von 100, oder von 1000 ꝛc. sind. Da nun 10 = 2.5, 100 = 2.2.5.5, 1000 = 2.2.2.5.5.5 ꝛc., so folgt, daß nur solche gemeine Brüche endliche Decimalbrüche geben, deren Nenner keine anderen Primfaktoren als 2 oder 5, oder als 2 und 5 haben. Die Anzahl der erhaltenen Decimalstellen ist gleich der höchsten Anzahl der Faktoren 2 oder 5.

$4 = 2.2,\ {}^3/_4 = 0{,}75;\ 8 = 2.2.2,\ {}^3/_8 = 0{,}375$ u. s. w.

$25 = 5.5,\ {}^{17}/_{25} = 0{,}68;\ 125 = 5.5.5,\ {}^{17}/_{125} = 0{,}136$ u. s. w.

$80 = 2.2.2.2.5;\ {}^{49}/_{80} = 0{,}6125.$

Unendliche Decimalbrüche dagegen erhält man von solchen gemeinen Brüchen, welche die Zahl 3 oder Produktzahlen von 3, also 6, 9, 12, 15 ꝛc., oder eine der Primzahlen 7, 11, 13, 17, 19, 23 ꝛc. zum Nenner haben.

§. 271. Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

a. Endliche Decimalbrüche.

1) $0{,}5 = {}^1/_2;\ 0{,}6 = {}^3/_5;\ 0{,}25 = {}^1/_4;\ 3{,}75 = 3^3/_4;\ 0{,}85 = {}^{17}/_{20}.$

Es ist dieß also nichts Anderes als ein Kürzen. Um einen endlichen Decimalbruch schriftlich in einen gemeinen zu verwandeln, so gibt man demselben den ihm zukommenden Nenner und bringt ihn dann durch Kürzung auf den kleinsten Ausdruck. Z. B.

$0{,}25 = {}^{25}/_{100} = {}^3/_4;\ 0{,}875 = {}^{875}/_{1000} = {}^7/_8.$

2) 75 ₰. geben welchen Markbruch?

Ausr. 75 ₰. = 0,75 ℳ. = $^{75}/_{100} = {}^3/_4$ ℳ.

In dieser Weise werden innerhalb des Zahlenkreises von 1 bis 100 Pfennige auf Mark, Centimeter auf Meter, Quadratmeter auf Ar, Ar auf Hektar, Liter auf Hektoliter, und von 1 bis 1000 Millimeter auf Meter, Gramm auf Kilogramm theils mündlich, theils schriftlich zurückgeführt.

b. Unendliche Decimalbrüche.

Um das Verfahren, unendliche Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln, kennen zu lernen, sehen wir zu, wie jene aus diesen entstehen. Wir lassen zu diesem Zwecke die gemeinen Brüche $^1/_9$, $^2/_9$, $^3/_9$ ꝛc.; $^1/_{99}$, $^2/_{99}$ ꝛc., $^1/_{999}$, $^{27}/_{999}$ ꝛc. in Decimalbrüchen ausdrücken. Dabei ergibt sich, daß

$^1/_9 = 0{,}(1)11\ldots$	$^1/_{99} = 0{,}(01)01\ldots$	$^1/_{999} = 0{,}(001)001\ldots$
$^2/_9 = 0{,}(2)22\ldots$	$^2/_{99} = 0{,}(02)02\ldots$	$^{27}/_{999} = 0{,}(027)027\ldots$
$^3/_9 = 0{,}(3)33\ldots$	$^{27}/_{99} = 0{,}(27)27\ldots$	$^{756}/_{999} = 0{,}(756)756\ldots$
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Die Ziffern der Periode und die Zähler des entsprechenden gemeinen Bruches sind in allen Fällen gleich. Ein derartiger Decimalbruch muß

daher einem gemeinen Bruche gleich sein, der die Ziffern der Periode zum Zähler und als Nenner so viele 9 hat, als die Periode Stellen. 0,(1)11 . . . $= {}^1/_9$; 0,(27)27 . . . $= {}^{27}/_{99} = {}^3/_{11}$; 0,(756)756 . . $= {}^{756}/_{999} = {}^{28}/_{37}$.

Decimalbrüche, die nicht gleich mit den ersten Stellen periodisch werden, nennt man unrein periodisch.

Geht der Periode eine Null vorher, wie bei 0,0555 . . .; so rückt man das Komma um eine Stelle weiter rechts, wodurch der Bruch 10mal so groß und rein periodisch wird, verwandelt ihn dann in einen gemeinen Bruch und theilt diesen wieder durch 10. Statt 0,0555 . . . setzt man also 0,555 . . .; 0,555 . . . $= {}^5/_9$; ${}^1/_{10} \times {}^5/_9 = {}^5/_{90} = {}^1/_{18}$. Bei 0,008181 . . ., wo 2 Nullen vorhergehen, setzt man 0,8181 . . . $= {}^{81}/_{99}$; ${}^1/_{100} \times {}^{81}/_{99} = {}^{81}/_{9900} = {}^9/_{1100}$.

Gehen statt der Nullen Ziffern voraus, so wird der Decimalbruch zerlegt. 0,3111 . . $=$ 0,3 $+$ 0,0111; 0,3 $= {}^3/_{10}$; 0,0111 $= {}^1/_{90}$; ${}^3/_{10} + {}^1/_{90} = {}^{14}/_{45}$. Noch ein Beispiel: 0,9166 . . . $=$ 0,91 $+$ 0,00666; 0,91 $= {}^{91}/_{100}$; 0,0066 . . . $= {}^6/_{900} = {}^2/_{300}$; ${}^{91}/_{100} + {}^2/_{300} = {}^{275}/_{300} = {}^{11}/_{12}$.

Eine zweite Weise. Zieht man eine Zahl von ihrem 10fachen ab, so bleibt ihr 9faches übrig; zieht man eine Zahl von ihrem 100fachen ab, so bleibt ihr 99faches übrig ꝛc.; und theilt man das 9fache durch 9, das 99fache durch 99 ꝛc., so ergibt sich das Einfache, also die Zahl selbst. Das läßt sich an jeder Zahl erproben, und dieser Weg läßt sich auch einschlagen, reinperiodische Decimalbrüche auf gemeine zurück zu führen. Dabei bezeichnet man den zu suchenden gemeinen Bruch, der dem gegebenen Decimalbruche gleich sein soll, mit x.

Es sei	x = 0,333 . .	x = 0,3636 . .	x = 0,243243 . .
so ist	10 x = 3,333 . .	100 x = 36,36 . .	1000 x = 243,243 . .
davon ab	x = 0,333 . .	x = 0,36 . .	x = 0,243 . .
bleibt	9 x = 3	99 x = 36	999 x = 243
also ist	$x = {}^3/_9 = {}^1/_3$	$x = {}^{36}/_{99} = {}^4/_{11}$	$x = {}^{243}/_{999} = {}^9/_{37}$

Man multiplicirt also den rein periodischen Decimalbruch mit einer dekadischen Zahl, die so viel Nullen als die Periode Stellen hat, so daß aus der Periode Ganze entstehen, und subtrahirt hievon den gegebenen Bruch. Dadurch erhält man ein in Ganzen ausgedrücktes Vielfaches des letzteren, von dem man auf das Einfache schließt.

Einen unrein periodischen Decimalbruch multiplicirt man mit zwei dekadischen Zahlen, einmal so, daß das Komma bis zur Periode rückt, dann daß es hinter die Periode rückt.

x = 86363 . . .; multipliciren wir mit 10, so erhalten wir 10 x = 8,6363 . . .; multipliciren wir diese Gleichung noch mit 100, so erhalten wir

	1000 x = 863,63 . .	x = 0,58333 . .
davon ab	10 x = 8,63 . .	1000 x = 583,33 . .
		100 x = 58,33 . .
bleibt	990 x = 855	900 x = 525
	$x = {}^{855}/_{990} = {}^{19}/_{22}$	$x = {}^{525}/_{900} = {}^7/_{12}$

Regel: Man subtrahirt die nicht periodischen Ziffern von der gemischten Periode und nimmt den Rest als Zähler; als Nenner aber setzt man so viele 9, als die Periode Ziffern hat, und so viele Nullen, als nichtperiodische Ziffern vorhanden sind.

§. 272. Brüche gleichnamig zu machen.

A. Mündlich.

$^5/_9$ und $^4/_9$! Zwei gleichnamige Brüche. Wie viel beträgt ihre Summe? Wie viel ihr Unterschied? Von gleichnamigen Brüchen kann man ohne Weiteres die Summe und den Unterschied bestimmen.

$^5/_9$ und $^4/_7$! Zwei ungleichnamige Brüche. Zählt man die 5 Theile des einen und die 4 des andern zusammen, so beträgt die Summe weder 9tel, noch 7tel. Auch kann man von 9teln keine 7tel und von 7teln keine 9tel wegnehmen. Ungleichnamige Brüche müssen, um sie addiren, oder um ihren Unterschied bestimmen zu können, in gleichnamige verwandelt werden. Hiebei sind folgende 3 Fälle in's Auge zu fassen:

a. $^3/_4$ und $^5/_8$; der kleinere Nenner geht in dem größeren auf.
b. $^3/_4$ und $^4/_5$; die Nenner sind Primzahlen unter sich, sie haben kein gemeinschaftliches Maß.
c. $^5/_6$ und $^7/_{10}$; die Nenner haben ein gemeinschaftliches Maß.

a. $^3/_4$ und $^5/_8$!

In welche Theile lassen sich 4tel verwandeln? (In 8tel, 12tel 2c. d. i. in solche Theile, deren Nenner Produktzahlen von 4 sind, in deren Nenner 4 also aufgeht.) 4 geht in 8 auf. Wie werden wir daher $^3/_4$ und $^5/_8$ gleichnamig machen? (Wir verwandeln die $^3/_4$ in 8tel; $^3/_4 = ^6/_8$.) Nun heißen die beiden Brüche $^6/_8$ und $^5/_8$, und nun können wir sie zusammenzählen und auch ihren Unterschied bestimmen. Macht gleichnamig $^3/_4$ und $^{15}/_{16}$, $^3/_4$ und $^{17}/_{24}$, $^3/_4$ und $^{23}/_{44}$, $^3/_4$ und $^{47}/_{72}$ 2c.

In welchen Zahlen geht 2 auf? In welche Theile lassen sich daher Halbe verwandeln? Wie macht man $^1/_2$ und $^{13}/_{18}$ gleichnamig? Wie $^1/_2$ und $^7/_{30}$? $^1/_2$ und $^{23}/_{52}$? u. s. w.

So werden auch 3tel, 5tel, 6tel 2c. mit Brüchen, in deren Nenner 3, 5, 6 2c. aufgehen, gleichnamig gemacht.

b. $^3/_4$ und $^4/_5$.

4 geht in 5 nicht auf; 4tel lassen sich nicht in 5tel verwandeln. Wir müssen hier also beide Brüche erweitern und für sie einen gemeinschaftlichen Nenner suchen. In welche Theile lassen sich die 4tel verwandeln? In welche die 5tel? Wo kommen oder treffen die 4tel und 5tel zuerst zusammen? (In 20steln.) Wie heißt auch die kleinste Zahl, in welcher die Nenner 4 und 5 zugleich aufgehen? (20.) Und wie erhält man diese Zahl aus den Nennern 4 und 5? (Man multiplicirt sie mit einander. $4 \times 5 = 20$.) Die Brüche $^3/_4$ und $^4/_5$ werden also, um sie gleichnamig zu machen, in 20stel verwandelt. Ausführung! $^1/_4 = ^5/_{20}$, $^3/_4 = 3 \times 5$ oder $^{15}/_{20}$; $^1/_5 = ^4/_{20}$, $^4/_5 = 4 \times 4$ oder $^{16}/_{20}$; also sind $^3/_4$ und $^4/_5 = ^{15}/_{20}$ und $^{16}/_{20}$.

In welche Theile lassen sich 5tel und 6tel verwandeln? Wo kommen 5tel und 6tel zuerst zusammen, oder wie heißt die kleinste Zahl, in welcher 5 und 6 zugleich aufgehen? Wie erhält man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner für 5tel und 6tel? Macht $^4/_5$ und $^5/_6$ gleichnamig!

Aufgabe: $^4/_5$ und $^7/_8$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Aufl. 5 geht nicht in 8 auf. Der gemeinschaftliche Nenner für 5tel und 8tel ist 5×8 oder 40; $^4/_5 = 4 \times 8$ oder $^{32}/_{40}$, und $^7/_8 = 7 \times 5$ oder $^{35}/_{40}$; also sind $^4/_5$ und $^7/_8 = {}^{32}/_{40}$ und $^{35}/_{40}$.

Vermischte Aufgaben:

$^1/_2$ u. $^7/_{16}$ $^2/_3$ u. $^{13}/_{36}$ $^3/_4$ u. $^{13}/_{32}$ $^4/_5$ u. $^5/_7$ $^5/_6$ u. $^6/_7$ $^7/_8$ u. $^{53}/_{96}$
$^1/_2$ u. $^7/_{15}$ $^2/_3$ u. $^{13}/_{32}$ $^3/_4$ u. $^{13}/_{15}$ $^4/_5$ u. $^{19}/_{30}$ $^5/_6$ u. $^{43}/_{72}$ $^7/_8$ u. $^{13}/_{15}$

c. $^5/_6$ und $^7/_{10}$.

Können 6tel in 10tel verwandelt werden? Warum nicht? Also müssen wir beide Brüche erweitern und für sie einen Hauptnenner, d. i. eine Zahl suchen, in welcher die Nenner 6 und 10 zugleich aufgehen. Eine solche Zahl ist jedenfalls 6×10 oder 60. Es gibt aber auch eine kleinere Zahl, in welcher die Nenner 6 und 10 ohne Rest enthalten sind. Wie heißt dieselbe? (30.) 30 ist genau die Hälfte von 60. Woher kommt es nun aber, daß die kleinste Zahl, in welcher 6 und 10 zugleich aufgehen, nur halb so groß als 6×10 oder 60 ist? Das kommt daher, daß 6 und 10 die Zahl 2 als gemeinschaftliches Maß, als gemeinschaftlichen Faktor haben.

Setzen wir $^1/_6$ und $^1/_{15}$. Das Produkt aus den beiden Nennern ist 6×15 oder 90; 6 und 15 gehen aber schon in 30, also in dem 3. Theil von 90 auf. Woher das? Weil 6 und 15 die Zahl 3 zum gemeinschaftlichen Maße oder Faktor haben.

10tel und 15tel! 10tel und 15tel lassen sich, da $10 \times 15 = 150$, in 150stel verwandeln. Es gibt jedoch eine viel kleinere Zahl, in welcher 10 und 15 aufgehen, nämlich 30. Der wie vielte Theil ist 30 von 150? Und worin wird es seinen Grund haben, daß hier ein Hauptnenner möglich ist, der nur $^1/_5$ von 10×15 beträgt? (Darin, daß 10 und 15 den Faktor 5 gemeinschaftlich haben.)

Also: Haben die Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor, so gibt es einen Hauptnenner, welcher kleiner ist als ihr Produkt. Und es ist nun die Frage, wie man den möglichst kleinsten Hauptnenner in allen Fällen sicher findet.

Das Bisherige gibt uns einen Fingerzeig. Haben zwei Nenner den gemeinschaftlichen Faktor 2, so beträgt der möglichst kleinste Hauptnenner die Hälfte ihres Produkts; haben sie den gemeinschaftlichen Faktor 3, so beträgt ihr Hauptnenner $^1/_3$ ihres Produkts, und haben sie den gemeinschaftlichen Faktor 5, so beträgt ihr Hauptnenner $^1/_5$ ihres Produkts.

Wir zerlegen daher die Nenner in ihre Grundfaktoren, also

6 in 3×2	6 in 2×3	10 in 2×5
10 in 5×2	15 in 5×3	15 in 3×5
$5 \times 2 \times 3 = 30$	$5 \times 3 \times 2 = 30$	$3 \times 5 \times 2 = 30$

und streichen den gemeinschaftlichen Faktor bei 10 und 15. Die übrigen mit einander multiplicirt, geben den kleinsten Hauptnenner.

21stel und 35stel!

$21 = 3 \times 7$

$35 = 5 \times 7$. Beide Zahlen haben den Faktor 7. Da er bei 21 schon vorkommt, so streichen wir ihn bei 35. Die übrigen Faktoren geben ein Produkt, in welchem die Nenner 21 und 35 ohne Rest enthalten sind. Denn 21 geht nicht nur in 3×7 auf, sondern auch in $3 \times 7 \times 5$, und 35 nicht nur in 7×5, sondern auch in $3 \times 7 \times 5$.

$5 \times (3 \times 7) = 5 \times 21 = 105$. Diese Zahl erhalte ich auf die kürzeste Weise, indem ich mit dem gemeinschaftlichen Maße 7 in 35 dividire, wodurch ich 5 erhalte, und mit dieser 5 den Nenner 21 multiplicire. Ich denke oder spreche: das gemeinschaftliche Maß von 21 und 35 ist 7; 7 liegt in 35 5mal; $5 \times 21 = 105$.

Beisp. 3. 18tel und 24stel.

$18 = 2 \times 3 \times 3$ Bei 24 werden die Faktoren 2 u. 3 ge-

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ strichen, weil sie sich schon bei 18 finden.

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2) \times (2 \times 3 \times 3) = 4 \times 18 = 72$.

Kurz: Das größte gemeinschaftliche Maß von 18 und 24 ist 6; 6 liegt in 24 4mal; $4 \times 18 = 72$.

Welches ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner von

$^1/_6$ u. $^1/_8$	$^1/_8$ u. $^1/_{10}$	$^1/_{10}$ u. $^1/_{25}$	$^1/_{12}$ u. $^1/_{18}$	$^1/_{16}$ u. $^1/_{24}$
$^1/_6$ u. $^1/_{15}$	$^1/_8$ u. $^1/_{12}$	$^1/_{10}$ u. $^1/_{16}$	$^1/_{12}$ u. $^1/_{15}$	$^1/_{24}$ u. $^1/_{36}$

Nun werden Reihen mit vermischten Aufgaben gebildet. Bei jeder Aufgabe hat sich der Schüler zu fragen: „Geht ein Nenner in dem andern auf?“ „Haben sie ein gemeinschaftliches Maß?“ Erst wenn keines von Beiden der Fall ist, werden die Nenner mit einander multiplicirt.

Wie heißt der gemeinschaftliche Nenner a. von $^1/_2$ und $^1/_3$, von $^1/_2$ und $^1/_4$, von $^1/_2$ und $^1/_5$? ꝛc. b. von $^1/_3$ und $^1/_4$, von $^1/_3$ und $^1/_5$, von $^1/_3$ und $^1/_6$ ꝛc.

Macht gleichnamig: $^1/_2$ und $^2/_3$ ($^3/_4$, $^4/_5$ ꝛc.); $^2/_3$ u. $^3/_4$ ($^4/_5$, $^5/_6$ ꝛc.) u. s. w.

B. Schriftlich.

1. Die kleineren Nenner sind in dem größten Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten.

Beisp. $^{11}/_{12}$, $^7/_{15}$, $^9/_{20}$, $^{23}/_{30}$, $^{47}/_{60} = ?$

Der größte Nenner dieser Brüche ist 60. Die Nenner 12, 15, 20 und 30 gehen darin auf. Die Brüche $^{11}/_{12}$, $^7/_{15}$, $^9/_{20}$ und $^{23}/_{30}$ lassen sich daher gleichfalls in 60stel verwandeln.

	60			
			$1 = {}^{60}/_{60}$.	
$^{11}/_{12}$	5	55	$^1/_{12} = {}^5/_{60}$;	$^{11}/_{12} =$ 11mal 5 oder $^{55}/_{60}$.
$^7/_{15}$	4	28	$^1/_{15} = {}^4/_{60}$;	$^7/_{15} =$ 7mal 4 oder $^{28}/_{60}$.
$^9/_{20}$	3	27	$^1/_{20} = {}^3/_{60}$;	$^9/_{20} =$ 9mal 3 oder $^{27}/_{60}$.
$^{23}/_{30}$	2	46	$^1/_{30} = {}^2/_{60}$;	$^{23}/_{30} =$ 23mal 2 oder $^{46}/_{60}$.
$^{47}/_{60}$	1	47	$^{47}/_{60} = {}^{47}/_{60}$.	

2. Die kleineren Nenner gehen in den größeren nicht auf.

a. Die Nenner haben kein gemeinschaftliches Maß.

Beisp. $^3/_4$, $^5/_7$, $^2/_3$.

Von 4, 7 und 3 geht weder eine Zahl in der andern auf, noch haben sie ein gemeinschaftliches Maß. (Sie sind Primzahlen unter sich.) Der möglichst kleinste Hauptnenner ist daher $4 \times 7 \times 3$ oder 84. Die Brüche werden in 84stel verwandelt. Steht so:

	84		
$^3/_4$	21	63	$^1/_4 = {}^{21}/_{84}$, $^3/_4 = {}^{63}/_{84}$.
$^5/_7$	12	60	$^1/_7 = {}^{12}/_{84}$, $^5/_7 = {}^{60}/_{84}$.
$^2/_3$	28	56	$^1/_3 = {}^{28}/_{84}$, $^2/_3 = {}^{56}/_{84}$.

Haupt.: $4 \times 7 \times 3 = 84$

b. Die Nenner haben ein gemeinschaftliches Maß.

Beispiel: 1. Wie heißt der Hauptnenner für 12tel, 15tel und 18tel?

$$\text{a. } 12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$$
$$15 = \not{3} \,.\, 5$$
$$18 = \not{2} \,.\, \not{3} \,.\, 3$$

$12 = 2 \times 2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$. Der Faktor 3 findet sich schon bei 12 und wird daher gestrichen. Auch von 18 oder $2 \times 3 \times 3$ ndfien sich die Faktoren 2 und 3 bei 12; sie werden daher ebenfalls gestrichen. Es bleiben also noch die Faktoren

$$2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$$

Hierunter kommen die Grundfaktoren von jedem unserer Nenner vor; also müssen diese auch in dem Produkte aus $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ ohne Rest enthalten sein. Und so ist es.

12 oder $2 \,.\, 2 \,.\, 3$ liegt in $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ gerade $5 \,.\, 3$mal,
15 oder $3 \,.\, 5$ liegt in $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ gerade $2 \,.\, 2 \,.\, 3$mal,
18 oder $2 \,.\, 3 \,.\, 3$ liegt in $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3$ gerade $2 \,.\, 5$mal.

b.			
2	12.	15.	18
3	6.	15.	9
	2.	5.	3

12 ist hier zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und in den Quotienten 2; 15 ist zerlegt in den Theiler 3 und in den Quotienten 5, und 18 ist zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und in den Quotienten 3.

Der Hauptnenner ist also

nach a: $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 = 180$,
nach b: $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 3 = 180$.

Beispiel. 2. Wie heißt der Hauptnenner für 9tel, 20stel, 18tel, 16tel, 12tel, 15tel und 24stel?

a.
~~9~~
20=2×2×5
18=~~2~~×3×3
16=~~2~~×~~2~~×2×2
~~12~~
15=~~3~~×~~5~~
24=~~2~~×~~2~~×~~3~~×~~3~~
2×2×5×3×3×2×2
= 720

Zuerst sehen wir zu, ob sich unter den gegebenen Nennern auch solche befinden, welche in einem der größeren Nenner aufgehen. Dieß ist bei 9 und 12 der Fall. 9 geht in 18, und 12 in 24 auf. Jede Zahl, welche durch 18 theilbar ist, ist es auch durch 9, und jede Zahl, welche theilbar ist durch 24, ist es auch durch 12. (Nachweis!) 9 und 12 werden daher gestrichen.

Die übrigen Nenner zerlegen wir in ihre Grundfaktoren.

Von den Faktoren der Zahl 18 wird 2 gestrichen, weil wir diesen Faktor schon bei 20 haben. — Von den Faktoren der Zahl 16 wird 2 × 2 gestrichen; denn die Faktoren 2 × 2, welche stehen bleiben, und die 2 × 2 bei 20 machen zusammen 2×2×2×2 und diese reichen hin, ein Produkt zu bilden, in welchem 16 aufgeht. — Bei der Zahl 15 streichen wir den Faktor 3, weil wir ihn schon bei 18 haben, und den Faktor 5, weil er sich schon bei 20 findet. — Da unter den Faktoren, welche wir bis jetzt behalten haben, der Faktor 2 schon viermal, der Faktor 3 schon zweimal vorkommt; so werden auch die Faktoren von 24 alle gestrichen. — Wir behalten also bloß die Faktoren 2×2×5×3×3×2×2. Unter denselben sind sämmtliche Faktoren der gegebenen Zahlen enthalten. Werden daher die behaltenen Faktoren mit einander multiplicirt, so ist das Produkt eine Zahl, in welcher die gegebenen Nenner sämmtlich aufgehen.

b.

2	~~9~~	20	18	16	~~12~~	15	24
2		10	9	8		15	12
3		5	9	4		15	6
2		5	3	4		5	2
5		5	3	2		5	1
		1	3	2		1	1

2×2×3×2×5×3×2=720.

Auch hier werden 9 und 12 gestrichen und die übrigen Nenner, indem man sie durch ihre **gemeinschaftlichen** Grundfaktoren **dividirt**, in ihre Grundfaktoren zerlegt.
2 ist in 20 10mal (20 = 2 × 10), 2 ist in 18 9mal (18 = ~~2~~ . 9); 2 ist in 16 8mal (16 = ~~2~~ . 8); 2 in 15 geht nicht auf, 15 herunter; 2 ist in 24 12mal (24 = ~~2~~ . 12).

Der Divisor 2 vertritt also den Faktor 2 von 20, 18, 16 und 24, und dieser steht daher anstatt **viermal** nur **einmal**. Dreimal ist er bereits als überflüssig weggeschafft, gestrichen.

Die Theilung mit Grundfaktoren wird so lange als möglich fortgesetzt. Am Ende werden alle Theiler mit den Zahlen, welche zuletzt vorhanden sind, multiplicirt. Das Produkt ist der kleinste Hauptnenner.

Wie werden **Decimalbrüche** gleichnamig gemacht? Decimalbrüche macht man gleichnamig, indem man ihnen durch Anhängen von Nullen gleichviel Stellen, d. i. so viel Stellen gibt, als der längste bereits hat. z. B.

$7,36 = 7,3600$
$9,7385 = 9,7385$
$14,9 = 14,9000$

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

II. Addiren.

§. 273. Uebersicht.

a.	b.	c.	d.
$^{7}/_{9} + {}^{5}/_{9}$	$3^{5}/_{8} + {}^{7}/_{8}$	$^{2}/_{3} + {}^{5}/_{6}$	$2^{3}/_{4} + {}^{5}/_{8}$
$8 + 3^{2}/_{3}$	$6^{2}/_{5} + 9^{1}/_{5}$	$^{3}/_{4} + {}^{4}/_{5}$	$5^{1}/_{6} + 4^{4}/_{9}$
$5^{4}/_{5} + 4$	$8^{7}/_{11} + 7^{8}/_{11}$	$^{5}/_{6} + {}^{7}/_{8}$	$9^{3}/_{5} + 8^{5}/_{6}$

§. 274. Verfahren.

1) $^{7}/_{9} + {}^{5}/_{9}$! $^{7}/_{9} + {}^{5}/_{9} = {}^{12}/_{9} = 1^{3}/_{9} = 1^{1}/_{3}$.

2) $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25}$! a. $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = {}^{24}/_{25} + {}^{1}/_{25} + {}^{22}/_{25} = 1^{22}/_{25}$.
b. $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = (1 + 1) - ({}^{1}/_{25} + {}^{2}/_{25}) = 2 - {}^{3}/_{25} = 1^{22}/_{25}$.

3) $8^{7}/_{11} + 7^{8}/_{11}$! $8 + 7 = 15$; $^{7}/_{11} + {}^{8}/_{11} = {}^{15}/_{11} = 1^{4}/_{11}$; $15 + 1^{4}/_{11} = 16^{4}/_{11}$.

4) $^{5}/_{6} + {}^{7}/_{8}$! 6tel und 8tel geben 24stel; $^{5}/_{6} = {}^{20}/_{24}$, $^{7}/_{8} = {}^{21}/_{24}$; $^{20}/_{24} + {}^{21}/_{24} = {}^{41}/_{24} = 1^{17}/_{24}$.

5) $9^{3}/_{5} + 8^{5}/_{6}$! $9 + 8 = 17$; $^{3}/_{5} = {}^{18}/_{30}$, $^{5}/_{6} = {}^{25}/_{30}$; $^{18}/_{30} + {}^{25}/_{30} = {}^{43}/_{30} = 1^{13}/_{30}$; $17 + 1^{13}/_{30} = 18^{13}/_{30}$.

6) Von einer Zahl nahm man $12^{3}/_{4}$ weg und $13^{7}/_{8}$ blieb übrig; welches war die Zahl? (Wenn man $12^{3}/_{4}$ wegnahm und es blieb $13^{7}/_{8}$ übrig, so bestand die Zahl aus $12^{3}/_{4} + 13^{7}/_{8}$.) $12^{3}/_{4} + 13^{7}/_{8} = 12^{6}/_{8} + 13^{7}/_{8} = 25^{13}/_{8} = 26^{5}/_{8}$.

Schriftlich.

Beispiel 1. $^{9}/_{17} + {}^{12}/_{17} + {}^{8}/_{17} + {}^{15}/_{17} + {}^{4}/_{17} + {}^{16}/_{17} = ?$
Beispiel 2. $14^{7}/_{8} + 375^{11}/_{16} + 8^{7}/_{12} + 478^{23}/_{25} + 87^{14}/_{15}$?

Ausrechnung.

1.

$^{9}/_{17}$	9
$^{12}/_{17}$	12
$^{8}/_{17}$	8
$^{15}/_{17}$	15
$^{4}/_{17}$	4
$^{16}/_{17}$	16
$3^{13}/_{17}$	$\frac{64}{17} = 3^{13}/_{17}$

2.

	1200		
$14^{7}/_{8}$	150	1050	
$375^{11}/_{16}$	75	825	
$8^{7}/_{12}$	100	700	
$478^{23}/_{25}$	48	1104	
$87^{14}/_{15}$	80	1120	
$962^{1199}/_{1200}$	1200	4799	3
		3600	
		1199	

Beispiel 3. $14^{5}/_{6} + 9,75 + 27^{3}/_{5} + 12^{7}/_{8} = ?$

a.

	120	
$14^{5}/_{6}$	20	100
$9^{3}/_{4}$	30	90
$27^{3}/_{5}$	24	72
$12^{7}/_{8}$	15	105
$65^{7}/_{120}$	120	$367 = 3^{7}/_{120}$

b.

14,833 . .
9,75
27,6
12,875
65,058

$^{7}/_{120} = 0,058$; also ist $65^{7}/_{120} = 65,058$.

Beispiel 4. A war 17 J. $8\frac{2}{3}$ Mon. alt, als er aus der Lehre trat, stand 6 J. $9\frac{3}{5}$ Mon. auswärts in Arbeit und lebte noch 36 J. $7\frac{5}{6}$ Mon.; wie alt ist er geworden?

				30
17 J.	$8\frac{2}{3}$	Mon.		20
6 „	$9\frac{3}{5}$	„		18
36 „	$7\frac{5}{6}$	„		25
61 J.	$2\frac{1}{10}$	Mon.		$\frac{63}{30}=2\frac{1}{10}$ Mon.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

III. Subtrahiren.

§. 275. Uebersicht.

a.	b.	c.	d.
$\frac{7}{9}-\frac{4}{9}$	$2-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$	$3\frac{4}{5}-\frac{7}{10}$
$8\frac{3}{4}-5$	$7-5\frac{5}{9}$	$\frac{6}{7}-\frac{3}{4}$	$5\frac{7}{8}-4\frac{5}{6}$
$3\frac{9}{10}-\frac{7}{10}$	$3\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}-\frac{7}{16}$	$4\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$
$7\frac{7}{8}-4\frac{5}{8}$	$8\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}$		$9\frac{2}{3}-4\frac{3}{4}$

§. 276. Verfahren.

1) $3\frac{9}{10}-\frac{7}{10}$! $\frac{9}{10}-\frac{7}{10}=\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$; also ist $3\frac{9}{10}-\frac{7}{10}=3\frac{1}{5}$.

2) $7-5\frac{5}{9}$! a. $7-5\frac{5}{9}=6\frac{9}{9}-5\frac{5}{9}=1\frac{4}{9}$.
b. $7-5=2$, und $2-\frac{5}{9}=1\frac{4}{9}$.

3) $8\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}$! a. $8\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}=7\frac{7}{5}-3\frac{4}{5}=4\frac{3}{5}$.
b. $8\frac{2}{5}-3=5\frac{2}{5}$; $5\frac{2}{5}-\frac{4}{5}=5-\frac{2}{5}=4\frac{3}{5}$.

4) $\frac{7}{12}-\frac{7}{16}$! 12tel und 16stel geben 48stel; $\frac{7}{12}=\frac{28}{48}$, $\frac{7}{16}=\frac{21}{48}$; $\frac{28}{48}-\frac{21}{48}=\frac{7}{48}$.

5) $3\frac{4}{5}-\frac{7}{10}$! $3\frac{4}{5}-\frac{7}{10}=3\frac{8}{10}-\frac{7}{10}=3\frac{1}{10}$.

6) $9\frac{2}{3}-4\frac{3}{4}$! $9\frac{2}{3}-4=5\frac{2}{3}$; $5\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=5\frac{8}{12}-\frac{9}{12}=5-\frac{1}{12}=4\frac{11}{12}$.

7) B bekommt $4\frac{3}{4}$ Schock und hat nun $9\frac{1}{6}$ Schock; wie viel hat er vorher gehabt? (Wenn er $4\frac{3}{4}$ Schock bekommt und nun $9\frac{1}{6}$ Schock hat, so muß er $9\frac{1}{6}$ Schock — $4\frac{3}{4}$ Schock gehabt haben.) $9\frac{1}{6}-4\frac{3}{4}=9\frac{2}{12}-4\frac{9}{12}=5-\frac{7}{12}=4\frac{5}{12}$. Also hatte er $4\frac{5}{12}$ Schock.

Schriftlich.

1)

$304\frac{81}{95}$	81
$-187\frac{54}{95}$	54
$117\frac{27}{95}$	27

2)

3.7.2.	28
$-$ 1 8 $5\frac{17}{28}$	17
1 8 $6\frac{11}{28}$	11

3)

5.4.$3\frac{71}{100}$	[100] 71 [171]
$-$ 3 4 $5\frac{97}{100}$	97
1 9 $7\frac{37}{50}$	$\frac{74}{100}=\frac{37}{50}$

4)

	336	
$\frac{47}{48}$	7	329
$-\frac{53}{84}$	4	212
$\frac{39}{112}$		$\frac{117}{336}=\frac{39}{112}$

5)

	45	
$125\frac{5}{9}$	5	[45] 25
$-84\frac{41}{45}$	1	[70] 41
$40\frac{29}{45}$		29

6) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 43,65 und $17^5/_6$?

a.

	60	
$4.3.{}^{13}/_{20}$	3	$\overset{60}{39}$
$-1\,7\ {}^{5}/_{6}$	10	$\overset{99}{50}$
$2\,5\ {}^{49}/_{60}$		49

b.

$$\begin{array}{r} 43{,}650 \\ -17{,}833\,.. \\ \hline 25{,}817 \end{array}$$

${}^{49}/_{60} = 0{,}8166\ldots$; also ist $25^{49}/_{60} = 25{,}8166 = 25{,}817$.

7) In Petersburg kulminirt die Sonne 5 Std. $42^2/_3$ Min. früher, als in Philadelphia; wie viel Uhr ist es in dieser Stadt, wenn in Petersburg die Glocke $2^1/_2$ Uhr Nachmittags schlägt?

14. Std.	3.0.	Min.
— 5 „	$4\,2\ {}^2/_3$	„
8 Std.	$4\,7\ {}^1/_3$	Min.

Morgens 8 Uhr $47^1/_3$ Minuten.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

IV. Multipliciren.

§. 277. Uebersicht.

$2 \times {}^7/_8$	${}^3/_4 \times 5$	${}^3/_4 \times {}^2/_3$	${}^3/_4 \times 5^1/_2$.
$4 \times 9^5/_6$	$6^4/_5 \times 8$	$4^4/_5 \times {}^3/_8$	$5^1/_2 \times 3^3/_5$.

§. 278. Der Multiplicator ist eine ganze Zahl.

Mündlich.

1) $4 \times {}^2/_3 = ?$

$4 \times {}^2/_3 = {}^2/_3 + {}^2/_3 + {}^2/_3 + {}^2/_3 = {}^8/_3$; $4 \times {}^2/_3 = {}^8/_3 = 2^2/_3$.

2) $3 \times 6^3/_4 = ?$

$3 \times 6^3/_4 = 3 \times 6 + 3 \times {}^3/_4 = 18 + 2^1/_4 = 20^1/_4$.

Ist der Multiplicator eine der größeren Zahlen, oder steht der Bruch der Einheit 1 sehr nahe, so verfährt man, wie folgt:

3) 36mal ${}^{11}/_{12} = ?$

a. $36 \times {}^1/_{12} = 3$; $36 \times {}^2/_{12} = 2 \times 3$; $36 \times {}^3/_{12} = 3 \times 3$; $36 \times {}^{11}/_{12} = 11 \times 3$ oder 33.

b. ${}^{11}/_{12} = 1 - {}^1/_{12}$; $2 \times {}^{11}/_{12} = 2 \times 1 - 2 \times {}^1/_{12}$; $3 \times {}^{11}/_{12} = 3 \times 1 - 3 \times {}^1/_{12}$; $36 \times {}^{11}/_{12} = 36 \times 1 - 36 \times {}^1/_{12}$; $36 \times 1 = 36$; $36 \times {}^1/_{12} = 3$; $36 - 3 = 33$.

4) $32 \times 8^{15}/_{16} = ?$

$8^{15}/_{16} = 9 - {}^1/_{16}$; also ist $32 \times 8^{15}/_{16} = 32 \times 9 - 32 \times {}^1/_{16}$; $32 \times 9 = 288$; $32 \times {}^1/_{16} = 2$; $288 - 2 = 286$.

5) Ein Fäßchen enthält $49^3/_4$ l; wie viel enthalten 12 dergleichen?

Antw. Wenn 1 Fäßchen $49^3/_4$ l enthält, so enthalten 12 Fäßchen $12 \times 49^3/_4$ l; $12 \times 49^3/_4$ l $= 12 \times 50 - 12 \times {}^1/_4$ l $= 600$ l $-$ 3 l $= 597$ l $= 5$ hl 97 l.

Schriftlich.

1) $13 \times {}^{15}/_{16} = \dfrac{13 \times 15}{16} = \dfrac{195}{16} = 12^3/_{16}$.

Denk- oder Sprechweise: $13 \times 15 = 195$; $13 \times {}^{15}/_{16} = {}^{195}/_{16} = 12^3/_{16}$.
Oder: ${}^{15}/_{16} = 15$ getheilt durch 16; also ist $13 \times {}^{15}/_{16} = 13 \times 15$, getheilt durch $16 = 195$ getheilt durch $16 = 12^3/_{16}$.

2)
$$\begin{aligned} 18 \times 25^{12}/_{13} &= 18 \times 25 &&= 450 \\ &+ 18 \times {}^{12}/_{13} &&= 16^8/_{13} \\ \hline &18 \times 25^{11}/_{13} &&= 466^8/_{13} \end{aligned}$$

3) Wie viel wiegen 75 Kisten à $^7/_8$ Ctr.?

$75 \times {}^7/_8$ Ctr. $= \dfrac{75 \times 7 \text{ Ctr.}}{8} = \dfrac{525 \text{ Ctr.}}{8} = 65{,}625$ Ctr. $= 65$ Ctr. $62{,}5$ ℔.

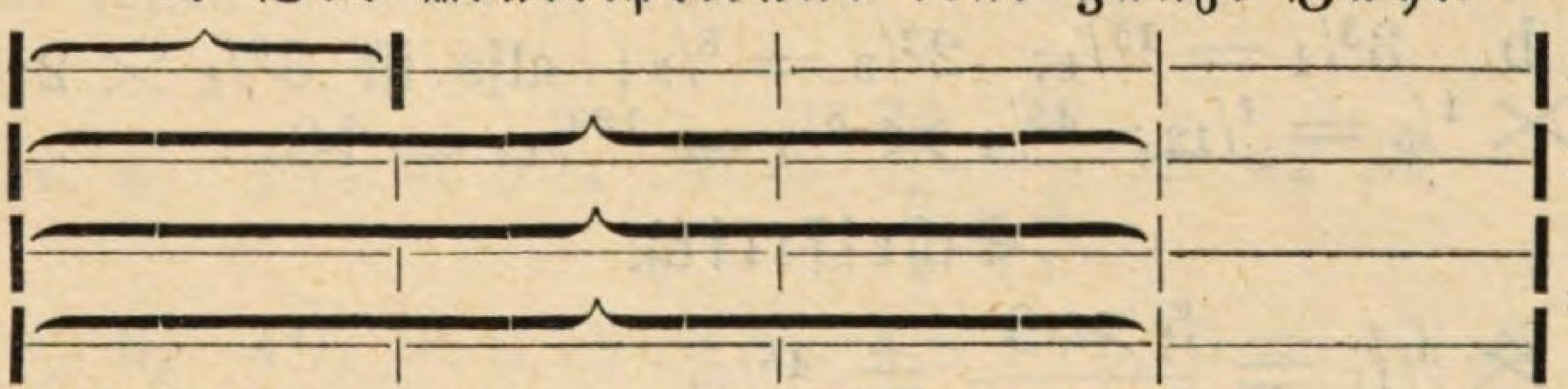
Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

§. 279. Der Multiplicator ist eine Bruchzahl.

Mündlich.

a. Der Multiplicand eine ganze Zahl.

1) $^1/_4 \times 1$ $= {}^1/_4$; $^3/_4 \times 1$ $= {}^3/_4$; $^3/_4 \times 2$ $= {}^6/_4 = 1^1/_2$



Von den Schülern selbst veranschaulicht: $^1/_3 \times 1$, $^2/_3 \times 1$, $^2/_3 \times 2$ u. a. m.

2) $^1/_4 \times 9$! $^1/_4 \times 9 = {}^9/_4 = 2^1/_4$.
$^5/_6 \times 11$! a. $^1/_6 \times 11 = {}^{11}/_6$, $^5/_6 \times 11 = 5 \times {}^{11}/_6 = {}^{55}/_6 = 9^1/_6$.
b. $^5/_6 \times 11 = 11 \times {}^5/_6 = {}^{55}/_6 = 9^1/_6$.
$5^3/_4 \times 9$! $5^3/_4 \times 9 = 5 \times 9 + {}^3/_4 \times 9 = 45 + 6^3/_4 = 51^3/_4$.

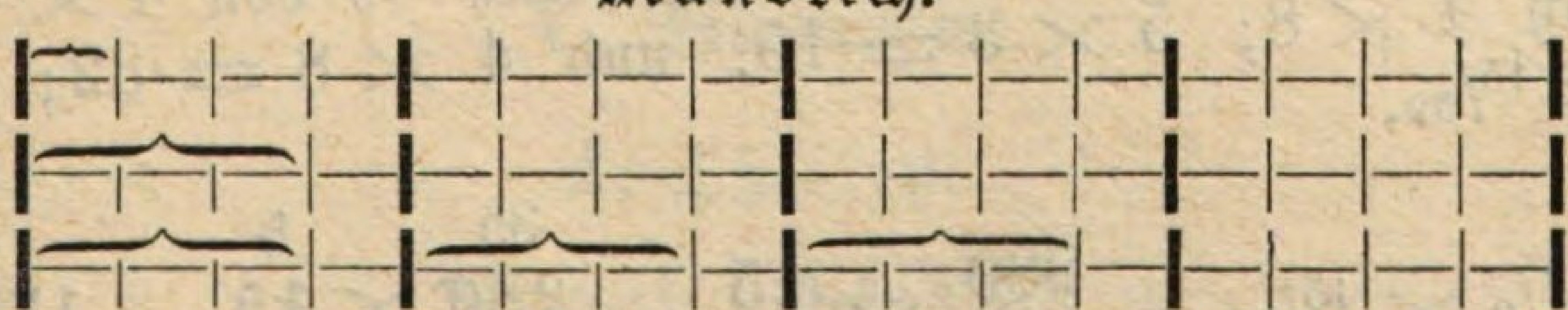
Schriftlich.

$$\begin{aligned} 4^4/_9 \times 15 &= 4 \quad \times 15 = 60 \\ &+ {}^4/_9 \times 15 = 6^2/_3 \\ \hline &4^4/_9 \times 15 = 66^2/_3 \end{aligned}$$

b. Multiplicator und Multiplicand sind oder haben Brüche.

Mündlich.

$^1/_4 \times {}^1/_4$ $= {}^1/_{16}$; $^3/_4 \times {}^1/_4$ $= {}^3/_{16}$; $^3/_4 \times {}^3/_4$ $= {}^9/_{16}$



Von den Schülern selbst veranschaulicht: $^1/_3 \times {}^1/_3$, $^2/_3 \times {}^1/_3$, $^2/_3 \times {}^2/_3$ u. a. m.

Aus diesen und den früheren Veranschaulichungen werden die Schüler die Regel abstrahiren, daß man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

1) $^3/_4 \times {}^5/_7$! $^1/_4 \times {}^1/_7 = {}^1/_{28}$, $^1/_4 \times {}^5/_7 = {}^5/_{28}$, $^3/_4 \times {}^5/_7 = {}^{15}/_{28}$.

2) $2^2/_3 \times {}^7/_8$!
a. $2^2/_3 \times {}^7/_8 = 2 \times {}^7/_8 + {}^2/_3 \times {}^7/_8$; $2 \times {}^7/_8 = {}^{14}/_8 = 1^3/_4$; $^2/_3 \times {}^7/_8 = {}^{14}/_{24} = {}^7/_{12}$; $1^3/_4 + {}^7/_{12} = 1^9/_{12} + {}^7/_{12} = 1^{16}/_{12} = 2^1/_3$.
b. $2^2/_3 = {}^8/_3$; $^8/_3 \times {}^7/_8 = {}^{56}/_{24} = {}^7/_3 = 2^1/_3$.

3) $^4/_5 \times 3^4/_7$!
a. $^4/_5 \times 3^4/_7 = {}^4/_5 \times 3 + {}^4/_5 \times {}^4/_7$; $^4/_5 \times 3 = {}^{12}/_5 = 2^2/_5$; $^4/_5 \times {}^4/_7 = {}^{16}/_{35}$; $2^2/_5 + {}^{16}/_{35} = 2^{14}/_{35} + {}^{16}/_{35} = 2^6/_7$.
b. $^4/_5 \times 3^4/_7 = {}^4/_5 \times {}^{25}/_7 = {}^{100}/_{35} = 2^{30}/_{35} = 2^6/_7$.

4) $3^3/_4 \times 2^2/_3$!

(Mündlich und schriftlich.)

Aufl. a. $3^3/_4 \times 2^2/_3 = 3 \times 2^2/_3 + {}^3/_4 \times 2^2/_3$.

Ausr. $3 \times 2 = 6$.
$3 \times {}^2/_3 = 2$; $6 + 2 = 8$.
$^3/_4 \times 2 = 1^1/_2$; $8 + 1^1/_2 = 9^1/_2$.
$^3/_4 \times {}^2/_3 = {}^1/_2$; $9^1/_2 + {}^1/_2 = 10$.
$3^3/_4 \times 2^2/_3 = 10$.

Aufl. b. $3^3/_4 = {}^{15}/_4$; $2^2/_3 = {}^8/_3$; also ist $3^3/_4 \times 2^2/_3 = {}^{15}/_4 \times {}^8/_3$; $^1/_4 \times {}^1/_3 = {}^1/_{12}$; $^{15}/_4 \times {}^8/_3 = {}^{120}/_{12} = 10$.

Schriftlich.

1) $$^5/_7 \times {}^9/_{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = {}^{45}/_{77}$$

$5 \times {}^9/_{11} = 5 \times 9$ getheilt durch 11; $^5/_7 \times {}^9/_{11} = 5 \times 9$ getheilt $7 \times 11 = 45$ getheilt durch $77 = {}^{45}/_{77}$.

2) $$^{25}/_{28} \times {}^{21}/_{40} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \times \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{28}} \times \underset{8}{\cancel{40}}} = {}^{15}/_{32}.$$

$^{25}/_{28} \times {}^{21}/_{40} = 25 \times 21$, getheilt durch 28×40. Da eine Zahl in einer andern so oft enthalten ist, als irgend ein Theil der einen Zahl in dem gleichnamigen Theile der andern, so kürze ich 28 und 21 durch 7 und habe dann nur noch $^1/_7$ der einen Zahl durch $^1/_7$ der andern, d. i. 25×3 durch 4×40 zu theilen. Hierauf kürze ich auch 25 und 40 durch 5 und theile dann $^1/_5$ von 25×3 durch $^1/_5$ von 4×40, nämlich 5×3 durch 4×8; $5 \times 3 = 15$, und $4 \times 8 = 32$; 15 getheilt durch $32 = {}^{15}/_{32}$.

3) $$31^1/_9 \times {}^{15}/_{16} = \frac{280}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{\overset{35}{\cancel{280}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times \underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{175}{6} = 29^1/_6.$$

4) $$6^2/_5 \times 25 \times {}^7/_8 = \frac{32}{5} \times \frac{25}{1} \times \frac{7}{8} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}} \times \overset{5}{\cancel{25}} \times 7}{\cancel{5} \times 1 \times \cancel{8}} = 140.$$

Gemischte Zahlen werden eingerichtet; ganzen Zahlen gibt man 1 zum Nenner; dann wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

§. 280. **Aufgaben mit der benannten und angewandten Zahl.**

Beispiel 1. $5^3/_4 \times 8^3/_5$ ℳ = ?

Ausr. $5^3/_4 \times 8^3/_5 = {}^{23}/_4 \times {}^{43}/_5 = \frac{23 \times 43}{4 \times 5} = \frac{98,9}{20} = 49,45$ ℳ

Beisp. 2. 1 Ctr. zu $12^7/_{10}$ ℳ; wie hoch kommen $^7/_8$ Ctr.?

Aufl. Wenn 1 Ctr. $12^7/_{10}$ ℳ kostet, so können $^7/_8$ Ctr. nicht $1 \times 12^7/_{10}$ ℳ kosten. 7 ganze Centner kosten $7 \times 12^7/_{10}$ ℳ; $^7/_8$ Ctr. aber kosten nur $^7/_8 \times 12^7/_{10}$ ℳ.

$$^7/_8 \times 12^7/_{10} = {}^7/_8 \times {}^{127}/_{10} = \frac{7 \times 127}{8 \times 10} = 11,1125 \text{ ℳ}$$

Beisp. 3. 1 hl Roggen zu 8,75 ℳ; was kosten $4^4/_5$ hl?

Aufl. Wenn 1 hl 8,75 ℳ kostet, so kosten 4 hl 4mal so viel, und $4^4/_5$ hl kosten $4^4/_5$mal so viel, also $4^4/_5$mal 8,75 ℳ.

Ausr. a. $4^4/_5 \times 8^3/_4 \text{ ℳ} = \frac{\overset{6}{24} \cdot \overset{7}{35}}{\underset{1}{5} \cdot \underset{1}{4}} = 42 \text{ ℳ}$

b. $4^4/_5 \times 8,75 \text{ ℳ} = 4,8 \times 8,75 = 42 \text{ ℳ}$

c. $4^4/_5 \times 8,75 \text{ ℳ} = \frac{24 \times \overset{175}{875}}{5 \times 100} = \frac{42,00}{100} = 42 \text{ ℳ}$

Beisp. 4. Wie viel wiegen 85 Eisenbahnschienen à 4 Ctr. $37^1/_2$ kg?

a.	b.
85 . 4 Ctr. $37^1/_2$ kg =	4 Ctr. $37^1/_2$ kg = 237,5 kg
85 . 4 Ctr. = 340 Ctr.	237,5 kg × 85
85 . 37 kg = 62 „ 45 kg	1187 5
85 . $^1/_2$ kg = — „ $42^1/_2$ „	19000
403 Ctr. $37^1/_2$ kg	50 | 20187,5 kg | 403 Ctr. 37,5 kg

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

V. Dividiren.

A. Theilen.

§. 281. **Uebersicht.**

$^1/_4$ von $^8/_9$ $^1/_5$ von $10^4/_7$ $^1/_6$ von $22^4/_5$

$^1/_4$ von $^7/_{10}$ $^1/_5$ von $4^3/_4$ $^1/_6$ von $28^2/_3$

Bei dem Dividiren im Sinne des Theilens ist der Divisor eine ganze Zahl. $^1/_4$ von $^8/_9$ suchen, heißt: $^8/_9$ durch 4 theilen.

§. 282. Verfahren.

1) Wie viel ist der 4. Theil von $^8/_9$? (Antwort: $^2/_9$.) Der Theiler geht im Zähler auf; die Anzahl der Theile, der Z., wird getheilt; der Name der Theile, der N., bleibt unverändert.

Wie viel beträgt von $^{12}/_{13}$ die Hälfte? der 3. Theil? der 4. Theil? der 6. Theil? der 12. Theil?

2) Wie erhält man den 4. Theil von 1 Ganzen? Wie den 4. Theil von $^1/_3$? (Man theilt $^1/_3$ in 4 gleiche Theile und nimmt 1 Theil davon.)

Ausführung! $^1/_3$ in 4 gleiche Theile getheilt $= {}^4/_{12}$; 1 Theil davon ist $^1/_{12}$; also ist der 4. Theil von $^1/_3 = {}^1/_{12}$.

Wie erhält man a. die Hälfte von $^1/_5$? b. den 3. Theil von $^1/_6$? c. den 5. Theil von $^1/_8$? d. den 6. Theil von $^1/_7$? rc.

3) Wie macht man es, um den 3. Theil von 2 Ganzen zu erhalten? (Man nimmt den 3. Th. von jedem Ganzen.) Wie wird man nun auch den 3. Theil von $^2/_3$ erhalten? Man nimmt den 3. Theil von jedem der beiden Drittel.

Ausführung! $^1/_3$ in 3 gleiche Theile zerlegt $= {}^3/_9$; 1 Theil davon ist $^1/_9$; also ist der dritte Theil von $^1/_3 = {}^1/_9$, und der dritte Theil von $^2/_3 = {}^2/_9$.

Wie viel ist der 5. Theil von $^3/_4$? der 8. Theil von $^4/_5$? der 10. Theil $^7/_8$? der 12. Theil $^7/_{10}$? rc.

4) Wie findet man den 3. Theil von $^8/_9$?

a. $^8/_9 = {}^6/_9 + {}^2/_9$; der 3. Theil von $^6/_9 = {}^2/_9$; der 3. Theil von $^1/_9 = {}^1/_{27}$, und der 3. Theil von $^2/_9 = {}^2/_{27}$; also ist der 3. Theil von $^8/_9 = {}^2/_9 + {}^2/_{27} = {}^6/_{27} + {}^2/_{27} = {}^8/_{27}$.

b. Der 3. Theil von $^1/_9 = {}^1/_{27}$; der 3. Theil von $^8/_9 = {}^8/_{27}$. Welche Weise ist die bessere?

Darum machen wir es uns zur Regel: Wenn der Theiler in dem Zähler des Bruches nicht aufgeht, so nehmen wir den verlangten Theil von jedem der gegebenen Theile. So viel Theile der gegebene Bruch enthält, so viel kommen auch auf den gesuchten. Der Zähler des Bruches bleibt also unverändert. Und der Nenner? Der 3. Theil von $^1/_2 = {}^1/_6$, von $^1/_3 = {}^1/_9$. Der N. wird so vielmal so groß, als der Theiler anzeigt.

Sucht die Hälfte von $^1/_8$, $^2/_8$ . . . $^7/_8$! von $^1/_{10}$ bis $^9/_{10}$. Sucht den 3. Theil von $^1/_{12}$ bis $^{11}/_{12}$! den 4. Theil von $^1/_{16}$ bis $^{15}/_{16}$! rc.

5) Wie viel beträgt der 4. Theil von $28^3/_4$? (Der 4. Theil von $28 = 7$, und der 4. Theil von $^3/_4 = {}^3/_{16}$; der 4. Th. von $28^3/_4 = 7^3/_{16}$.)

6) Wie sucht man den 5. Theil von $3^3/_4$?

Der 5. Theil von $3 + {}^3/_4$ ist nicht 1 Ganzes; ich verwandle daher $3^3/_4$ in 4tel; $3^3/_4 = {}^{15}/_4$; der 5. Theil von $^{15}/_4 = {}^3/_4$.

7) $27^3/_5$ durch 8 getheilt, wie viel?

Aufl. Auf den 8. Theil von $27^3/_5$ kommen Ganze. Diese ziehe ich zuerst heraus. $27^3/_5 = 24 + 3^3/_5$. Der 8. Theil von $24 = 3$. $3^3/_5 = {}^{18}/_5$; der 8. Theil von $^{18}/_5 = {}^{18}/_{40}$ oder $^9/_{20}$. Also ist $27^3/_5$ durch 8 getheilt $= 3^9/_{20}$.

Mit Anwendung von Rechnungsvortheilen.

Beisp. 1. Wie viel beträgt der 14. Theil von $^7/_8$?

a. Der 14. Theil von $^1/_8 = ^1/_{112}$, von $^7/_8 = ^7/_{112} = ^1/_{16}$.

b. $14 = 7 \times 2$; der 7. Theil von $^7/_8 = ^1/_8$, und der halbe Theil von $^1/_8 = ^1/_{16}$.

Ist der Divisor eine Produktzahl, so zerlegt man ihn (wo möglich) in solche Faktoren, deren einer in dem Zähler des Bruches aufgeht.

Beisp. 2. Welche Zahl ist 9mal in $66^3/_8$ enthalten?

Ausr. Die Zahl, welche 9mal in $66^3/_8$ enthalten ist, ist der 9. Theil von $66^3/_8$; $9 = 3 \times 3$; der 3. Theil von $66^3/_8 = 22^1/_8$; $22^1/_8 = 21 + 1^1/_8$; der 3. Theil von $21 = 7$, und der 3. Theil von $1^1/_8$ oder $^9/_8 = ^3/_8$; $7 + ^3/_8 = 7^3/_8$. Also heißt die Zahl, welche in $66^3/_8$ 9mal enthalten ist, $7^3/_8$. ($9 \times 7^3/_8 = 63 + 3^3/_8 = 66^3/_8$).

Beisp. 3. Wie viel ist der vierte Theil von $31^3/_4$?

a. $31^3/_4 = 28 + 3^3/_4$; der 4. Theil hievon ist $7^{15}/_{16}$.

b. $31^3/_4 = 32 - ^1/_4$. Ich suche den 4. Theil von 32 und ziehe davon den 4. Theil von $^1/_4$ ab $= 8 - ^1/_{16} = 7^{15}/_{16}$.

Beisp. 4. Wie viel ist $28^1/_2$, getheilt durch 5?

a. $28^1/_2 = 25 + 3^1/_2$; der 5. Theil hievon ist $5^7/_{10}$.

b. $28^1/_2$ getheilt durch $5 = 2 \times 28^1/_2$ getheilt durch $2 \times 5 = 57 : 10 = 5{,}7$. (Gleichmäßige Vergrößerung des Divisors und des Dividenden).

Schriftlich.

1) Wie viel beträgt der 4. Theil von $^7/_8$?

4	7
8	8
32	$7 = ^7/_{32}$

Wenn sich 4 Personen in $^7/_8$ kg zu theilen haben, so beträgt 1 Theil eben so viel, als wenn sich 2×4 Personen in $2 \times ^7/_8$ kg, 3×4 Pers. in $3 \times ^7/_8$ kg, 8×4 Pers. in $8 \times ^7/_8$ kg zu theilen haben. $^7/_8$ getheilt durch $4 = 8 \times ^7/_8$ getheilt durch $8 \times 4 = 7 : 32 = ^7/_{32}$.

2) Wie groß ist der 12. Theil von $357^5/_8$?

a.

12	$357^5/_8$	
8	8	
96	2861	$29^{77}/_{96}$
	192	
	941	
	864	
	77	

b.

12	$357^5/_8$	29
	24	
	117	
	108	
12	$9^5/_8$	
8	8	
96	77	$^{77}/_{96}$

c. 12 | 357,625 | = 29,8020833 . .

Ausrechnung a. $357^5/_8$ getheilt durch $12 = 8 \times 357^5/_8$ getheilt durch $8 \times 12 = 2861 : 96 = 29^{77}/_{96}$. Divisor und Dividend werden, um letzteren auf eine ganze Zahl zu bringen, mit dem Nenner 8 multiplicirt, also gleichmäßig vergrößert.

Ausrechnung b. Hier wird der 12. Theil zuerst von der ganzen Zahl und hernach von dem Reste gesucht. Der 12. Theil von $357 = 29$,

Rest 9; hiezu die $^5/_8$, gibt $9^5/_8 = {}^{77}/_8$; $^{77}/_8$ getheilt durch $12 = 77$ getheilt durch $8 \times 12 = 77 : 96 = {}^{77}/_{96}$.

Eine andere Weise.

1) $^7/_8 : 4 = ?$ Ausr. $^7/_8 = 7$ getheilt durch 8; folglich ist der 4. Theil von $^7/_8 = \frac{7}{8.4}$ (7 getheilt durch 4×8) $= {}^7/_{32}$.

2) $357^5/_8 : 12 =$

$$\frac{2861}{8} : 12 = \frac{2861}{8.12} = \frac{2861}{96} = 29^{77}/_{96}.$$

In der Volksschule nicht die eine und die andere Weise, sondern entweder die eine, oder die andere.

§. 283. Die benannte und zugleich angewandte Zahl.

1) In $56^4/_5$ Schock theilen sich 12 Personen; wie viel erhält jede derselben? Antwort: Den 12. Theil von $56^4/_5$ Schck.; $12 = 3 \times 4$; der 4. Theil von $56^4/_5 = 14^1/_5$; der 3. Theil von $12 = 4$, und der 3. Theil von $2^1/_5$ oder $^{11}/_5 = {}^{11}/_{15}$. Also erhält jede Person $4^{11}/_{15}$ Schock = 4 Schock 44 Stück.

2) A verkauft in 8 Wch. 7 Ctr. $24^4/_5$ Pfd.; wie viel in 1 Wch.?

a.
8	$724^4/_5$ Pfd.	
5	5	
40	3624 Pfd.	90 Pfd.
	360	
	24	
	500	
4~~0~~	1200~~0~~ g	300 g

b.
8	724,8 Pfd.	90,6 Pfd.
	72	
	4,8	
	4 8	

1 Pfd. = 500 g; 0,1 Pfd. = 50 g; 0,6 Pfd. = 6×50 g = 300 g.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

B. Enthaltensein.

§. 284. Uebersicht.

a.	b.	c.
$^5/_{16}$ in $^{13}/_{16}$	$^3/_4$ in 18	$^3/_{10}$ in $^4/_5$
$^4/_9$ in $6^1/_9$	$1^3/_7$ in 20	$^3/_4$ in $7^2/_3$
$2^2/_5$ in $8^3/_5$	4 in $37^1/_2$	$1^1/_3$ in $16^1/_2$

§. 285. Verfahren.

1. Gleichnamige Brüche.

1) Wie oft sind $^6/_{25}$ in $^{24}/_{25}$ enthalten?

$^6/_{25}$ sind in $^{24}/_{25}$ so oft enthalten, wie 6 m in 24 m, wie 6 ℳ in 24 ℳ, wie 6 Liter in 24 Liter ꝛc., also so oft wie 6 in 24, nämlich 4mal. — Eben so sind $^{11}/_{15}$ in $^8/_{15}$ so oft enthalten wie 11 in 8, $^7/_{18}$ in $^{17}/_{18}$ so oft als 7 in 17 u. s. w.

Gleichnamige Brüche werden dividirt wie Ganze.

2) $^{45}/_{76}$ in $^{75}/_{76}$! $^{45}/_{76}$ in $^{75}/_{76}$ = 45 in 75, durch 15 gekürzt = 3 in 5 = $1^{2}/_{3}$mal.

3) $^{4}/_{9}$ in $6^{1}/_{9}$! Wie verfährst du, um zu finden, wie oft 0,3 ℳ in 1,2 ℳ enthalten sind? Wie also auch, um zu finden, wie oft $^{4}/_{9}$ in $6^{1}/_{9}$ liegen? Ich verwandle die Ganzen auch in Neuntel. $6^{1}/_{9} = {}^{55}/_{9}$; $^{4}/_{9}$ sind in $^{55}/_{9}$ so oft enthalten wie 4 in 55, nämlich $13^{3}/_{4}$mal.

4) $2^{2}/_{5}$ in $8^{3}/_{5}$! $2^{2}/_{5} = {}^{12}/_{5}$; $8^{3}/_{5} = {}^{43}/_{5}$; $^{12}/_{5}$ sind in $^{43}/_{5}$ so oft enthalten, als 12 in 43; 12 liegt in 43, d. i. in 36 + 7 $3^{7}/_{12}$mal.

5) Wie oft ist a. $^{9}/_{32}$ in $^{31}/_{32}$, b. $12^{1}/_{2}$ in $94^{1}/_{2}$ enthalten?

a. $^{9}/_{32}$	$^{31}/_{32}$	
9	31	$3^{4}/_{9}$
	27	
	4	

b. $12^{1}/_{2}$	$94^{1}/_{2}$	
25	189	$7^{14}/_{25}$
	175	
	14	

Der Ansatz ist wie bei der Division mit ganzen Zahlen. $^{9}/_{32}$ sind in $^{31}/_{32}$ so oft enthalten, als 9 in 31, und $^{25}/_{2}$ in $^{189}/_{2}$ so oft, als 25 in 189.

2. Ein Bruch und eine ganze Zahl.

1) $^{1}/_{2}$ in 6! a. $^{1}/_{2}$ in 6 = $^{1}/_{2}$ in $^{12}/_{2}$ = 1 in 12 = 12mal. b. $^{1}/_{2}$ liegt in 1 2mal, in 6 sechsmal so oft, 6×2 = 12mal. c. 1 ist in 6 sechsmal, $^{1}/_{2}$ ist in 6 2mal so oft, 2×6 = 12mal.

2) $^{6}/_{7}$ in 12! a. $12 = {}^{84}/_{7}$; $^{6}/_{7}$ in $^{84}/_{7}$ = 6 in 84 = 14mal.

b. Wie oft liegt 6 in 12? (2mal.) Sucht nun, wie vielmal so oft die Hälfte von 6, dann der 3. Theil von 6, dann der 6. Theil von 6 in 12 enthalten ist! — $^{6}/_{7}$ ist der 7. Theil von 6. Wie vielmal so oft als 6 wird nun $^{6}/_{7}$ in 12 enthalten sein? — Wir rechnen also: 6 liegt in 12 2mal; $^{6}/_{7}$ ist in 12 7mal so oft, 7×2 oder 14mal enthalten.

$^{4}/_{5}$ in 96! $^{4}/_{5}$ ist der 5. Theil von 4; 4 liegt in 96 24mal; $^{4}/_{5}$ ist in 96 5mal so oft, 5×24 oder 120mal enthalten.

3) $1^{7}/_{8}$ in 35! $1^{7}/_{8} = {}^{15}/_{8}$; 15 liegt in 35 $2^{5}/_{15} = 2^{1}/_{3}$mal; $^{15}/_{8}$ sind in 35 8mal so oft, $8 \times 2^{1}/_{3} = 16 + 2^{2}/_{3}$ oder $18^{2}/_{3}$mal enthalten.

4) 3 in $37^{1}/_{2}$! $37^{1}/_{2} = 36 + 1^{1}/_{2}$; 3 liegt in 36 12mal; 3 in $1^{1}/_{2}$ = $^{6}/_{2}$ in $^{3}/_{2}$ = 6 in 3 = $^{1}/_{2}$; $12 + {}^{1}/_{2} = 12^{1}/_{2}$.

A kauft sich 84 l Wein und trinkt täglich $^{3}/_{4}$ l davon; auf wie viele Tage reicht sein Vorrath hin?

Antwort: Auf so viele Tage, als $^{3}/_{4}$ l in 84 l enthalten sind. 3 l sind in 84 l 28mal, $^{3}/_{4}$ l sind in 84 l 4mal so oft, 4×28 oder 112mal enthalten. Also ꝛc.

Ein Landmann hat $3^{1}/_{5}$ hl Weizen ausgesäet und $41^{3}/_{5}$ hl geerntet, wie vielmal so viel also?

Aufl. Er hat so vielmal $3^{1}/_{5}$ hl geerntet, als $3^{1}/_{5}$ hl in $41^{3}/_{5}$ hl enthalten sind.

Ausr. $3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$. Ich suche zuerst, wie oft $\frac{16}{5}$ hl in 32 hl enthalten sind, und zerlege daher $41\frac{3}{5}$ in $32 + 9\frac{3}{5}$; 16 ist in 32 2mal, $\frac{16}{5}$ sind in 32 5mal so oft, 5×2 oder 10mal; $9\frac{3}{5} = \frac{48}{5}$; $\frac{16}{5}$ sind in $\frac{48}{5}$ 3mal; also ist $3\frac{1}{5}$ in $41\frac{3}{5}$ $10 + 3$ oder 13mal enthalten. Die Ernte betrug somit 13mal so viel als die Aussaat.

Schriftlich.

Wie oft ist a. $\frac{23}{24}$ in 84, b. 4 in $18\frac{1}{2}$ enthalten?

a.	$\frac{23}{24}$	84×24
		336
		168
	23	$2016 = 87\frac{15}{23}$

b.	4	$18\frac{1}{2}$
	2	2
	8	$37 = 4\frac{5}{8}$

Die Ganzen werden in eben solche Theile verwandelt, aus welchen der Bruch der andern Zahl besteht. Dieß geschieht, indem wir sie mit dem Nenner des Bruches multipliciren.

Andere Weise.

$$\text{a. } 84 : \frac{23}{24} = \frac{84 \times 24}{23} = \frac{2016}{23} = 87\frac{15}{24}.$$

84 dividirt durch $23 = \frac{84}{23}$; 84 div. durch $\frac{23}{24}$ ist 24mal so viel.

$$\text{b. } 18\frac{1}{2} : 4 = \frac{37}{2} : 4 = \frac{37}{2 \times 4} = \frac{37}{8} = 4\frac{5}{8}.$$

$\frac{37}{2} = 37$ getheilt durch 2; also $\frac{37}{2} : 4 = 37$ getheilt durch 2×4.

3. Ungleichnamige Brüche.

Welche Brüche werden dividirt wie ganze Zahlen? Was ist daher mit ungleichnamigen Brüchen zu thun, um die Division wie mit ganzen Zahlen ausführen zu können?

1) Wie oft sind $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{5}$ enthalten?

Ausr. Ich mache beide Brüche gleichnamig. 4tel und 5tel kommen in 20stel zusammen. $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, und $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$. Jetzt heißt die Aufgabe: Wie oft sind $\frac{15}{20}$ in $\frac{16}{20}$ enthalten? Antw. So oft, als 15 in 16, nämlich $1\frac{1}{15}$mal. Also 2c.

2) Wie viel ist $7\frac{2}{3}$ dividirt durch $\frac{3}{4}$?

a. Ich mache beide Zahlen gleichnamig. 4tel und 3tel geben 12tel. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $7\frac{2}{3} = \frac{23}{3} = \frac{92}{12}$; $\frac{9}{12}$ sind in $\frac{92}{12}$ so oft enthalten, als 9 in 92, nämlich $10\frac{2}{9}$mal. Also 2c.

a. Ich zerlege $7\frac{2}{3}$ in $6 + 1\frac{2}{3}$; 3 liegt in 6 2mal; $\frac{3}{4}$ liegt in 6 4mal so oft, 4×2 oder 8mal. Nun suche ich, wie oft $\frac{3}{4}$ auch noch in $1\frac{2}{3}$ enthalten sind. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $1\frac{2}{3} = \frac{20}{12}$; $\frac{9}{12}$ sind in $\frac{20}{12}$, wie 9 in 20, nämlich $2\frac{2}{9}$mal enthalten. $8 + 2\frac{2}{9} = 10\frac{2}{9}$; also 2c.

3) $37\frac{1}{2}$ ist das Wievielfache von $1\frac{1}{3}$?

Ausr. $37\frac{1}{2}$ ist das Sovielfache von $1\frac{1}{3}$, als $1\frac{1}{3}$ ist $37\frac{1}{2}$ enthalten ist. $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; 4 ist in 36 9mal, $\frac{4}{3}$ sind in 36 3mal so oft, 3×9 oder 27mal. Nun suche ich, wie oft $1\frac{1}{3}$ auch noch in $1\frac{1}{2}$ liegt.

$1^1/_3 = {}^8/_6$, und $1^1/_2 = {}^9/_6$; ${}^8/_6$ in ${}^9/_6 = 8$ in $9 = 1^1/_8$; $27 + 1^1/_8 = 28^1/_8$. Also ist $37^1/_2 = 28^1/_8 \times 1^1/_3$.

Schriftlich.

Beisp. 1. Wie oft ist ${}^5/_8$ in ${}^7/_9$ enthalten?

a.

${}^5/_8$	${}^7/_9$
${}^{45}/_{72}$	${}^{56}/_{72}$
45	$56 = 1^{11}/_{45}$

b.

5	7
8	9
9	8
45	$56 = 1^{11}/_{45}$.

Die Brüche werden gleichnamig gemacht. Das geschieht auch, wenn man Zähler und Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des andern multiplicirt, den einen Bruch durch den Nenner des andern erweitert.

$${}^5/_8 \text{ durch } 9 \text{ erweitert} = {}^{45}/_{72}$$
$${}^7/_9 \text{ durch } 8 \text{ erweitert} = {}^{56}/_{72}.$$

Bei a wurde dieß vollständig ausgeführt und dann Zähler durch Zähler dividirt. Zu demselben Resultate führt das Verfahren bei b, wo bloß der Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des andern vervielfacht wurde.

Beispiel 2. Wie oft liegt ${}^{18}/_{19}$ in $27^3/_4$?

${}^{18}/_{19}$	$27^3/_4$
18	111
4	19
	999
	111
72	$2109 = 29^7/_{24}$

${}^{18}/_{19}$ durch 4 und ${}^{111}/_4$ durch 19 erweitert, gibt zwei gleichnamige Brüche, (76stel.) Da man dieß weiß, so multiplicirt man bloß den Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des andern und erhält so auch bloß die Zähler der beiden gleichnamigen Brüche.

Andere Weise.

1) ${}^7/_9 : {}^5/_8$! (${}^7/_9$ dividirt durch ${}^5/_8$.)

Wir dividiren ${}^7/_9$ zuerst durch den Zähler 5. Der 5. Theil von ${}^7/_9$ ergibt sich, wenn man den Nenner 9 mit 5 multiplicirt.

$${}^7/_9 : 5 = \frac{7}{9 \,.\, 5}$$

Da aber nur durch ${}^5/_8$, also nur durch den 8. Theil von 5 dividirt werden soll, so muß das Resultat 8mal so groß werden. Das 8fache eines Bruches ergibt sich, indem man den Zähler mit 8 multiplicirt. Also ist

$${}^7/_9 : {}^5/_8 = \frac{7 \,.\, 8}{9 \,.\, 5} = \frac{56}{45} = 1^{11}/_{45}.$$

Kurz: ${}^7/_9 : 5 = 7$ getheilt durch 5mal 9; ${}^7/_9 : {}^5/_8$ gibt 8mal so viel, also 8mal 7 getheilt durch 5×9.

Man stürzt den Divisor und multiplicirt dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

$$2)\ {}^{14}/_{15} : {}^{21}/_{25} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \times \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{3}{\cancel{21}}} = \frac{10}{9} = 1^1/_9.$$

3) $4^4/_7 : 2^2/_{11}$

$$\frac{32}{7} : \frac{24}{11} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}} \times 11}{7 \times \underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{44}{21} = 2^2/_{21}.$$

4) $6^2/_{15} \times 1^{27}/_{28} : 8^3/_{14}$

$$\frac{92}{15} \times \frac{55}{28} : \frac{115}{14} = \frac{\overset{4}{\cancel{92}} \times \overset{11}{\cancel{55}} \times \overset{2}{\cancel{14}}}{15 \times \underset{7}{\cancel{28}} \times \underset{23}{\cancel{115}}} = \frac{22}{15} = 1^7/_{15}.$$

§. 286. Aufgaben mit der benannten und angewandten Zahl.

1) Wie oft sind 2 Std. $37^1/_2$ Min. in 18 Std. 45 Min. enthalten?

2 Std. $37^1/_2$ Min.	18 Std. 45 Min.	$157^1/_2$	1125	
60	60	2	2	
$157^1/_2$ Min.	1125 Min.	315	2250	$7^1/_7$mal.
			2205	

$$\frac{45}{315} = \frac{9}{63} = \frac{1}{7}$$

2) Ein Oekonom rechnet für das Hektar $^9/_{10}$ hl Samengetreide. Wie viel Hektar kann er demnach mit $25^3/_4$ hl besäen?

Aufl. Mit $25^3/_4$ hl kann er so vielmal 1 Hektar besäen, als $^9/_{10}$ hl in $25^3/_4$ hl enthalten sind.

a. $25^3/_4 : {}^9/_{10}$

$$\frac{103}{4} : \frac{9}{10} = \frac{103 \times 10}{4 \times 9} = \frac{1030}{36} = 28^{11}/_{18} \text{ ha}$$

b.

0,9	25,75	
9	257,5	28,6111 . . . ha = 28 ha 61 a 11 qm.

§. 287. Gemeine und Decimalbrüche in Verbindung.

Fälle dieser Art sind bisher schon vorgekommen, jedoch nur vereinzelt. Hier soll eine Uebersicht der möglichen Verbindungen und der Behandlung derselben gegeben werden.

a. Addition und Subtraktion.

Die gemeinen Brüche werden in Decimalbrüche verwandelt.

1) $73{,}3788 + 19^3/_8 + 0{,}5982 + 25^3/_4$. 2) $46{,}7386 - 17^5/_6$.

Ausrechnung.

1) 73,3788	2) 46,7386	Genauer: 46,73860
19,375	—17,8333	—17,83333
0,5982	28,9053	28,90527
25,75		
119,102		

b. Multiplikation und Division.

Man gibt dem Decimalbruche den ihm zukommenden Nenner und verfährt dann wie mit gemeinen Brüchen, oder man läßt ihn unverändert

und verfährt, wie wenn die eine Zahl ein gemeiner Bruch und die andere eine ganze Zahl ist.

1) $74{,}427 \times {}^{7}/_{12}$!

a. $\frac{\overset{24809}{74427} \cdot 7}{1000 \cdot \underset{4}{12}} = \frac{173{,}663}{4000} = 43{,}41575.$ b. $\frac{\overset{24{,}809}{74{,}427} \cdot 7}{\underset{4}{12}} = \frac{173{,}663}{4}$

2) $3^3/_4 \times 5{,}23$!

a. $\frac{15 \cdot 523}{4 \cdot 100} = \frac{78{,}45}{400} = 19{,}6125.$ b. $\frac{15 \cdot 5{,}23}{4} = \frac{78{,}45}{4}$

3) Wie oft ist $1^5/_6$ in 9,78 enthalten?

a.

$1^5/_6$	$9^{78}/_{100}$	
11	978	
100	6	
1100	58,68	5,3372 . . .

b. $9{,}78 : 1^5/_6 = \frac{9{,}78 \cdot 6}{11} = \frac{58{,}68}{11}$
$= 5{,}337272 \ldots$

4) Dividire $198^1/_3$ durch 4,9!

a.

$4^9/_{10}$	$198^1/_3$	
49	595	
3	10	
147.	5950	$40^{10}/_{21}$

b. $198^1/_3 : 4{,}9$
$\frac{595}{3} : \frac{49}{10} = \frac{\overset{85}{595} \cdot 10}{3 \cdot \underset{7}{49}} = \frac{850}{21}$
$= 40{,}476 \ldots$

VI. Resolviren und Reduciren.

§. 288. Resolviren.

1 Tag = 24 Stunden, 2 Tage = 2 × 24 Std., 3 Tage = 3 × 24 Std.; 1 Std. = 60 Min., 2 Std. = 2 × 60 Min., 3 Std. = 3 × 60 Min. u. s. w.

Höhere Einheiten werden in niedere aufgelöst, wenn man sie mit der Währungszahl multiplicirt.

Verwandelt in Monate und Tage a. $^{57}/_{160}$ Jahre! b. 0,35625 J.!

a. $^{57}/_{160}$ J. = 57 J. : 160.

```
      × 12
      ----
       114
       57
160 | 684 M.  | 4 Mon.
    | 640     |
      ----
       44 × 30
160 | 1320 Tg. | 8 1/4 Tg.
    | 1280     |
      ----
       40
      ---- = 1/4
      160
```

b. 0,35625 J.

```
      × 12
  -----------
     71250
    35625
  -----------
   4,27500 M. = 4 Mon.
        30
  -----------
   8,250 Tg. = 8 1/4 Tg.
```

a. $^{57}/_{160}$ Jahre = 57 J. getheilt durch 160. Man verwandelt 57 J. in Monate und dividirt diese durch 160; den Rest verwandelt man in Tage und sucht auch von diesen den 160. Theil.

b. Dem ähnlich wird der benannte Decimalbruch aufgelöst. Die Division wird vollzogen, indem man die entsprechende Anzahl von Stellen abschneidet. Die zunächst sich ergebenden 4,275 Mon. denkt man sich in 4 + 0,275 Mon. zerlegt und verwandelt dann auch 0,275 Mon. in Tage.

§. 289. Reduciren.

24 Std. = 1 Tg.; so oft 24 Std. in einer Anzahl von Stunden enthalten sind, so viel Tage betragen diese. 60 Min. = 1 Std.; so oft 60 Min. in einer Anzahl von Minuten enthalten sind, so viel Stunden geben diese. Niedere Einheiten werden auf höhere zurückgeführt, indem man sie durch die Währungszahl dividirt.

1) 219 Tage sind so viel Jahre, als 365 Tage in denselben enthalten sind.

a.
$$73)\ \begin{array}{c|l} 365 & 219 \\ \hline 5 & 3 = {}^{3}/_{5} \text{ Jahre.} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{c|c|l} 365 & 219{,}0 & 0{,}6 \text{ J.} \\ & 2190 & \end{array}$$

2) $41^1/_2$ Min. sind so viel Std., als 60 Min. darin enthalten sind.

a.
$$\begin{array}{r|l} 60 & 41^1/_2 \\ 2 & 2 \\ \hline 120 & 83 = {}^{83}/_{120} \text{ Std.} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r|l} 60 & 41^1/_2 \\ 2 & 2 \\ \hline 12\not{0} & 8{,}3 = 0{,}69166\,.\,.\ \text{Std.} \end{array}$$

3) 37 Wch. 5 Tg. 18 Std. sind in einem Jahrbruche auszudrücken. Man verwandelt die Wochen und Stunden in Tage. 18 Std. = $^3/_4$ Tg.

a.
$$\begin{array}{r|l} & 37 \text{ Wch. } 5^3/_4 \text{ Tg.} \\ & 7 \\ \hline 365 & 264^3/_4 \text{ Tg.} \\ 4 & 4 \\ \hline 1460 & 1059 = {}^{1059}/_{1460} \text{ Jahr.} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r|l|l} & 37 \text{ Wch. } 5{,}75 \text{ Tg.} & \\ & 7 & \\ \hline 365 & 264{,}75 & 0{,}725342\,.\,.\,.\ \text{J.} \end{array}$$

Oder: Man löst die 37 Wch. 5 Tg. in Stunden auf, nimmt die 18 Std. dazu und führt die so erhaltene Anzahl von Stunden auf Jahre zurück.

37 Wch. 5 Tg. 18 Std. = 6354 Std.

$$6354 \text{ Std.} = \frac{6354}{24}\text{ Tg.} = \frac{\overset{1059}{\not{6354}}}{\underset{4}{\not{24}}.365}\text{ J.} = \frac{1059}{1460} = 0{,}725\,.\,.\ \text{J.}$$

4) Welchen Tagbruch bilden 14 Std. 42 Min. $37^1/_2$ Sekunden?

14 Std. 42 Min. $37^1/_2$ Sek. = $52957^1/_2$ Sek.

$$\frac{52957^1/_2 \text{ Sek.}}{\frac{105915}{2}}\ \text{Sek.} = \frac{\overset{7061}{\not{105915}}}{2.60.\not{60}.\underset{4}{24}} = \frac{7061}{11520} = 0{,}6129\,.\,.\ \text{Tage.}$$

Die $^{105915}/_2$ Sek. werden, durch 60 dividirt, in Minuten, diese, durch 60 dividirt, in Stunden und diese, durch 24 dividirt, in Tage verwandelt.

§. 290. Schlußrechnung.

1) $^1/_2$ ha Wiese wurde um 560 ℳ. verkauft; welchen Werth haben hiernach $3^1/_2$ ha?

Ausr. $3^1/_2 = {^7/_2} = 7 \times {^1/_2}$. Wenn also $^1/_2$ ha 560 ℳ. kostet, so kosten $3^1/_2$ ha 7×560 ℳ. = 3920 ℳ.

2) $6^1/_4$ kg zu 7,50 ℳ.; was kostet $^1/_4$ kg?

Aufl. Der wie vielte Theil von $6^1/_4$ ist $^1/_4$? Um das zu erkennen, so mache ich $6^1/_4$ zu 4tel. $6^1/_4 = {^{25}/_4}$; $^1/_4$ ist hievon der 25. Theil. Wenn also $6^1/_4$ oder $^{25}/_4$ kg 7 ℳ. 50 ₰. kosten, so kostet $^1/_4$ kg den 25. Theil von 7 ℳ. 50 ₰. = 30 ₰.

3) 1 Ctr. zu 19,75 ℳ.; wie berechnen sich $3^7/_8$ Ctr.?

a. $19{,}75 \text{ ℳ.} \times 3^7/_8 = \frac{1975 \times 31}{100 \times 8} = \frac{612{,}25}{8\cancel{0}\cancel{0}} = 76{,}53$ ℳ.

b. $19^3/_4 \times 3^7/_8 = \frac{79 \times 31}{4 \times 8} = \frac{2449}{32} = 76{,}53$ ℳ.

c.

1	Ctr.	=	19,75 ℳ.
3	Ctr.	=	59,25
$^1/_2$	„	=	9,875
$^1/_4$	„	=	4,937..
$^1/_8$	„	=	2,468..
$3^7/_8$	Ctr.	=	76,53$\cancel{0}$ ℳ.

4) Wie hoch kommt 1 hl, wenn $5^3/_4$ hl 159,85 ℳ. kosten?

Aufl. 1 hl kostet 159,85 ℳ., getheilt durch $5^3/_4$.

Ausr.

$5^3/_4$	$159^{85}/_{100}$ ℳ.
23	15985
100	4
23$\cancel{0}\cancel{0}$	639,40 = 27,80 ℳ.

Oder:

5,75	159,85 ℳ.
575	15985
	= 27,80 ℳ.

5) 100 ℳ. tragen in 1 Jahre $4^1/_2$ ℳ. Zins; wie viel Zins tragen 780 ℳ. in $2^2/_3$ Jahren?

a. $4^1/_2 \text{ ℳ.} \times 7{,}8 \times 2^2/_3 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 78 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2} \cdot 10 \cdot \cancel{3}} = \frac{93{,}6}{1\cancel{0}} = 93{,}6$ ℳ.

b. $4^1/_2 \text{ ℳ.} \times 7^4/_5 \times 2^2/_3 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 39 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{3}} = \frac{468}{5} = 93{,}6$ ℳ.

100 ℳ. tragen in 1 Jahre $4^1/_2$ ℳ. Zs. ($4^1/_2$ ℳ. notirt); 780 ℳ. tragen in 1 Jahre 7,8mal $4^1/_2$ ℳ., also $4^1/_2$ ℳ. multiplicirt mit 7,8; und in $2^2/_3$ J. tragen sie $2^2/_3$mal so viel als in 1 Jahre, also $2^2/_3$mal 7,8mal $4^1/_2$ ℳ.

Aufg. z. Kopf- und Zifferr.

Zeitrechnung.

§. 291. Die Zeit und die Eintheilung derselben.

Die Zeit fließt gleichmäßig dahin. Sie hat (wie die mathematische oder bloß gedachte Linie) nur die einzige Ausdehnung in die Länge, d. h. ihre Theile sind nicht zugleich vorhanden, sondern sie folgen nach oder auf einander. Die Eintheilung der Zeit in gewisse Zeitabschnitte hat hauptsächlich in der Bewegung der Erde ihren Grund.

1) Die scheinbare Umdrehung der Sonne um die Erde, oder eigentlich die Bewegung der Erde um ihre eigene Achse, wodurch Tag und Nacht entsteht, bildet einen Zeitabschnitt, den man den „Sonnentag" oder auch bloß „Tag" nennt. Den Anfangspunkt desselben hat man in die Mitte der Nacht gesetzt. Der Tag beginnt Nachts 12 Uhr und dauert über Mittag bis wieder Nachts 12 Uhr.

Den Tag theilen wir in 24 Stunden von gleicher Länge, jede Stunde wieder in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden.

Sieben Tage zusammen bilden eine Woche.

2) Die Zeit, innerhalb welcher sich die Erde um die Sonne bewegt, nennt man ein Jahr. Bei diesem Laufe dreht sich die Erde $365^{242255}/_{1000000}$mal um sich selbst. Das Jahr hat also 365 ganze und 242255 Millionteltage oder 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und nahe 51 Sekunden. Weil wir aber im gemeinen Leben nur nach ganzen Tagen rechnen können, so nimmt man für das gewöhnliche oder gemeine Jahr 365 Tage an. Die übrigen 5 Stunden 48 Minuten 51 Sekunden werden immer nach 4 Jahren, bis wohin sie 1 Tag — 44 Minuten 36 Sekunden zusammen machen, in den Monat Februar als der 24ste eingeschaltet. Dadurch erhält derselbe 29 und das treffende Jahr, Schaltjahr genannt, 366 Tage. Die Schaltjahre sind daran erkennbar, daß die Einer und Zehner der Jahreszahl durch 4 theilbar sind. 1852, 1856, 1860 ꝛc. sind also Schaltjahre, die dazwischen liegenden Jahre sind gemeine.

Auf die einzelnen Tage des Jahres hat man die Namen von Personen übertragen, daher die Namenstage. Die Jahre selbst bezeichnet man durch Ordnungszahlen. In der Christenheit nennt man das Jahr, das mit dem Tage der Geburt Jesu Christi eintrat, das erste Jahr oder das Jahr 1, das darauf folgende Jahr das zweite oder das Jahr 2 ꝛc. Das Jahr 1878 ist daher das 1878ste nach Chr. Geb.; folglich sind bis zu diesem Jahre bereits 1877 volle Jahre abgelaufen. Um also aus einer Jahreszahl die Anzahl aller bis dahin (seit Chr. Geb.) breits verflossenen Jahre zu erhalten, so muß man dieselbe um 1 vermindern.

3) Unsere Eintheilung der Zeit nach Monaten ist von der Umlaufszeit des Mondes um die Erde entlehnt. Diese Umlaufszeit, während welcher der Mond seinen ganzen Lichtwechsel von Neumund zu Neumond durchmacht, beträgt 29 T. 12 St. 44 M.; 12 solche Zeitperioden bildeten in der alten Römerzeit ein Jahr. Das Mondenjahr ($354^1/_3$ T.) war aber gegen das Sonnenjahr ($365^1/_4$ T.) beinahe um 11 Tage zu kurz. Julius Cäsar schaffte daher im römischen Reiche die Eintheilung nach dem Mondlaufe ab und ließ den Lauf der Sonne zur Feststellung der Jahreslänge

allein anwenden. Die Abschnitte der Monate und deren Namen (bis auf Quintilis und Sextilis, an deren Stelle Julius und Augustus kamen) behielt man bei. Sie verloren aber die Gleichheit ihrer Länge. Die 365 Tage wurden in folgender, bis jetzt unveränderter Weise auf die Monate vertheilt:

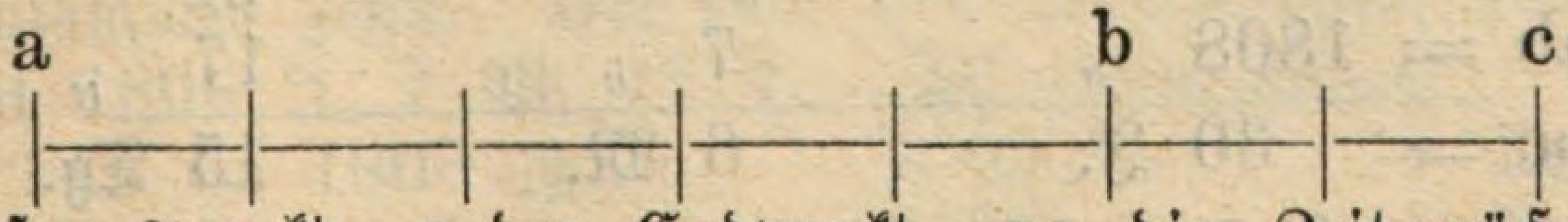
Januar,	der 1. M. = 31 Tg.	Juli,	der 7. M. = 31 Tg.
Februar,	der 2. M. = 28 Tg.	August,	der 8. M. = 31 Tg.
	in Schaltjahren 29 Tg.	Septbr.,	der 9. M. = 30 Tg.
März,	der 3. M. = 31 Tg.	Oktober,	der 10. M. = 31 Tg.
April,	der 4. M. = 30 Tg.	Novbr.,	der 11. M. = 30 Tg.
Mai,	der 5. M. = 31 Tg.	Dezbr.,	der 12. M. = 31 Tg.
Juni,	der 6. M. = 30 Tg.		

Dieß ist dem Gedächtnisse recht tüchtig einzuprägen. Dann gebe man Fragen folgender Art so lange, bis die Antwort rasch erfolgt.

1) Welcher Monat folgt auf den Februar? auf den Oktober? ꝛc.
2) Welcher Monat steht vor dem März? vor dem August? ꝛc.
3) Zwischen welchen 2 Monaten ist der April? der November? ꝛc.
4) Wie heißt der erste, 3te, 8te, 6te, ꝛc. Monat des Jahres?
5) Der wievielte Monat im Jahre ist der Mai? der August? ꝛc.
6) Wie viele Monate sind vor dem April? vor dem Juni? ꝛc.
7) Wie viele Tage hat der Januar? der März? ꝛc.
8) Welche Monate haben 30 Tage? welche haben 31?
9) Nennt Jahre, da der Februar nur 28 Tage hat? — Jahre, da derselbe 29 Tage zählt?
10) Wie viele Monate und Tage des Jahres sind am 23. April verflossen? (Der 23. April ist der 23. Tag des 4. Monats; also sind bis dahin 3 Monate und 22 Tage abgelaufen.)
11) Wie viele Jahre, Monate und Tage sind am 25. August 1853 seit Chr. Geb. verflossen? (Der 25. August 1853 ist der 25. Tag des 8. Monats vom Jahre 1853; also sind bis zu diesem Tag abgelaufen (1853—1=) 1852 Jahre, (8—1=) 7 Monate und (25—1=) 24 Tage.)
12) In welchem Jahre, Monate und Tage stand man, als seit Christi Geb. 1845 Jahre 10 Monate und 18 Tage verflossen waren? (Man stand im Jahre 1846, im 11. Monat dieses Jahres und im 19. Tage dieses Monats, d. i. im 19. November 1846.)

§. 292. Berechnung der Zeitdauer.

Die Zeit ist unendlich. Jeder Zeitabschnitt aber hat einen Anfang und ein Ende und läßt sich wie hier durch eine Linie darstellen.



a ist der Anfangspunkt, c der Endpunkt, ac die Zeitgröße oder Zeitdauer selbst. Diese ist bei b in zwei ungleiche Theile (ab und bc) getheilt. In Folge dessen haben wir jetzt 3 verschiedene Zeiträume vor

uns: ab, bc und ac. Sind zwei dieser Größen gegeben, so läßt die dritte sich durch Rechnung finden.

Ist das Ganze ac (= 7 und der Theil ab (= 5) gegeben, so finde ich den Theil bc, indem ich den bekannten Theil vom Ganzen wegnehme. 7—5 = 2; bc = 2.

Ist das Ganze ac und der Theil bc gegeben, so finde ich den Theil ab, indem ich vom Ganzen den Theil bc abziehe. 7 — 2 = 5; ab = 5.

Sind endlich die beiden Theile ab und bc bekannt, so finde ich das Ganze, indem ich die beiden Theile zusammenzähle. 5 + 2 = 7; ac = 7.

Aehnliche Aufgaben noch mehr. Z. B. Es sei ac = 50 J., und ab = 35 J.; wie groß ist bc? — Es sei ac = 36 J., und bc = 18 J.; wie groß ist ab? — Es sei ab = 36 J., und bc = 25 J.; wie groß ist ac? Dann:

Als Karl der Gr. zur Regierung kam, waren seit Christi Geburt 767 J. verflossen, und als er starb, 813 J.; wie lange hat er regiert? Wie viele Jahre sind jetzt (1878) seit Chr. Geb. verflossen? (1877 J.) Vor 550 Jahren hat Schwarz das Schießpulver erfunden; welcher Zeitraum liegt zwischen Chr. Geb. und dieser Erfindung? — 1396 J. nach Chr. Geb. wurde Guttenberg zu Mainz geboren; als er 44 J. als war, erfand er die Buchdruckerkunst; wann also?

Ein Mann ist am 18. August 1809 geboren und am 4. März 1840 gestorben. Wie alt ist er geworden?

A. Mündlich.

Vom 18. August 1809 bis 18. August 1839 sind 30 Jahre, vom 18. August 1839 bis 18. Februar 1840 sind 6 Monate, und vom 18. Februar bis 4. März sind 11 + 4 = 15 Tage. Also ist der Mann 30 J. 6 M. und 15 Tg. alt geworden.

B. Schriftlich.

1. Jan.	18. Aug.	4. März
a|————————————	|————————	|c
1	1809	1840

Das Alter des Mannes besteht in dem Zeitabschnitte, der zwischen seiner Geburt und seinem Tode liegt, ist also = bc; bc = ac — ab. Der 18. August des Jahres 1809 ist aber nicht der Zeitraum ab selbst, sondern nur dessen Endpunkt. Er beträgt aber 1808 J. 7 M. 17 Tg. — Ebenso ist der 4. März des Jahres 1840 nur der Endpunkt von ac. Der Zeitraum ac selbst = 1839 J. 2 M. 3 Tg. Nun ziehe ich ab von ac ab.

		12	29
ac =	1839. J.	2. M.	3 Tage
		13	32
ab =	1808 „	7 „	17 „
bc =	30 J.	6 M.	15 Tg.

17 Tage von 3 Tagen abzuziehen, geht nicht. Ich entlehne mir 1 Monat und zwar den Monat, welcher dem März zunächst vorangeht, d. i.

den Februar. Der Februar des Jahres 1840 = 29 Tg.; 29 + 3 = 32 Tg.; 32 — 17 = 15 Tg.; 7 Monat von 1 Monat hinwegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher 1 J.; 1 J. = 12 M.; 12 + 1 M. = 13 M.; 13 M. — 7 M. = 6 Monat. 1838 — 1808 = 30 J. Also beträgt das Alter des Verstorbenen 30 J. 6 Mon. und 15 Tage.

Die Schüler berechnen nun auch ihr eigenes Alter.

Damit schließt das Pensum aus der Zeitberechnung für die Volksschule ab. Das Folgende ist für höhere Lehranstalten.

§. 293. Berechnung des Anfangspunktes.

A starb am 4. März 1840 in einem Alter von 30 Jahren 6 M. und 15 T. Wann war derselbe geboren?

```
                                30. 6. 15.    4. März
a|------------------------------|-------------|c
                                b             1840
```

c ist der Todestag und bc die Lebzeit des A; b ist daher der Zeitpunkt seiner Geburt. Von demselben ist zu suchen, in welchem Jahre, Monate und Monatstag er liegt. Dieß ergibt sich, wenn man weiß, wie viele volle Jahre, Monate und Tage von a bis b verflossen sind. Das aber wird gefunden, wenn man A's Alter von der Zeit, die zwischen seinem Tode und Chr. Geburt enthalten ist, abzieht. Bis zum 4. März 1840 beträgt die abgelaufene Zeit 1839 Jahre 2 Mon. und 3 Tage. Ich rechne daher:

		12	29
ac =	1839. J.	2. M.	3 Tage
		13	32
bc =	30 „	6 „	15 „
ab =	1808 J.	7 M.	17 Tg.

Bis zum Zeitpunkt der Geburt des A waren demnach verflossen 1808 J. 7 M. 17 Tg. Also fällt dessen Geburtszeit in das Jahr 1809 und zwar auf den 18. Tag des 8. Monats dieses Jahrs, d. i. auf den 18. August 1809.

§. 294. Berechnung des Endpunktes.

A wurde am 18. August 1809 geboren und erreichte ein Alter von 30. J. 6 M. 15 Tg. Wann starb derselbe?

```
                                18. August.  30. 6. 15.
a|------------------------------|-------------|c
                                1809
```

Dieß ergibt sich, wenn man weiß, wie viele Jahre, Monate und Tage von a bis c abgelaufen sind. Das aber wird gefunden, wenn man die Zeit, welche bei der Geburt des A verflossen war (ab), und seine Lebenszeit (bc) zusammen zählt. Bis zum 18. August 1809 beträgt die abgelaufene Zeit 1808 J. 7 M. 17 T. Ich rechne daher:

ab =	1808 J.	7 M.	17 Tage
bc =	30 J.	6 M.	15 Tage
ac =	1839 J.	2 M.	3 Tage.

15 + 17 Tage = 32 Tage. Um wissen zu können, wie viele Tage auf den Monat zu rechnen sind, muß ich erst die Monate addiren. 7 + 7 = 13 M. = 1 J. + 1 Monat (Januar). Der von den Tagen herüber zu zählende Monat ist demnach der Februar.

Dieser Monat hat aber entweder 28 oder 29 Tage, je nachdem er zu einem gemeinen oder zu einem Schaltjahre gehört. Also muß ich auch erst die Jahre zusammenzählen. 1 + 30 + 1808 = 1839. Der Februar gehört demnach zum Jahre 1840, hat also 29 Tage. Nun erst kann ich die Tage ins Reine bringen. 32 Tage = 29 + 3 Tage = 1 Monat + 3 Tage.

Als A starb, waren also 1839 J., 2 M. und 3 Tage abgelaufen; der Zeitpunkt seines Todes fällt darum auf den 4. März 1840.

Aufgaben.

1) Maximilian Joseph I., der biedere und von seinem Volke hochverehrte König von Bayern, starb nach einer ruhmreichen Regierung von 26 J. 7 M. und 26 Tg. am 13. Oktober 1825. Wann war derselbe auf den Thron gelangt?

2) Wann ist König Ludwig II. geboren, welcher, 18 Jahre 6 Mon. und 14 Tage alt, am 10. März 1864 die Regierung antrat?

3) Am 29. Mai 1453 wurde Konstantinopel durch die Türken und 353 Jahre 10 M. 14 Tg. früher Jerusalem durch die Kreuzfahrer erobert. Wann ist Letzteres geschehen?

4) Der französische Kaiser Napoleon I. ward am 15. August 1769 zu Ajaccio auf Korsika geboren und hatte ein Alter von 51 J. 8 M. und 20 Tgn. erreicht, als er auf der Insel Sanct Helena verschied. Wann starb derselbe?

5) Die beiden großen Schlachten, welche über Napoleon's I. Geschick entschieden, fielen bei Leipzig und bei Waterloo vor. Erstere war am 18. Oktober 1813, letztere 1 Jahr 8 Monate später? Wann war diese?

6) Straßburg wurde am 30. Sept. 1681 von den Franzosen besetzt und nach 188 J. 11 Mon. 29 T. von denselben wieder geräumt. Wann geschah Letzteres?

Sechster Cursus.

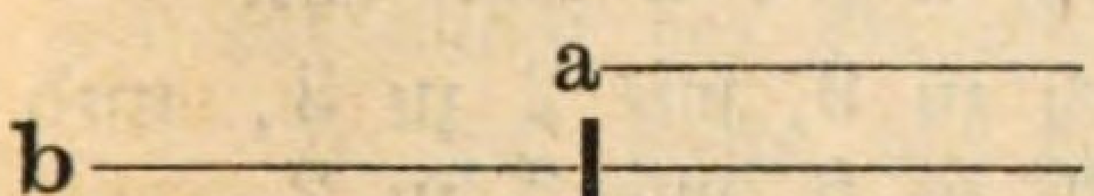
Verhältnißrechnungen.

Erste Abtheilung.

Verhältnißbestimmungen.

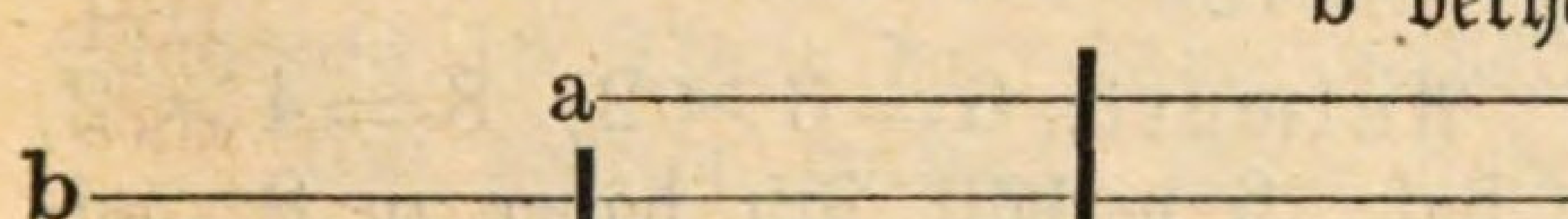
§. 295. Das Verhältniß.

Anschauen und Sprechen.



a ist 1 Theil, wie b 2 Theile hat.
b hat 2 Theile, wie a 1 Theil ist.

Man sagt daher: a verhält sich zu b, wie 1 zu 2, und
b verhält sich zu a, wie 2 zu 1.



a hat 2 Thl., wie b 3 Thl. hat.
b hat 3 Thl., wie a 2 Thl. hat.

Man sagt daher: a verhält sich zu b, wie 2 zu 3, und
b verhält sich a, wie 3 zu 2.

Fragen und Aufgaben.

1) Was heißt: Eine Linie verhält sich zu einer andern, wie 1 zu 4? — Wann kann man sagen: Eine Linie verhält sich zu einer andern, wie 3 zu 4? — Hier ist ein Strich; mache einen andern, zu dem sich der gegebene verhält, wie 4 zu 5! (Der gegebene Strich wird in 4 gleiche Theile getheilt und der gesuchte 5mal so groß gemacht, als 1 Theil ist.) — Mache zwei Striche, die sich verhalten, wie 3 zu 5! — Zwei andere, die sich verhalten, wie 4 zu 7!

2) Zeichne ein Rechteck, an welchem sich die Breite zur Länge verhält wie 5 zu 8! (Der Schüler zieht eine wagrechte Linie, theilt sie in 8 gleiche Theile und nimmt 5 derselben zur Breite oder Höhe.) Zeichne ein Rechteck nach demselben Verhältnisse, jede Seite aber zweimal so groß, als zuvor! — Noch eines, jede Seite nur halb so groß!

3) Dieß Fenster ist 7 dm br. und 12 dm hoch; ich will es im verkleinerten Maßstabe an die Wandtafel zeichnen, und für das Decimeter ein Centimeter annehmen; wie breit und hoch werde ich es machen müssen?

Eine Zimmerthür ist 18 dm hoch und 8 dm breit; wie muß ich die Zeichnung davon machen, das Decimeter zu 1 cm angenommen?

§. 296. Das Zahlenverhältniß.

a. Durch unmittelbare Auffassung.

Anschauen und Sprechen.

• • $2=1\times2$ } 2 ist 1 Theil, wie 4 2 Theile hat;
• • | • • $4=2\times2$ } 4 hat 2 Th., wie 2 1 Theil ist.

Man sagt daher: 2 verhält sich zu 4, wie 1 zu 2, und 4 verhält sich zu 2, wie 2 zu 1.

• • | • • $4=2\times2$ } 4 hat 2 Thl., wie 6 3 Thl. hat, und
• • | • • | • • $6=3\times2$ } 6 hat 3 Thl., wie 4 2 Thl. hat.

Man sagt daher: 4 verhält sich zu 6, wie 2 zu 3, und 6 verhält sich zu 4, wie 3 zu 2.

• • • $3=1\times3$ } 3 ist 1 Thl., wie 6 2 Thl. hat, und
• • • | • • • $6=2\times3$ } 6 hat 2 Thl., wie 3 1 Thl. ist.

Man sagt daher: 3 verhält sich zu 6, wie 1 zu 2, und 6 verhält sich zu 3, wie 2 zu 1.

• • • | • • • $6=2\times3$ } 6 hat 2 Thl., wie 9 3 Thl. hat, und
• • • | • • • | • • • $9=3\times3$ } 9 hat 3 Thl., wie 6 2 Thl. hat.

Man sagt daher: 6 verhält sich zu 9, wie 2 zu 3, und 9 verhält sich zu 6, wie 3 zu 2.

Fragen und Aufgaben.

a. Wie verhält sich 6 zu 8? Antwort: $6=3\times2$, $8=4\times2$, 6 hat also 3 Thl., wie 8 4 Theile hat; 6 verhält sich daher zu 8, wie 3 zu 4. — In welchem Verhältnisse steht 15 zu 10? Antw.: Das gemeinschaftliche Maß ist 5; $15=3\times5$; $10=2\times5$: 15 hat also 3 Thl., wie 10 2 Thl. hat; daher verhält sich 15 zu 10, wie 3 zu 2. — Dergleichen Aufgaben mehr!

Nennt mir 2 Zahlen, die sich verhalten, wie 1 zu 2! (2 und 4, 3 und 6, 4 und 8 &c.) Zwei Zahlen, die sich verhalten, wie 1 zu 3! wie 1 zu 4! wie 2 zu 3!

b. Wie verhalten sich, in ganzen Zahlen ausgedrückt: $^8/_{13}$ zu $^9/_{13}$? Der Bruch $^8/_{13}$ hat 8 Theile, wie der Bruch $^9/_{13}$ 9 Theile hat; $^8/_{13}$ verhalten sich daher zu $^9/_{10}$ wie 8 zu 9

0,17 zu 0,25! 17 h sind 17 Theile, wie 25 h 25 Theile sind; 17 h verhalten sich daher zu 25 h wie 17 zu 25.

Gleichnamige Brüche verhalten sich wie ganze Zahlen.

$^8/_{13}$ zu $^{12}/_{13}$! $^8/_{13}$ verhalten sich zu $^{12}/_{13}$ wie 8 zu 12 oder wie 2 zu 3.

0,75 zu 0,90! 75 h verhalten sich zu 90 h wie 75 zu 90 oder wie 5 zu 6.

c. Wie verhält sich $^1/_2$ zu $^1/_4$? Antwort: $^1/_2={}^2/_4$; $^1/_2$ hat also 2 Th., wie $^1/_4$ 1 Th. ist; $^1/_2$ verhält sich daher zu $^1/_4$ wie 2 zu 1. — Wie verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_5$? Antwort: $^1/_3 = {}^5/_{15}$, $^1/_5 = {}^3/_{13}$, $^1/_3$ hat also 5 Theile, wie $^1/_5$ 3 Theile hat; daher verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_5$ wie 5

zu 3. — Wie verhält sich $^1/_6$ zu $^1/_7$? Antwort: $^1/_6$ verhält sich zu $^1/_7$ wie $^7/_{42}$ zu $^6/_{42}$ oder wie 7 : 6. Hieraus folgt, daß Brüche mit dem Zähler 1 sich umgekehrt verhalten wie ihre Nenner.

In welchem Verhältniß steht 1 zu $1^1/_4$? Antwort: $1={}^4/_4$, $1^1/_4 = {}^5/_4$; 1 verhält sich also zu $1^1/_4$ wie 4 zu 5. — Wie ist das Verhältniß von $^3/_4$ und $^4/_5$? Antwort: $^3/_4 = {}^{15}/_{20}$, $^4/_5 = {}^{16}/_{20}$; mithin verhält sich $^3/_4$ zu $^4/_5$ wie 15 zu 16.

$1^2/_3$ zu $2^1/_2 = {}^5/_3$ zu $^5/_2 = {}^{10}/_6$ zu $^{15}/_6 = 10$ zu $15 = 2$ zu 3.

Wie verhält sich 10 zu 12,5? 10 Ganze = 100 z, und 12,5 = 125 z; 100 z verhalten sich zu 125 z wie 100 zu 125 oder wie 4 zu 5.

b. Durch Division.

Was muß ich thun, um zu finden, wie sich die Länge eines Stabes zur Länge eines Baumstammes verhält?

a. Ich messe sowohl den Stab, als den Stamm mit einem Maße, das auf beide angewendet werden kann, z. B. mit dem Meter. Ist der Stab 4 und der Stamm 64 Meter lang, so hat jener seiner Länge nach 4 Theile, wie dieser 64 Theile hat; die Länge des Stabes verhält sich daher zur Länge des Baumstammes, wie 4 zu 64 oder wie 1 zu 16.

b. Ich messe die Länge des Baumstammes mit dem Stabe selbst. Finde ich, daß die Länge des Stabes in der Länge des Stammes 16mal enthalten ist, so ist die Länge des Stabes 1 Theil, wie die Länge des Stammes 16 Theile hat; daher verhält sich jene zu dieser wie 1 zu 16.

Auf dieselbe zweifache Weise finde ich auch, wie sich eine Zahl zur andern, z. B. 12 zu 30 verhält.

a. Ich messe beide Zahlen durch ihr gemeinschaftliches Maß, nämlich durch 6; $12=2\times6$; $30=5\times6$; 12 hat also 2 Theile, wie 30 5 Theile hat; 12 verhält sich daher zu 30, wie 2 zu 5.

b. Ich betrachte die Zahl 12 selbst als das Maß und sehe zu, wie oft sie in 30 enthalten ist. 12 in $30 = 3^1/_2$; 12 ist also 1 Thl., wie 30 $2^1/_2$ Thl. hat; daher verhält sich 12 zu 30, wie 1 zu $2^1/_2$ oder wie $^2/_2$ zu $^5/_2$ oder wie 2 zu 5.

Wie sich zwei gegebene Zahlen zu einander verhalten, wird daher auch gefunden, wenn man eine davon als Maß annimmt und zusieht, wie oft sie in der andern enthalten ist. In diesem Fall ergibt sich zunächst, daß sich die als Maß gebrauchte Zahl zur andern verhält, wie Eins zu dem Quotienten.

12 in $24 = 2$; 12 ist also 1 Thl., wie 24 2 Theile hat; 12 verhält sich daher zu 24, wie 1 zu 2. Sowie 1 die Hälfte ist von 2, so ist 12 die Hälfte von 24, und sowie 2 das Doppelte ist von 1, so ist 24 das Doppelte von 2.

16 in $60 = 3^3/_4$; 16 ist also 1 Theil, wie 60 $3^3/_4$ Theile hat; daher verhält sich 16 zu 60, wie 1 zu $3^3/_4 = {}^4/_4$ zu $^{15}/_4 = 4$ zu 15; $15 = 3^3/_4 \times 4$, und $60 = 3^3/_4 \times 16$; 4 beträgt $^4/_{15}$ von 15, und 16 beträgt $^4/_{15}$ von 60.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie verhält sich 9 zu 72? 9 liegt in 72 8mal; 9 verhält sich daher zu 72, wie 1 : 8 (1 zu 8.) — In welchem Verhältniß steht 18 zu 6? 18 liegt in 6 $^1/_3$mal; 18 verhält sich daher zu 6, wie 1 zu $^1/_3$, in ganzen Zahlen ausgedrückt, wie 3 : 1. — Wie verhält sich 8 zu 44? 8 liegt in 44 $5^1/_2$mal; 8 verhält sich also zu 44, wie 1 : $5^1/_2$, in gleichen Theilen ausgedrückt, wie $^2/_2$: $^{11}/_2$, in ganzen Zahlen, wie 2 zu 11.

2) In welchem Verhältniß stehen

a. 10 m zu 25 m?	b. $1^1/_4$ Jahr zu $3^1/_3$ J.?
75 ₰. zu 1 ℳ.?	$2^1/_2$ Schck. zu $6^1/_4$ Schck.?
1,2 ℳ. zu 4,5 ℳ.?	48 Min. zu 2 Std.?
525 g zu 1 kg?	1 Std. 30 Min. zu $1^1/_4$ Std.?

c. 40 l zu 60 l? 40 m zu 60 m? 40 Liter zu 60 Meter?

60 Meter lassen sich nicht durch 40 Liter messen; Liter sind nicht in Meter enthalten; Liter und Meter sind Dinge verschiedener Art; ungleichartige Dinge können also nicht im Verhältniß zu einander stehen.

§. 297. Angewandt.

1) Wie ist das Verhältniß zwischen dem franz. Fr. und der Mark? Aufl. Der fr. Fr. = 80 ₰., die Mark = 100 ₰.; 80 = 4 × 20, und 100 = 5 × 20; der Fr. hat also 4 Theile, wie die Mark deren 5 hat; der fr. Fr. verhält sich daher zur Mark wie 4 zu 5.

2) In welchem Verhältniß stehen Silber und Gold zu einander, da das Pfund Silber = 90 ℳ. und das Pfund Gold = 1395 ℳ.?

Ausr.

	90	1395	
5)	18	279	
9)	2	31	$15^1/_2$

Der Werth des feinen Silbers verhält sich zum Werthe des feinen Goldes wie 2 zu 31. Das Gold steht also $15^1/_2$mal so hoch als das Silber.

3) Das Hektoliter Roggen kostet 15,75 ℳ., das Hektoliter Weizen 25,20 ℳ.; wie verhalten sich die Preise?

a. 15,75 ℳ. = 1575 Pfg.
25,20 ℳ. = 2520 Pfg.

	1575	2520
5)	315	504
9)	35	56
7)	5	8

b. 15,75 ℳ. = $15^3/_4$ ℳ.
25,20 ℳ. = $25^1/_5$ ℳ.

$15^3/_4$	$25^1/_5$	
63	126	
5	4	
1	2	
5	8	$1^3/_5$

Die Preise verhalten sich wie 5 zu 8; der Weizen steht also $1^3/_5$mal so hoch als der Roggen.

4) Ein Landmann säete auf ein Feld 1 hl $42\frac{1}{2}$ l und erntete 17 hl 10 l; wie verhalten sich Aussaat und Ernte?

1 hl $42\frac{1}{2}$ l = $142\frac{1}{2}$ l	$142\frac{1}{2}$	1710	
17 hl 10 l = 1710 l	2	2	
	285	3420	12

Aussaat und Ernte verhalten sich wie 1 : 12; die Ernte beträgt also das 12fache von der Aussaat.

5) Eine gewisse Arbeit wird von einem Manne in 5 Tg., von einer Frau in 8 Tg. vollendet; in welchem Verhältniß stehen die Kräfte?

Ausr. Die Kräfte verhalten sich, wie die Leistungen in gleicher Zeit. Der Mann braucht 5 Tg.; also fertigt er in 1 Tg. $\frac{1}{5}$. Die Frau braucht 8 Tg.; also fertigt sie in 1 Tg. $\frac{1}{8}$. Mithin verhält sich die Kraft des Mannes zu der Kraft der Frau, wie $\frac{1}{5}$ zu $\frac{1}{8} = \frac{8}{40}$ zu $\frac{5}{40}$ = 8 zu 5.

6) Das Faß A enthält 8 hl Wein à $18\frac{2}{5}$ ℳ, das Faß B 12 hl à $15\frac{1}{3}$ ℳ; in welchem Werthverhältniß steht der Wein des einen Fasses zu dem des andern?

A $8 \times 18\frac{2}{5}$ ℳ $= 147\frac{1}{5}$ ℳ	$147\frac{1}{5}$	184
B $12 \times 15\frac{1}{3}$ ℳ $= 184$ ℳ	5	5
	736	920
	92	$115 = 1\frac{1}{4}$.

Der Werth vom Fasse A verhält sich zu dem vom Fasse B, wie 1 zu $1\frac{1}{4}$ oder wie 4 zu 5. B ist also $1\frac{1}{4}$mal so viel werth als A, und A $\frac{4}{5}$mal so viel als B.

Aufgaben.

1) Das neue Pfund = 500 g, das alte Pfd. = 560 g; wie verhält sich jenes zu diesem? 2) A verdient sich wöchentlich 8,75 ℳ, B 10,50 ℳ; in welchem Verhältniß steht ihr Verdienst? 3) Von 2 Weinbergen ertrug der eine 12 hl 75 l, der andere 17 hl; wie ist das Verhältniß? 4) Ein Beamter, der 2250 ℳ Gehalt hatte, erhielt 450 ℳ Zulage; wie verhält sich sein jetziger Gehalt zu seinem früheren? 5) Ein Haus, das jährlich 64 ℳ zu unterhalten kostet, erträgt 380 ℳ Miethe; ein anderes, dessen Unterhaltungskosten = 80 ℳ, wirft 520 ℳ Miethe ab; wie verhält sich der Werth des einen Hauses zu dem des andern? 6) Eine Wiese ertrug 72 Ctr. Heu à 2,40 ℳ, eine andere 90 Ctr. à 2,15 ℳ; in welchem Verhältniß steht der Ertrag und also auch der Werth der einen Wiese zur andern? 7) A verdient in 30 Tg. 45 ℳ, B in 36 Tg. 63 ℳ; wie verhält sich der tägliche Verdienst beider?

§. 298. Verhältniß und Gleichung.

a. Das Verhältniß in eine Gleichung zu verwandeln.

Erstes Beispiel. Die bayr. Elle verhält sich zum Meter, wie 5 zu 6; die bayr. Elle hat also 5 Theile, wie das Meter deren 6 hat.

1 bayr. Elle |——|——|——|——|——|

1 Meter |——|——|——|——|——|——|

Was ergibt sich hieraus?

$\frac{1}{5}$ bayr. Elle = $\frac{1}{6}$ m

gleichnamig gemacht,

$\frac{6}{30}$ bayr. Elle = $\frac{5}{30}$ m

mit 30 multiplicirt,

6 bayr. Elle = 5 m

Zweites Beispiel. Die Würzb. Elle verhält sich zum Meter wie 7 : 12; sie hat also 7 Theile wie dieses 12.

1 Würzb. Elle |—|—|—|—|—|—|—|

1 Meter |—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|

Was ergibt sich hieraus?

$\frac{1}{7}$ Würzb. Elle = $\frac{1}{12}$ m

$\frac{12}{84}$ „ „ = $\frac{7}{84}$ „

12 „ „ = 7 „

Drittes Beispiel. 1 ℳ = 100 oder 5 × 20 ₰, 1 Fr. = 80 oder 4 × 20 ₰; es verhält sich daher die Mark zum Fr. wie 5 : 4; $\frac{1}{5}$ ℳ = $\frac{1}{4}$ Fr., $\frac{4}{20}$ ℳ = $\frac{5}{20}$ Fr., 4 ℳ = 5 Fr. — Oder: Das Produkt aus 100 × 80 ₰. durch 100 ₰. dividirt, gibt 80 ℳ; durch 80 ₰. dividirt, gibt es 100 Fr.; woraus folgt, daß 80 ℳ = 100 Fr., 4 ℳ = 5 Fr.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß die Zahlen, welche das Verhältniß zweier Dinge bezeichnen, umgestellt die Gleichung derselben ausdrücken.

b. Die Gleichung in ein Verhältniß zu verwandeln.

Dieß geht schon aus dem Vorigen hervor, soll jedoch in Kürze auch noch für sich behandelt werden.

1) 3 Nürnb. Ellen = 2 Meter; in welchem Verhältniß stehen beide Längenmaße zu einander?

3 N. Ellen |—|—|—|—|—|—|

2 Meter |—|—|—|—|—|—|

Die Nürnb. Elle hat 2 Theile, wie das Meter 3; es verhält sich daher auch jene zu dieser wie 2 zu 3.

2) 16 ℳ = 5 S. Rubel; also ist 1 ℳ = $\frac{5}{16}$ S. R.; die Mark hat 5 Theile, wie der Silberrubel deren 16 hat; sie verhält sich daher zum S.-Rubel wie 5 : 16. — Oder so: 16 ℳ = 1600 ₰; da 5 S. R. = 16 ℳ, so sind auch 5 S. R. = 1600 ₰, und 1 S. R. = 320 ₰; die Mark verhält sich daher zum S. Rubel wie 100 : 320 = 10 : 32 = 5 : 16.

Die Zahlen, welche eine Gleichung von 2 Dingen ausdrücken, bezeichnen, umgestellt das Verhältniß derselben.

§. 299. Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Der norweg. Speciesthlr. = 4,50 ℳ, der schwed. Reichsthaler = 1,20 ℳ; wie heißt, in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, das Verhältniß und die Gleichung?

Aufl. Der norweg. Speciesthlr. verhält sich zum schwed. Reichsthlr. wie 450 zu 120 = 45 : 12 = 15 : 4; also sind 4 norw. Speciesthlr. = 15 schwed. Rsthlr.

Probe: 4 norw. Spthlr. = 4 × 4,50 *M.* = 18 *M.*
15 schwed. Rsthlr. = 15 × 1,20 *M.* = 18 *M.*

2) 3 m Tuch kosten 11,25 *M.*, 4 m einer andern Sorte 25 *M.*; wie verhalten sich die Preise?

Aufl. Man sucht zuerst, was 1 Meter von beiden Sorten kostet. 3 m der ersten Sorte kosten 11,25 *M.*; 1 m kostet den 3. Theil von 11,25 *M.* = 3,75 *M.* Von der andern Sorte kosten 4 m 25 *M.*; 1 m kostet den 4. Theil, nämlich 6,25 *M.* Die Preise verhalten sich also wie 3,75 zu 6,25 = 375 : 625 = 15 : 25 = 3 : 5. Die zweite Sorte kostet $1^2/_3$mal so viel als die erste und diese $^3/_5$ von dem, was jene kostet.

3) In welchem Verhältniß steht die Arbeitskraft eines Mannes zur Arbeitskraft einer Frau, wenn 4 Männer in 9 Tagen eben so viel leisten, wie 6 Frauen in 10 Tagen?

Aufl. 1 Mann verrichtet in 9 Tagen $^1/_4$, in 1 Tag $^1/_{36}$ der Arbeit, 1 Frau dagegen in 10 Tagen $^1/_6$, in 1 Tag $^1/_{60}$ derselben. Die Arbeitskraft des Mannes verhält sich daher zur Arbeitskraft der Frau wie $^1/_{36}$: $^1/_{60}$ = 60 : 36 = 5 : 3.

4) 5 Pfd. Butter geben $3^3/_4$ Pfd. Schmalz; welches ist das Werthverhältniß? (5 Pfd. Butter = $3^3/_4$ Pfd. Schmalz; 1 Pfd. Butter = $^3/_4$ Pfd. Schm.; der Werth der Butter verhält sich also zu dem des Schmalzes wie $^3/_4$ zu 1 oder wie 3 : 4, d. i. 1 Pfd. Schmalz ist $1^1/_3$mal so viel werth, als 1 Pfd. Butter.)

5) 100 Pfd. Wiesenheu sind dem Futterwerthe nach = 90 Pfd. Kleeheu; wie sollen sich hiernach die Preise per Ctr. verhalten? (Da 100 Pfd. Wiesenheu = 90 Pfd. Kleeheu so steht das Wiesenheu zum Kleeheu, dem Futter- und Geldwerthe nach, im Verhältniß wie 90 zu 100 oder wie 9 zu 10; der Ctr. Kleeheu soll also $1^1/_9$mal so viel als der Ctr. Wiesenheu kosten.)

6) 200 Pfd. Kartoffeln sind dem Futterwerthe nach = 500 Pfd. Stoppelrüben: wie haben sich hiernach die Preise gleicher Quantitäten zu verhalten? (Der Preis der Kartoffeln zu dem der Stoppelrüben wie 5 zu 2.)

Zweite Abtheilung.

Regeldetri- oder Verhältnißrechnungen,

nach den Zahlen und Zahlenoperationen geordnet.

§. 300. Vorbemerkung.

Die sogenannten Regeldetri- oder Verhältniß-Aufgaben kommen nicht nur sehr häufig im Leben vor, sondern sie geben zugleich eine reiche Ausbeute des vorzüglichsten Bildungsstoffes. Dieses und der Umstand, daß bei

gewissen Arten derselben die Zahlen auf Gegenstände angewendet werden, welche eine besondere Betrachtung und Uebung nothwendig machen, sowie das Bedürfniß, für sie beim Zifferrechnen eine bestimmte, die Ausrechnung vereinfachende Form zu haben, ist der Grund ihrer besonderen Behandlung. Unsere Schüler sollen sich jetzt, um eine recht sichere Fertigkeit in der schriftlichen Berechnung der Verhältniß-Aufgaben zu erlangen, eine bestimmte Weise aneignen, die gegebenen Zahlen anzusetzen und die das verlangte Resultat erzielenden Operationen auszuführen. Bevor wir jedoch dazu übergehen, müssen wir uns für eine gewisse Form entscheiden. Denn da sich die Ausrechnung nach der Auflösung richtet und jede andere Auflösung eine andere Ausrechnung zur Folge hat; so sind für die schriftliche Berechnung der Verhältnißaufgaben eben so viele Formen möglich, als es für sie allgemein anwendbare Auflösungsweisen gibt. Wie vielfach aber die Auflösung und demzufolge auch die Ausrechnung einer an sich einfachen Verhältniß-Aufgabe sein kann, ist aus nachstehendem Beispiel zu ersehen.

Aufgabe: 4 m kosten 27 ℳ, was kosten 15 m?

Behandlung.

Erste Aufl. Ich gehe von 4 m auf 1 m und von 1 m auf 15 m.
Ausr. 4 m kosten 25 ℳ;
1 m kostet $^1/_4 \times 25$ ℳ $= 6^1/_4$ ℳ;
15 m kosten $15 \times 6^1/_4$ ℳ $= 93^3/_4$ ℳ

Zweite Aufl. So vielmal 4 m, so vielmal 25 ℳ; 15 m kosten daher so vielmal 25 ℳ, als 4 m in 15 m enthalten sind.
Ausr. 4 m in 15 m $= 3^3/_4$; $3^3/_4 \times 25$ ℳ $= 93^3/_4$ ℳ

Dritte Aufl. Ich zerlege die 15 m in $12 + 3$ oder in $3 \times 4 + 2 + 1$ m und berechne jeden Theil für sich.
Ausr. 4 m kosten 25 ℳ
12 oder 3×4 m kosten 3×25 ℳ $= 75$ ℳ
2 oder $^1/_2 \times 4$ m kosten $^1/_2 \times 25$ ℳ $= 12{,}5$
1 oder $^1/_2 \times 2$ m kostet $^1/_2 \times 12{,}5$ ℳ $= 6{,}25$
15 oder $3 \times 4 + 2 + 1$ m kosten also 93,75

Mit dieser Auflösung fällt dem Wesen nach zusammen, wenn ich 15 m betrachte als 16 m — 1 m.
16 oder 4×4 m kosten 4×25 ℳ $= 100$ ℳ
1 oder $^1/_4 \times 4$ m kostet $^1/_4 \times 25$ ℳ $= -6^1/_4$
15 oder 16 — 1 m kosten daher $93^3/_4$ ℳ

Wir sehen hier dreierlei wesentlich verschiedene Auflösungen und ebenso dreierlei Ausrechnungen. Es ist aber begreiflich, daß wir für das Zifferrechnen nicht mehr als eine Form zugleich einführen dürfen, und daß dieselbe längere Zeit ausschließlich und später wenigstens vorzugsweise angewendet werden müsse. Die Frage, welche Weise den andern vorzuziehen sei, ist übrigens leicht zu beantworten. Die erste Auflösung ist so einfach und natürlich, daß ihr unbestritten der Vorzug gebührt. Sie liegt der schriftlichen Rechnungsform zu Grunde, welche man die Zweisatzrechnung nennt, und welche sich dadurch auszeichnet, daß

sie ganz und gar dem Gedankengange entspricht, den auch der weniger Geübte einschlägt, um eine Aufgabe zu lösen; daß durch sie das schriftliche Rechnen in das rechte Verhältniß zu dem mündlichen kommt und in der That das, was es sein soll — ein in Ziffern dargestelltes Kopfrechnen wird; daß sie sich eng an das Vorausgegangene anschließt und so Einheit in den ganzen Lehrgang bringt; daß sie, indem sich der Schüler bei ihr Schritt für Schritt dem klar vor seinem Bewußtsein stehenden Ziele nähert, den formellen, wie den materiellen Rechnungszweck gleichmäßig fördert, und daß sie sich für die Aufgaben mit umgekehrten Verhältnissen eben so gut wie für die mit geraden eignet. Sie wird deßhalb auch von uns zuerst behandelt und zwar in zweifacher Weise.

Um dem von mehreren Seiten ausgesprochenen Wunsch zu genügen, so geben wir dann die Proportionsrechnung und später die Kettenrechnung.

Die Zweisatz- oder Schlußrechnung wird von Stufe zu Stufe durch die entsprechende Uebung im Kopfrechnen vorbereitet, und um Wiederholungen zu vermeiden, werden die beiden Formen der Zweisatzrechnung, welche wir zum Unterschiede „Zweisatz in Bruchform“ und „Zweisatz in Divisionsform“ nennen wollen, sogleich neben einander vorgeführt.

Die Zweisatz- oder Schlußrechnung.

A. Aufgaben mit einfachen geraden Verhältnissen.

§. 301. Mit einfach und gleichbenannten ganzen Zahlen.

a. Die gleichartigen Glieder haben kein gemeinschaftliches Maß.

Mündlich.

Beispiel: 8 kg Garn geben 52 m Leinwand; wie viel Meter Leinwand geben 7 kg Garn von derselben Sorte?

Auflösung: Gesucht soll werden, wie viele Meter Leinwand 7 kg Garn geben, und bekannt ist, wie viele Meter man von 8 kg erhält. a. Ich gehe von 8 kg auf 1 kg und von 1 kg auf 7 kg. Ausrechnung! b. Ich gehe von 8 kg auf 7 × 8 oder 56 kg und von 56 oder 8 × 7 kg auf 7 kg. Ausrechnung! c. 8 kg geben 52 m; so vielmal 8 kg, so vielmal 52 m. So oft also 8 kg in 7 kg enthalten sind, so vielmal 52 m geben diese. Ausrechnung! d. Ich zerlege 7 kg in Posten, welche einfache Theile von 8 kg sind, nämlich in 4 + 2 + 1 kg, und berechne jeden Posten für sich. e. Ich betrachte 7 kg als 8 kg — 1 kg. Ausrechnung!

Schriftlich.

Für 35 *M.* erhält man 8 m; wie viel kosten 13 m?

Fertigung des Ansatzes.

Was soll berechnet werden? „Berechnet soll werden, wie viel 13 m kosten.“ Was sagt uns, um es berechnen zu können, die Aufgabe? „Die Aufgabe sagt uns, was 8 m kosten.“ Nämlich? „8 m kosten 35 *M.*“ Also: „Berechnet soll werden, was 13 m kosten, und die Aufgabe sagt uns, was 8 m kosten.“

Im Sprechen fortfahrend:	Und zugleich schreibend:	
„8 m kosten 35 ℳ."	8 m	35 ℳ
„13 m, wie viel?"	13 m	?

Das ist der Ansatz. Er besteht aus zwei unter einander befindlichen Sätzen. Daher sein Name „Zweisatz". Der untere Satz ist der Fragesatz. Der obere Satz heißt „Bedingungssatz" und zwar deßhalb, weil man den Werth der 13 m nur dann, nur unter der Bedingung berechnen kann, wenn gegeben ist, wie viel eine andere Anzahl von Meter kostet.

Ausrechnung.

8 m	35 ℳ
1 m	$\frac{35 \text{ ℳ}}{8} = 4^3/_8$ ℳ
12 m	$13 \times 4^3/_8 = 56^7/_8$ ℳ $=$ 56 ℳ 88,5 ₰

8 m kosten 35 ℳ; 1 m kostet den 8. Theil davon, also 35 ℳ, getheilt durch $8 = 4^3/_8$ ℳ; 13 m kosten 13mal so viel, nämlich $13 \times 4^3/_8$ ℳ. Ausrechnung! — So zuerst; dann wie folgt:

Hauptrechnung.		Nebenrechnung.
8 m	35 ℳ	35 ℳ
13 m	?	13
8 m	35 ℳ	105
1 m	$\frac{35}{8}$ ℳ	35
		8 | 455 | 56,875 ℳ
13 m	$\frac{35 \times 13}{8}$ = 56 ℳ 87,5 ₰	

8 m kosten 35 ℳ; 1 m kostet den 8. Theil davon, also 35 ℳ, getheilt durch 8. Was sagt uns die Zahl 35 ℳ? (Was 8 m kosten.) Und was sagt uns der Ausdruck: 35 ℳ, getheilt durch 8? (Der sagt uns, was 1 m kostet.) Was kostet 1 m? (35 ℳ, getheilt durch 8.) Was kosten 2 m? Diese kosten 2mal so viel, also 2×35 ℳ getheilt durch 8.) Und 3 m? (3 m kosten 3×35 ℳ, getheilt durch 8.) Was kosten also 13 m? (13×35 ℳ, getheilt durch 8.) Ausrechnung: 13×35 ℳ $= 455$ ℳ; diese durch 8 getheilt $= 56{,}875$ ℳ $=$ 56 ℳ 87,5 ₰.

Wodurch unterscheidet sich diese Ausrechnung von der vorigen? Dort haben wir zuerst durch 8 getheilt und dann mit 13 multiplicirt; hier haben wir zuerst durch 13 multiplicirt und dann durch 8 getheilt.

Zusammengezogen.

8 m	35 ℳ		8 m	35 ℳ
13 m	?		13 m	?
8 m				
1 m				
13 m	$\frac{35 \times 13}{8}$			$\frac{35 \times 13}{8}$

Die Denk- und Sprechweise ist dieselbe. Ebenso die Nebenrechnung. Die Abkürzung besteht hier lediglich darin, daß man beim Schließen von der Mehrheit auf die Einheit und von der Einheit auf die Mehrheit immer mehr nur das notirt, was zuletzt zur Ausrechnung erforderlich ist. 8 m kosten **35 ℳ.** (**35 ℳ.** notirt); **1 m kostet den 8. Theil davon** (8 unter 35 ℳ. notirt); **13 m kosten 13mal so viel** (**13** neben 35 ℳ. notirt.)

Die Aufeinanderfolge der einzelnen Schlüsse wird von uns immer, wie hier oben (8 m, 1 m, 13 m) angedeutet. Anfangs notiren sich dieß auch die Schüler. Zu bestimmen, wie lange es ihnen zu gestatten sei, ist Sache des Lehrers. Doch können wir nicht umhin, zu bemerken, daß es in jedem Falle und zu jeder Zeit besser ist, einige Ziffern mehr, als einige weniger zu gebrauchen, wenn es eine größere Sicherheit in der Ausrechnung gewährt. Was man beim Rechnen will, das ist: das richtige Resultat und die sichere Ueberzeugung, daß das gefundene es sei. Einige Ziffern mehr oder weniger ist Nebensache. Sowie es mit einer Schule, wo die Schüler weniger schnell, aber durchaus richtig rechnen, besser steht, als mit einer andern, wo sie vielleicht doppelt so schnell, dabei aber zur Hälfte falsch rechnen: so ist auch ein etwas weitläufigeres Verfahren, sofern es dazu beiträgt, Fehler zu vermeiden, besser, als ein kürzeres, wobei leicht Irrungen stattfinden. Das Bestreben, die Kürze auf Kosten der Deutlichkeit und Sicherheit zu fördern, ist in unsern Schulen nicht am Platze.

Bei der vorstehenden Ausrechnung wurde der Zweisatz in **Bruchform** angewendet. Der Zweisatz in **Divisionsform**, welcher nun bei der nämlichen Aufgabe in Anwendung kommen soll, unterscheidet sich in nichts weiter von demselben, als in der Stellung der Glieder bei der Ausrechnung. In Bezug auf Ansatz und Schlußfolge fallen beide zusammen.

Ansatz und Ausrechnung.

8 m		14 ℳ.
13 m		?
8 m		14 ℳ.
1 m	8	
13 m		13
		42
		14
	8	182 | 22,75 ℳ.

9 **Meter kosten 14 ℳ.**
13 **Meter, wie viel?**

Ich gehe von 8 m auf 1 m und von 1 m auf 13 m.

8 m kosten 14 ℳ.; die 14 ℳ. setze ich auf die rechte Seite des senkrechten Striches.

1 m kostet den 8. Theil von 14 ℳ.; um den 8. Theil von 14 ℳ. zu erhalten, so muß ich die 14 ℳ. durch 8 theilen. Ich setze daher die 8 als Divisor auf die linke Seite und lese: 14 ℳ. getheilt durch 8.

13 m kosten 13mal so viel als 1 m; sie kosten also den 8. Theil von 14 m 13mal oder 13 × 14 ℳ. getheilt durch 8. Daher kommt 13 unter 14 ℳ.

Um den 8. Theil von 13 × 14 ℳ. zu erhalten, so muß ich die 14 ℳ. durch 13 multipliciren und das Ergebniß durch 8 theilen. 13 × 14 ℳ. = 182 ℳ.; 182 ℳ. durch 8 getheilt = 22,75 ℳ.

b. Die gleichartigen Glieder haben ein gemeinschaftliches Maß.

Beisp. In 24 Tg. verfüttert ein Landwirth 45 Centner Heu; wie viel in 36 Tagen?

Mündlich. a. Ich gehe von 24 Tg. auf 1 Tg. und von 1 Tag auf 36 Tage. Ausr.! b. Die Zahlen 24 und 36 haben mehrere gemeinschaftliche Maße, nämlich: 2, 3, 4, 6 und 12. Das größte derselben ist 12. Ich gehe daher von 24 Tg. auf 12 Tg. und von 12 Tg. auf 36 Tg. Ausr.! c. 36 Tage sind $1^1/_2 \times 24$ Tage; also wird in 36 Tagen auch $1^1/_2$mal so viel verfüttert, als in 24 Tagen. Ausr.!

Schriftlich.

a. Bruchform.

24 Tg.	45 Ctr.
36 „	x

24 Tg.
1 „
36 „

$$\frac{45 \cdot \overset{3}{\cancel{36}}}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{135 \text{ Ctr.}}{2} = 67{,}5 \text{ Ctr.}$$

b. Divisionsform.

24 Tg	45 Ctr.
36 „	?

24 Tg.		45
1 „	24	
36 „		~~36~~ 3
	2	135 Ctr.

In 24 Tg. verfüttert der Mann 45 Ctr.; in 1 Tag verfüttert er den 24. Theil davon, also 45 Ctr. getheilt durch 24. (Der nun mit Ziffern bezeichnete Ausdruck: „45 Ctr. getheilt durch 24“ sagt uns, wie viel der Mann in 1 Tg. verfüttert.) In 36 Tg. verfüttert er 36mal so viel, nämlich 36 × 45 Ctr., getheilt durch 24.

Wir erinnern uns, daß es vortheilhaft ist, den Divisor und den Dividenden gegen einander zu heben, und ein Blick auf die Zahlen zeigt, daß dieß hier geschehen kann. 24 und 36 sind durch 12 theilbar. Wir heben daher beide Zahlen durch 12 und haben dann nur noch mit dem 12. Theil von 24, d. i. mit 2, in den 12. Theil von 36 × 45, d. i. in 3 × 45 zu dividiren.

Da es zweckmäßig ist, beim schriftlichen Rechnen so viel als thunlich in allen Fällen ein gleiches Verfahren einzuhalten; so wird hier, wie überall, wo die gleichartigen Glieder ganze Zahlen sind, auf die Eins zurückgegangen. Dadurch ist es dem Rechner möglich, ohne langes Besinnen die Schlußkette zu vollenden. Ist dies geschehen, dann werden Divisor und Dividend durch gegenseitiges Heben gleichmäßig verkleinert. Das gilt als Regel. Damit jedoch die fähigeren Schüler, welche mit der Berechnung vor den andern fertig werden, ihre übrige Zeit nützlich verwenden, so kann man ihnen hier und in ähnlichen Fällen gestatten, die Berechnung auf eine zweite Weise auszuführen und dabei über das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gleichartig benannten Zahlen (hier über 12) zu schließen.

Außerdem kann man bei geeigneten Aufgaben auch noch andere Lösungen, bei der vorstehenden z. B. auch folgende anwenden lassen.

36 Tg. =	24 Tg.	45 Ctr.
	+ 12 „	22,5 „
	36 Tg.	67,5 Ctr.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr.

§. 302. Mit Brüchen.

a. Das mit der zu suchenden Zahl gleichartige Glied ist ein Bruch.

Mündlich.

1) Für 5 ℳ erhält man $^{7}/_{8}$ Ctr. einer Waare; wie v. für 12 ℳ?

Ausr. Für 5 ℳ erhält man $^{7}/_{8}$ Ctr.; für 1 ℳ erhält man den 5. Theil von $^{7}/_{8}$ Ctr. $= {}^{7}/_{40}$ Ctr.; für 12 ℳ erhält man $12 \times {}^{7}/_{40}$ Ctr. $= {}^{84}/_{40} = 2^{4}/_{40}$ oder $2^{1}/_{10}$ Ctr. = 2 Ctr. 10 Pfd.

2) Ein Bahnzug legt in 18 Min. $10^{1}/_{2}$ km zurück; wie viel in 30 Min.?

Ausr. Wenn der Bahnzug in 18 Minuten $10^{1}/_{2}$ km zurücklegt, so macht er in 6 Min. den 3. Theil von $10^{1}/_{2}$ km $= 3^{1}/_{2}$ km; legt der Zug in 6 Minuten $3^{1}/_{2}$ km zurück, so in 30 oder 5×6 Minuten $5 \times 3^{1}/_{2} = 15 + 2^{1}/_{2} = 17^{1}/_{2}$ km.

Schriftlich.

1) Ein Kapital gibt in 12 Mon. $93^{3}/_{4}$ ℳ Zs.; wie v. in 5 Mon.?

Berechnen soll ich, wie viel Zins ein Kapital in 5 Mon. gibt; die Aufgabe sagt, wie viel es in 12 Mon. trägt. In 12 Mon. (schreibend) trägt das Kapital $93^{3}/_{4}$ ℳ; in 5 Mon. trägt es x Mark. Steht:

12 Mon. $93^{3}/_{4}$ ℳ
5 „ x

12 M.	
1 „	$\frac{\overset{125}{\cancel{375}} \cdot 5}{4 \cdot \underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{625}{16} = 39{,}062\,..$ ℳ
5 „	

12 Mon. $93^{3}/_{4}$ ℳ
5 „ ?

12 M.	4	~~375~~ 125
1 „	4 ~~12~~	
5 „		5
	16	625 ℳ

Die gemischte Zahl wird eingerichtet. $93^{3}/_{4} = {}^{375}/_{4}$, d. i. 375 getheilt durch 4. Der Zähler 375 wird daher sogleich als Faktor des Dividenden, der Nenner 4 als Faktor des Divisors gesetzt. Nun geht es an's Schließen.

In 12 Mon. trägt das Kapital 375 ℳ Zins, getheilt durch 4; in 1 Mon. trägt es nur den 12. Theil davon (daher 12 als dividirendes Glied gesetzt), nämlich 375 ℳ, getheilt durch 12mal 4. Dieser Ausdruck sagt uns, wie viel Zins das Kapital in 1 Monat trägt. In 5 Mon. trägt es 5mal so viel Zins (5 als multiplicirendes Glied gesetzt), nämlich 5mal 375 ℳ, getheilt durch 12×4.

Fragen unter Hindeutung auf den Zahlenausdruck: Wie viel Zins trägt das Kapital in 12 Mon.? (375 ℳ getheilt durch 4.) Wie viel in 1 Monat? (375 ℳ getheilt durch 12×4.) Wie viel in 5 Mon.? (5mal 375 ℳ getheilt durch 12×4.)

2) 42 kbdm eines Stoffes wiegen 15,4 kg; wie viel wiegen 51 kbdm desselben?

Berechnen soll ich, wie viel 51 kbdm wiegen; die Aufgabe sagt, wie viel 42 kbdm wiegen. 42 kbdm (schreibend) wiegen 15,4 kg; 51 kbdm wiegen x kg. Steht:

42 kbdm	15,4 kg
51 „	x

$$\begin{matrix} 42 \text{ „} \\ 1 \text{ „} \\ 51 \text{ „} \end{matrix} \quad \frac{\overset{11}{\cancel{154}} \cdot \overset{17}{\cancel{51}}}{10 \cdot \underset{3}{\cancel{42}}} = \frac{18{,}7}{10}$$

$$= 18{,}7 \text{ kg}$$

42 kbdm	15,4 kg		
51 „	?		
42 „		10	~~154~~ 11
1 „	3 ~~42~~		
51 „			~~51~~ 17
		10	187

15,4 = $^{154}/_{10}$ = 154 getheilt durch 10. So viel wiegen 42 kbdm; 1 kbdm wiegt den 42. Theil davon (notirt), also 154 kg, getheilt durch 42mal 10; 51 kbdm wiegen 51mal so viel (notirt), nämlich 51mal 154 kg, getheilt durch 42 × 10.

3) Für 7,36 *M* erhält man 40 Stck.; was kosten 25 Stck.?

40 Stck.	7,36 *M*
25 „	x

$$\begin{matrix} 40 \text{ „} \\ 1 \text{ „} \\ 25 \text{ „} \end{matrix} \quad \frac{\overset{92}{\cancel{736}} \cdot \cancel{25}}{\underset{4}{\cancel{100}} \cdot \underset{5}{\cancel{40}}} = \frac{9{,}2}{2\cancel{0}}$$

$$= 4{,}6 \text{ M.}$$

40 Stck.	7,36 *M*		
25 „	?		
40 „	4 ~~100~~		~~736~~ 92
1 „	5 ~~40~~		
25 „			~~25~~
		20	92

b. Die gegebenen gleichartigen Glieder sind gleichnamige Brüche.

Mündlich.

1) Es bezahlt Jemand $^3/_{10}$ seiner Schuld mit 480 *M*; wie viel bleibt er schuldig? (1120 *M*)

Aufl. Wenn $^3/_{10}$ der Schuld bezahlt werden, so bleiben $^{10}/_{10}$ — $^3/_{10}$ = $^7/_{10}$ derselben im Rückstand. Die Aufgabe heißt also: $^3/_{10}$ = 480 *M*; wie viel betragen $^7/_{10}$?

Ich gehe von $^3/_{10}$ auf $^1/_{10}$ und von $^1/_{10}$ auf $^7/_{10}$.

Ausr. $^3/_{10}$ = 480 *M*; $^1/_{10}$ ist der 3. Theil von $^3/_{10}$; also beträgt $^1/_{10}$ den 3. Theil von 480 *M* = 160 *M*; $^7/_{10}$ sind 7 × $^1/_{10}$; sie betragen daher 7 × 160 *M* = 1120 *M*. Es bleiben somit noch 1120 *M* von der Schuld übrig.

2) Ein Fäßchen Wein von 37$^1/_2$ l kostet 32 *M*; wie hoch kommt ein anderes zu 22$^1/_2$ l von gleicher Sorte?

Aufl. 37$^1/_2$ l = $^{75}/_2$ l, und 22$^1/_2$ l = $^{45}/_2$ l. Die Aufgabe heißt jetzt: $^{75}/_2$ l kosten 32 *M*; was kosten $^{45}/_2$ l? Da 75 = 5 × 15, und 45 = 3 × 15, so gehe ich von $^{75}/_2$ l auf $^{15}/_2$ l und dann auf $^{45}/_2$ l. Wenn $^{75}/_2$ l 32 *M* kosten, so kosten $^{15}/_2$ l den 5. Theil von 32 *M* = 6$^2/_5$ *M*, und $^{45}/_2$ l kosten 3 × 6$^2/_5$ *M* = 18 + 1$^1/_5$ = 19$^1/_5$ *M* oder 19 *M* 20 *ϑ*.

3) 0,69 kg einer Waare werden mit 2,85 *M* bezahlt; wie hoch kommen 0,92 kg von derselben?

Ausr. 69 = 3 × 23, und 92 = 4 × 23. Ich schließe daher von 0,69 kg auf 0,23 kg und von da auf 0,92 kg. Wenn 0,69 kg 2 ℳ 85 ₰ kosten, so kosten 0,23 kg den 3. Theil von 2 ℳ 85 ₰; der 3. Theil von 270 + 15 ₰ = 90 + 5 = 95 ₰; 0,92 kg kosten 4mal so viel; 4 × 95 ₰ = 4 ℳ — 20 ₰ = 3,80 ℳ.

Schriftlich.

1) $^5/_8$ kg einer Waare kosten 2,4 ℳ, wie viel $3^3/_8$ kg?

Ansatz und Ausrechnung.

$^5/_8$ kg	2,4 ℳ
$3^3/_8$ „	x

$^5/_8$ kg, $^1/_8$ „, $^{27}/_8$ „: $\frac{24 \cdot 27}{10 \cdot 5} = \frac{64,8}{5\!\!/0} = 12,96$ ℳ.

$^5/_8$ kg	2,4 ℳ	
$3^3/_8$ „	?	
$^5/_8$	10	24
$^1/_8$	5	
$^{27}/_8$		27
		168
		48
	5Ø	64,8 ℳ

Denk- oder Sprechweise.

$^5/_8$ kg kosten 24 ℳ getheilt durch 10; $^1/_8$ kg ist der 5. Theil von $^5/_8$ kg und kostet daher auch nur den 5. Theil (notirt), also 24 ℳ, getheilt durch 5mal 10. So viel (als nun der Ausdruck bezeichnet) kostet $^1/_8$ kg; $^{27}/_8$ kg sind 27 × $^1/_8$ kg, sie kosten daher 27mal so viel (notirt), also 27mal 24 ℳ, getheilt durch 5 × 10.

2) 0,5 m Zeug zu 48 ₰; was kosten 0,9 m? (86,4 ₰.)

Erste Weise.

0,5 m	48 ₰
0,9 m	x

0,5 m, 0,1 m, 0,9 m: $\frac{48 \times 9}{5} = \frac{432}{5}$ ₰ = 86,4 ₰.

0,5 m	48 ₰	
0,9 m	?	
0,5 m		48
0,1 m	5	
0,9 m		9
	5	432 ₰

Zweite Weise.

Ø,5 m	48 ₰
Ø,9 m	x

5 m, 1 m, 9 m: $\frac{48 \cdot 9}{5}$

Dritte Weise.

0,5 m	48 ₰
0,9 m	?

5 dm, 1 dm, 9 dm: $\frac{48 \cdot 9}{5}$

Die Sache bedarf kaum einer Erklärung. Bei der ersten Weise wurden die gegebenen Zahlen mit ihrer Benennung (Zehntel-Meter) durchaus unverändert beibehalten.

Die zweite Weise beruht auf dem bekannten Satze: gleichnamige Brüche verhalten sich wie ganze Zahlen. Sowie 1 der 5. Theil von 5 ist, so ist $^1/_{10}$ der 5. Theil von $^5/_{10}$, und sowie 9 das 9fache ist

von 1, so sind $^9/_{10}$ das 9fache von $^1/_{10}$; 0,5 verhalten sich zu 0,9, wie 5 zu 9. Man streicht bei beiden Decimalen das Komma und verfährt dann wie mit ganzen Zahlen.

Bei der dritten Weise wurde während des Schließens für „Zehntelmeter" die Benennung „Decimeter" angewendet. Da dieß gleichbedeutende Ausdrücke sind, so haben die Zahlen ihren ursprünglichen Werth (0,5 m = 5 dm) behalten; aber sie treten aus ihrer Decimalform heraus und erscheinen als ganze Zahlen.

3) 0,45 hl zu 5,60 ℳ; was kosten 8,55 hl? (106,40 ℳ)

Erste Weise.

a.
0,45 hl — 5,60 ℳ
8,55 „ — x

$^{45}/_{100}$ hl
$^1/_{100}$ „
$^{855}/_{100}$ „

$$\frac{56 \cdot 855}{10 \cdot 45}$$

b.
0,45 hl — 5,60 ℳ
8,55 „ — ?

$^{45}/_{100}$ hl	10	56
$^1/_{100}$ „	45	
$^{855}/_{100}$ „		855

Die Zahl 8,55, welche aus 8 E und 55 h besteht, wird 855 h gelesen. Wir schließen also von 45 h auf 1 h und von 1 h auf 855 h. Zuvor aber vergleicht 1 h mit 45 h! (1 h ist der 45. Theil von 45 h.) Vergleicht nun wieder 855 h mit 1 h! (855 h sind 855mal so viel als 1 h.) Nun zur Ausführung! $^{45}/_{100}$ hl kosten 5,6 ℳ oder 56 ℳ getheilt durch 10; $^1/_{100}$ hl kostet den 45. Theil davon u. s. w.

Zweite Weise.

0,45 hl — 5,60 ℳ
8,55 „ — x

45 hl
1 „
855 „

$$\frac{5,6 \cdot 855}{10 \cdot 45}$$

Die beiden Vorderglieder sind gleichnamige Decimalzahlen und verhalten sich daher wie ganze Zahlen. Wir streichen bei denselben das Komma und schließen dann von 45 hl auf 1 hl u. s. w.

Dritte Weise.

0,45 hl — 5,60 ℳ
8,55 „ — x

45 l
1 l
855 l

$$\frac{56 \cdot 855}{10 \cdot 45}$$

Hundertel-Hektoliter sind Liter. Wir lesen daher: 45 l kosten 5,6 ℳ; was kosten 855 l? und schließen von 45 l auf 1 l und von 1 l auf 855 l.

4) 1,375 kg kosten $18^3/_4$ ℳ; wie viel 3,845 kg? (52,43 . . ℳ)

Erste Weise.

a.
1,375 kg — $18^3/_4$ ℳ
3,845 „ — x

$^{1375}/_{1000}$ kg
$^1/_{1000}$ „
$^{3845}/_{1000}$ „

$$\frac{75 \cdot 3845}{4 \cdot 1375}$$

b.
1,375 kg — $18^3/_4$ ℳ
3,845 „ — ?

$^{1375}/_{1000}$ kg	4	75
$^1/_{1000}$ „	1375	
$^{3845}/_{1000}$ „		3845

Zweite Weise.

1,375 kg — $18^3/_4$ ℳ
3,845 „ — ?

1375 kg
1 „
3845 „

$$\frac{75 \cdot 3845}{4 \cdot 1375}$$

Dritte Weise.

1,375 kg — $18^3/_4$ ℳ
3,845 „ — x

1375 g
1 g
3845 g

$$\frac{75 \cdot 3845}{4 \cdot 1375}$$

5) 45 kg kosten 7,2 M.; wie viel wird man für 18,5 M. erhalten? Antwort: 115,625 kg = 115 M. 62,5 ₰.

Erste Weise.

a.

7,2 M.	45 kg
18,5 „	x
72/10 M.	
1/10 „	$\frac{45 \cdot 185}{72}$
185/10 „	

b.

7,2 M.		45 M.
18,5 „		?
72/10 M.		45
1/10 „	72	
185/10 „		185

Zweite Weise.

7,2 M.	45 kg
18,5 „	x
72 M.	
1 „	$\frac{45 \cdot 185}{72}$
185 „	

Dritte Weise.

7,20 M.	45 kg
18,50 „	x
720 ₰.	
1 „	$\frac{45 \cdot 185\not{0}}{72\not{0}}$
1850 „	

Die als die dritte bezeichnete Art und Weise läßt sich hier, da wir an Münzeinheiten nur Mark und Pfennige und zwar mit der Währungszahl 100 haben, nicht ohne Weiteres anwenden. Um sie anwenden zu können, so müssen wir beide Vorderglieder durch Beifügen einer Null erst erweitern. Dann lesen wir sie als Pfennige.

Fragen wir nun, welche Weise von den drei bisher angewendeten besonders berücksichtigt zu werden verdiene; so dürfte als solche die dritte zu bezeichnen sein, aus folgenden Gründen:

In den Aufgaben, welche das Leben gibt, sind die Decimalzahlen gewiß ausnahmslos von der Art, daß sie ohne Weiteres mit der Benennung der Unterabtheilung (8,90 M. als 890 ₰., 24,60 hl als 2460 l) gelesen werden können. Dabei behalten die Zahlen ihren ursprünglichen Werth (8,90 M. = 890 ₰., 24,60 hl = 2460 l.), an die Stelle der Zehntel, Hundertel, Tausendtel treten ganze Zahlen, wodurch die Auffassung der Zahlenverhältnisse und somit auch das Schließen nicht unbedeutend erleichtert wird, und die Benennungen — man vergleiche Hundertelmark mit Pfennig, Hundertelhektoliter mit Liter, Tausendtelkilogramm mit Gramm — sind sehr einfach und ohnehin bekannt, so daß bei ihrer Anwendung auch der Schule Entwachsene in der Schlußrechnung sich leicht auszukennen vermögen.

c. Die gleichartigen Glieder sind ein Bruch und eine ganze Zahl.

Mündlich.

Beisp. 1. Wie theuer hat A sein Haus gekauft, wenn er sogleich 3/8 des Kaufpreises mit 1260 M. bezahlt? (3360 M.)

Aufl. Was soll gesucht werden? (Wie viel der ganze Kaufpreis beträgt.) Und was sagt uns die Aufgabe? (Wie viel 3/8 desselben betragen.) (Wie heißt hiernach die Aufgabe?) (3/8 der Kaufsumme = 1260 M.; wie viel beträgt die ganze Kaufsumme?) Wie schließt man von 3/8 auf das Ganze? (Ich gehe von 3/8 auf 1/8 und von 1/8 auf 1 oder 8/8.) Ausführung!

Beisp. 2. Das Hektoliter zu 48 M. 75 ₰.; wie berechnen sich $\frac{4}{5}$ desselben? (39 M.)

Aufl. Ich gehe von 1 hl auf $\frac{1}{5}$ hl und von $\frac{1}{5}$ auf $\frac{4}{5}$ hl. Ausrechn.!

Beispiel 3. A verdient in 1 Tag 1 M. 36 ₰., wie viel in $8\frac{3}{4}$ Tg.?

Aufl. a. Ich berechne zuerst, wie viel A in 8, und dann, wie viel er in $\frac{3}{4}$ Tg. verdient. In 8 Tg. verdient A 8 × 1 M. 36 ₰. = 8 M. + 2 M. 88 ₰. = 10 M. 88 ₰.. In $\frac{1}{4}$ Tag verdient A $\frac{1}{4}$ von 1 M. 36 ₰. = 34 ₰., in $\frac{3}{4}$ Tag also 3 × 34 ₰. = 1 M. 2 ₰.; 10 M. 88 ₰. + 1 M. 2 ₰. = 11 M. 90 ₰. — b. $8\frac{3}{4}$ Tg. = $\frac{35}{4}$ Tg. Ich gehe von 1 Tag auf $\frac{1}{4}$ Tg. und von $\frac{1}{4}$ Tg. auf $\frac{35}{4}$ Tg. — c. $8\frac{3}{4}$ = $8\frac{3}{4}$ × 1. Also verdient A in $8\frac{3}{4}$ Tg. $8\frac{3}{4}$ × 1 M. 36 ₰.

Beispiel 4. Wie ist der Centner angesetzt, wenn für $4\frac{4}{5}$ Ctr. 41 M. 52 ₰. zu bezahlen sind?

Aufl. $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$. Ich schließe von $\frac{24}{5}$ Ctr. auf $\frac{1}{5}$ Ctr. und von $\frac{1}{5}$ Ctr. auf 1 Ctr. Wenn $\frac{24}{5}$ Ctr. 41 M. 52 ₰. kosten, so kostet $\frac{1}{5}$ Ctr. den 24. Theil von 41 M. 52 ₰.; 24 = 4 × 6; der 4. Theil von 41 M. 52 ₰. = 10 M. 38 ₰., und der 6. Theil von 10 M. 38 ₰. = 1 M. 73 ₰. So viel kostet $\frac{1}{5}$ Ctr.; der ganze Centner kostet also 5 × 1 M. 73 ₰ = 8 M. 65 ₰.

Beispiel 5. A füttert seine Schafe mit $5\frac{3}{5}$ Ctr. Heu $\frac{2}{3}$ Monate lang; wie viel Heu braucht er für dieselben auf 6 Monate? ($50\frac{2}{5}$ Centner.)

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel Heu A in 6 Mon. verfüttert, und die Aufgabe sagt, wie viel er in $\frac{2}{3}$ Mon. braucht. a. Ich schließe von $\frac{2}{3}$ Mon. auf $\frac{1}{3}$ Mon., von $\frac{1}{3}$ Mon. auf 1 Mon. und von 1 Mon. auf 6 Monate. — b. Ich schließe von $\frac{2}{3}$ Mon. auf 2 Mon. und von 2 Mon. auf 6 Monate. $\frac{2}{3}$ Mon. sind der 3. Theil von 2 Mon.; also sind 2 Mon. 3 × $\frac{2}{3}$ Mon.; folglich verfüttert A in 2 Mon. 3 × $5\frac{3}{5}$ Ctr. = $16\frac{4}{5}$ Ctr., und in 6 oder 3 × 2 Mon. 3 × $16\frac{4}{5}$ Ctr. = $50\frac{2}{5}$ Ctr. — c. So oft $\frac{2}{3}$ Mon. in 6 Mon. enthalten sind, so vielmal $5\frac{3}{5}$ Ctr. Heu sind erforderlich. $\frac{2}{3}$ Mon. sind in 6 oder in $\frac{18}{3}$ Mon. 9mal enthalten; also sind die $5\frac{3}{5}$ Ctr. 9mal zu nehmen.

Beispiel 6. 3,2 m kosten 21 M. 44 ₰.; wie hoch kommen 8 m?

Aufl. a. Ich schließe von $\frac{32}{10}$ m auf $\frac{1}{10}$ m, dann auf 1 m, dann auf 8 m. Ausr. 32 = 8 × 4; $\frac{1}{4}$ von 21 M. 44 ₰. = 5 M. 36 ₰., und $\frac{1}{8}$ von 536 ₰. = 67 ₰. So viel kostet $\frac{1}{10}$ m; 1 m kostet 6,7 M., und 8 m kosten 8 × 6,7 M. = 53 M. 60 ₰. — b. 8 = 80 z = 64 z + 16 z = $2\frac{1}{2}$ × 32 z. Die 8 m kosten also $2\frac{1}{2}$ × 21 M. 44 ₰. = 42 M. 88 ₰. + 10 M. 72 ₰. = 53 M. 60 ₰.

Schriftlich.

1) Das Ar zu 9,45 M.; wie hoch kommen 3,60 a?

Erste Weise.		Zweite Weise.	
1,00 a	9,45 M.	1 a	9,45 M.
3,60 „	x	$3\frac{3}{5}$ a	x
100 qm 1 „ 360 „	$\frac{945 \,.\, 36\not{0}}{100 \,.\, 10\not{0}}$	1 a $\frac{1}{5}$ „ $\frac{18}{5}$ „	$\frac{945 \,.\, 18}{100 \,.\, 5}$

Dritte Weise.

Kostet 1 a 9,45 ℳ, so kosten 3,6 a 3,6 × 9,45 ℳ.

```
    9,4 5 ℳ × 3,6
  ---------------
    5 6 7 0
  2 8 3 5
  ---------------
  3 4,0 2.Ø ℳ
```

2) Wie berechnet sich 1 ha, wenn 5,40 ha 4860 ℳ kosten?

Erste Weise.

```
5,40 ha      4860 ℳ
1,00 „          x
--------------------
540 a
  1 „     486Ø . 100
          ----------
100 „        54Ø
```

Zweite Weise.

```
5²/₅ ha      4860 ℳ
1    „          x
--------------------
²⁷/₅ ha
 ¹/₅ „     4860 . 5
           --------
 1   „        27
```

Dritte Weise.

Wenn 5,4 ha 4860 ℳ kosten, so kostet 1 ha 4860 ℳ, getheilt durch 5,4 oder durch 5²/₅.

```
5,4 | 4860 ℳ          Oder 5²/₅ | 4860 ℳ
----------                 5    |    5
 54 | 48600                ----------
                           27   | 24300
```

3) ³/₄ hl Wein zu 132 ℳ; was kosten 6 hl?

Ansatz und Ausrechnung.

```
a. ³/₄ hl       132 ℳ          b. ³/₄ hl      132 ℳ
   6   „          x               6   „         ?
   -----------------              ---------------------
   ³/₄ hl            2             ³/₄ hl     | 132
   ¹/₄ „   132 . 4 . 6̸            ¹/₄ „    3 |
           ------------            1   „      |   4
   1   „        3̸                  6   „      |   6
   6   „   = 1056 ℳ                     ----- | -----
```

Denk- oder Sprechweise. Ich gehe von ³/₄ hl auf ¹/₄ hl, dann auf 1 hl, dann auf 6 hl. Ausführung:

³/₄ hl kosten 132 ℳ; ¹/₄ hl kostet den 3. Theil davon; 1 hl kostet dieses 4mal, und 6 hl kosten wieder 6mal so viel, nämlich 6 × 4 × 132 ℳ, getheilt durch 3.

Zuletzt wird das Ganze nochmal in folgender Weise besprochen: a. Vergleiche ¹/₄ hl mit ³/₄ hl! (¹/₄ hl ist der 3. Theil von ³/₄ hl.) Vergleiche 1 hl mit ¹/₄ hl! (1 hl ist 4mal so viel als ¹/₄ hl.) 6 hl mit 1 hl! (6 hl sind 6mal so viel als 1 hl.)

b. Was kosten ³/₄ hl? (132 ℳ) Was kostet ¹/₄ hl? (132 ℳ, getheilt durch 3. Was kostet 1 hl? (4 × 132 ℳ, getheilt durch 3.) Und 6 hl? (Die kosten 6 × 4 × 132 Mark, getheilt durch 3.)

c. Was sagt uns die Zahl 132 Mark? (Was ³/₄ hl kosten.) Was zeigt der Ausdruck: 132 Mark, getheilt durch 3, an? (Der zeigt an, was ¹/₄ hl kostet.) Der Ausdruck 4 × 132 Mark, getheilt durch 3? (Der sagt

uns, was 1 hl kostet.) Und der Ausdruck: 6 × 4 × 132 Mark, getheilt durch 3? (Der zeigt an, was 6 hl kosten.)

So kommen auch die schwachbegabten Schüler zum klaren Verständniß. Für diese ist es ganz besonders nothwendig, daß sie das Verhältniß jedes folgenden Gliedes der Schlußkette zum vorhergehenden genau bestimmen, bevor sie zum Schließen selbst übergehen.

4) Wie berechnen sich 1,680 kg, wenn 5 kg 28,50 M. kosten?

5 kg	28,50 M.	Oder:	5,000 kg	28,50 M.
1,680 kg	x		1,680 „	?

5 kg
1 „
1 g
1680 g

$$\frac{285 \cdot 1680}{10 \cdot 5 \cdot 1000}$$

5000 g
1 „
1680 „

$$\frac{285 \cdot 1680}{10 \cdot 5000}$$

d. Die gleichartigen Glieder sind ungleichnamige Brüche.

Mündlich.

Beisp. 1. $^1/_2$ kg einer Waare wird mit 3 M. 85 ₰. bezahlt; wie hoch kommt $^1/_5$ kg derselben? (Auf 1 M. 54 ₰.)

Aufl. a. Ich schließe von $^1/_2$ kg auf 1 kg und von 1 kg auf $^1/_5$ kg. — b. Ich mache beide Brüche gleichnamig. $^1/_2 = {}^5/_{10}$, und $^1/_5 = {}^2/_{10}$. Nun heißt die Aufgabe: $^5/_{10}$ kg kosten 3 M. 85 ₰., was kosten $^2/_{10}$ kg? — c. Ich resolvire beide Brüche. $^1/_2$ kg = 500 g, und $^1/_5$ kg = 200 g. Jetzt heißt es: 500 g zu 3 M. 85 ₰., was kosten 200 g? Man geht von 500 g auf 100 g u. s. w.

Fragen. Wie schließt man

a. von $^1/_2$ auf $^1/_3$?	b. von $^1/_4$ auf $^2/_3$?	c. von $^2/_3$ auf $^3/_4$?
von $^1/_3$ auf $^1/_4$?	von $^1/_5$ auf $^3/_4$?	von $^4/_5$ auf $^7/_8$?
von $^1/_5$ auf $^1/_8$?	von $^5/_6$ auf $^1/_8$?	von $^7/_{10}$ auf $^2/_3$?
von $^1/_8$ auf $^1/_{10}$?	von $^4/_5$ auf $^1/_4$?	von $^3/_4$ auf $^{11}/_{16}$?

Bei dem stufenmäßigen Fortschritte finden die Schüler von selbst den rechten Weg. Hauptsache ist übrigens die vielseitige Behandlung einer und derselben Aufgabe.

Beisp. 2. $^3/_4$ hl zu 17 M. 40 ₰.; wie berechnen sich $^4/_5$ hl? (Auf 18 M. 56 ₰.)

Aufl. Ich suche zuerst, was $^1/_4$ hl kostet, dann, was 1 ganzes Hektoliter kostet, hierauf was $^1/_5$ hl kostet, und zuletzt, was $^4/_5$ hl kosten. — Oder! Ich mache die beiden Brüche gleichnamig.

Beisp. 3. Von $^3/_4$ Schober Getreid werden 2 hl 61 lt Körner aufgehoben; wie viel demnach von $4^1/_2$ Schober? (15 hl 66 lt.)

Aufl. a. Ich gehe von $^3/_4$ Schbr. auf $^1/_4$ Schbr., von $^1/_4$ Schbr. auf 1 Schbr., von 1 Schbr. auf $^1/_2$ Schbr. und von $^1/_2$ Schbr. auf $4^1/_2$ oder $^9/_2$ Schbr. — b. So oft $^3/_4$ Schbr. in $4^1/_2$ Schbr. enthalten sind, so vielmal 2 hl 61 lt Körner geben diese.

Beisp. 4. $1^1/_2$ Pfd. Fleisch zu 90 Pfg.; wie berechnen sich $1^1/_4$ Pfd.? (Auf 75 Pfg.)

Aufl. Man richtet $1^1/_2$ und $1^1/_4$ ein. Das Weitere geht aus dem Bisherigen hervor.

Schriftlich.

1) In $1/3$ Jahre ertrug ein Kapital 74,34 M. Zins; wie viel in $1/4$ Jahre? (55 M. 75,5 M.)

Erste Weise.

a.

$1/3$ J.	74,34 M.
$1/4$ J.	x

$1/3$ J.
1 „
$1/4$ „

$$\frac{7434 \cdot 3}{100 \cdot 4}$$

b.

$1/3$ J.		74,34 M.
$1/4$ J.		?
$1/3$ J.	100	7434
1 „		3
$1/4$ „	4	

Zweite Weise.

$4/12$ J.	74,34 M.
$3/12$ „	x

$$x = \frac{7434 \cdot 3}{100 \cdot 4}$$

Dritte Weise.

4 Mon.	74,34 M.
3 „	x

$$x = \frac{7434 \cdot 3}{100 \cdot 4}$$

2) $3/4$ Ctr. kosten 11 M.; wie hoch kommen $7/10$ Ctr.?

Erste Weise.

a.

$3/4$ Ctr.	11 M.
$7/10$ „	x

$3/4$ Ctr.
$1/4$ „
1 „
$1/10$ „
$7/10$ „

$$\frac{11 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 10} = 10{,}266\ldots \text{ M.}$$

b.

$3/4$ Ctr.		11 M.
$7/10$ „		?
$3/4$ Ctr.		11
$1/4$ „	3	
1 „		4
$1/10$ „	10	
$7/10$ „		7

$3/4$ Ctr. kosten 11 M.;
$1/4$ Ctr. kostet den 4. Theil davon, 11 M. getheilt durch 3;
1 Ctr. kostet dieses 4mal, also 4×11 M., getheilt durch 3;
$1/10$ Ctr. kostet den 10. Theil hievon, 4×11 M. getheilt d. 10×3;
$7/10$ Ctr. kosten dieses 7mal, $7 \times 4 \times 11$ M. getheilt durch 10×3.

Da sich die gegebenen Brüche leicht gleichnamig machen lassen und, in Pfunde aufgelöst, zwei ganze Zahlen geben, so rechnen wir die Aufgabe noch auf eine zweite und dritte Weise.

Zweite Weise.

$15/20$ Ctr.	11 M.
$14/20$ „	x

$$\frac{11 \cdot 14}{15}$$

Dritte Weise.

75 Pfd.	11 M.
70 „	x

$$\frac{11 \cdot 70}{75}$$

Bei so einfacher Schlußfolge, wie in den vorstehenden Rechnungen, werden es die Schüler nun von selbst für überflüssig finden, sich dieselbe durch Ziffern zu bezeichnen.

3) $3\,3/4$ ha ertrugen $14\,2/3$ Schober Getreide; wie viel demnach $16\,4/5$ ha? (65 Schbr. 42 Bd.)

Ansatz und Ausrechnung.

a. $3\frac{3}{4}$ ha — $14\frac{2}{3}$ Sch.
$16\frac{4}{5}$ „ — x

$\frac{15}{4}$ ha	
$\frac{1}{4}$ „	$\frac{\overset{28}{44} \cdot 4 \cdot 84}{3 \cdot 15 \cdot 5} = \frac{4928}{75}$
1 „	
$\frac{1}{5}$ „	$= 65,7 \ldots$ Schbr.
$\frac{84}{5}$ „	

b. $3\frac{3}{4}$ ha — $14\frac{2}{3}$ Schbr.
$16\frac{4}{5}$ „ — ?

$\frac{15}{4}$ ha	3	44
$\frac{1}{4}$ „	15	
1 „		4
$\frac{1}{5}$ „	5	
$\frac{84}{5}$ „		84

Denk- und Sprechweise: $14\frac{2}{3} = \frac{44}{3}$.
$3\frac{3}{4}$ oder $\frac{15}{4}$ ha gaben $\frac{44}{3}$ Schbr. oder 44 Schbr. getheilt durch 3;
$\frac{1}{4}$ ha ertrug den 15. Theil davon;
1 ha gab 4mal so viel;
$\frac{1}{5}$ ha ertrug hievon den 5. Theil;
$16\frac{4}{5}$ oder $\frac{84}{5}$ ha gaben dieses 84mal; sie ertrugen also $84 \times 4 \times 44$ Schbr., getheilt durch $3 \times 15 \times 5$.

Ungleichnamige Decimalen oder Decimalzahlen werden bei der Schlußrechnung in allen Fällen gleichnamig gemacht. Es wird dieses, wie wir wissen, auf eine sehr einfache Weise und zwar dadurch bewerkstelligt, daß man die bei der einen oder der andern Zahl fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt.

1) 5,6 m kosten 41,60 M.; wie viel kosten 0,72 m?

Ausr. 5,60 m — 41,60 M.
0,72 „ — x

560 cm	
1 „	$\frac{\overset{58}{416} \cdot \overset{9}{72}}{10 \cdot \underset{\underset{10}{70}}{560}} = \frac{522}{100} = 5,22$ M.
72 „	

2) Ein Grundstück von 2,5840 ha kostete 1615 M.; welchen Werth haben demnach 4,72 ha?

Erste Weise.

2,5840 ha — 1615 M.
4,7200 — x

25840 zt	
1 „	$\frac{\overset{5}{1615} \cdot \overset{590}{47200}}{\underset{323}{25840}} = 2950$ M.
47200 „	

Zweite Weise.

2,5840 ha — 1615 M.
4,7200 „ — x

25850 ha	
1 „	$\frac{1615 \cdot 47200}{25840}$
47200 „	

Dritte Weise.

2,5840 ha — 1615 M.
4,7200 „ — x

25840 qm	
1 „	$\frac{1615 \cdot 47200}{25840}$
47200 „	

---

§. 303. Mit ungleich und mehrfach benannten Zahlen.

a. Die gleichartigen Glieder sind einfach benannte Zahlen.

Mündlich.

1) Das Meter zu 4 ℳ 50 ₰; was kosten 72 cm?

Aufl. Wenn das Meter 4,50 ℳ kostet, so kommt das Centimeter auf 4,5 ₰, und 72 cm kosten 72 × 4,5 ₰; 72 × 4 ₰ = 288 ₰; 72 × 0,5 ₰ = 36 ₰; 288 ₰ + 36 ₰ = 3 ℳ 24 ₰.

2) 44 l Wein zu 28 ℳ 60 ₰; wie hoch kommt 1 hl?

Aufl. 1 l kostet den 44. Theil von 28,60 ℳ; der 4. Theil davon = 7,15 ℳ, und der 11. Theil von 715 ₰ oder von 660 + 55 ₰ = 60 + 5 = 65 ₰. Kostet das Liter 65 ₰, so das Hektoliter 65 ℳ.

3) 8 g einer Waare kosten 15 ₰; wie hoch kommen 24 kg?

Aufl. a. Ich gehe von 8 g auf 1 g, von 1 g auf 1 kg, dann auf 24 kg. — b. Ich schließe von 8 g auf 3 × 8 oder 24 g und von 24 g auf 1000 × 24 g oder 24 kg. (450 ℳ)

Benützt das Resultat und kehrt die Aufgabe um!

(24 kg kosten 450 ℳ; wie hoch kommen 8 g?) Ausr.!

Schriftlich.

Ein Rad macht in 18 Min. 231 Umdrehungen; wie viel in 12 Stunden?

18 Min.	231 Umdr.
12 Std.	x

18 Min.
1 „
1 Std.
12 „

$$\frac{231 \cdot \overset{20}{\cancel{60}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} = 9240 \text{ Umdr.}$$

b. Von den gleichartigen Gliedern ist das eine oder sind beide mehrfach benannt.

Mündlich.

1) Das Schock zu 12 ℳ 30 ₰; was kosten 5 Schck. 24 Stck.?

Aufl. 5 Schck. kosten 5 × 12 ℳ 30 ₰ = 61 ℳ 50 ₰; 12 Stück kosten den 5. Theil von 12,30 ℳ = 2 ℳ 46 ₰; 24 Stück kosten 2 × 2,46 = 4,92; 61 ℳ 50 ₰ + 4 ℳ 92 ₰ = 66 ℳ 42 ₰.

2) Ein Kapital gibt in 1 Jahre 8 Mon. 295 ℳ Zins; wie viel jährlich?

Aufl. 1 Jahr 8 Mon. = 20 Monat. In 1 Mon. beträgt der Zins den 20. Theil von 295 ℳ; der 10. Theil von 295 = 29,5, und die Hälfte von 29,5 = 14,75; in 1 Jahre macht es 12 × 14,75 ℳ; 12 × 14 = 140 + 28 = 168; 12 × $^3/_4$ ℳ = 9 ℳ; 168 ℳ + 9 ℳ = 177 ℳ. Der jährliche Zins = 177 ℳ.

3) 4 Dutzend Stühle kosten 264 ℳ; wie hoch kommen 5 Dutzend 10 Stück?

Aufl. 4 Dutzend kosten 264 ℳ; 1 Dtz. kostet den 4. Theil von 264 ℳ = 66 ℳ; 1 Stck. kostet den 12. Theil von 66 ℳ = 5$^1/_2$ ℳ;

5 Dtz. 10 Stck. = 70 Stck.; diese kosten 70 × $5\frac{1}{2}$ ℳ = 350 + 35 = 385 ℳ.

Benützt das Resultat und kehrt die Aufgabe um!

4) Ein Kapital trägt in 2 J. 9 Mon. 132 ℳ. Zinsen, wie viel in 3 J. 4 Mon.? (160 ℳ.)

Aufl. a. 2 J. 9 Mon. = 33 Mon.; 3 J. 4 Mon. = 40 Monat. Ich gehe von 33 Mon. auf 1 Mon. und von 1 Mon. auf 40 M.

b. 2 J. 9 Mon. = $2\frac{3}{4}$ J., und 3 J. 4 Mon. = $3\frac{1}{3}$ J. Ich gehe von $2\frac{3}{4}$ oder $\frac{11}{4}$ J. auf $\frac{1}{4}$ J., von $\frac{1}{4}$ J. auf 1 J., von 1 J. auf $\frac{1}{3}$ J. und von $\frac{1}{3}$ J. auf $3\frac{1}{3}$ oder $\frac{10}{3}$ J.

Schriftlich.

3 Pfd. 125 g zu 4,80 ℳ.; wie berechnen sich 5 Ctr. 20 kg?

Vorarbeit.

a. 3 Pfd. 125 g = 1625 g
5 Ctr. 20 kg = 270 kg

b. 3 Pfd. 125 g = $3\frac{1}{4}$ Pfd.
5 Ctr. 20 kg = 540 Pfd.

Hauptrechnung.

a. 1625 gr — 4,8 ℳ.
270 kg — ?

1625 gr
1 gr
1 kg
270 kg

$$\frac{48 . 1000 . 270}{10 . 1625}$$

b. $3\frac{1}{4}$ Pfd. — $4\frac{4}{5}$ ℳ.
540 „ — ?

$\frac{13}{4}$ Pfd.
$\frac{1}{4}$ „
1 „
540 „

$$\frac{24 . 4 . \overset{108}{540}}{5 . 13}$$

c.

Man betrachtet 3 Pfd. 125 g als $3\frac{1}{4}$ Pfd., 5 Ctr. 20 kg als $5\frac{2}{5}$ Ctr.

$3\frac{1}{4}$ Pfd. — $4\frac{4}{5}$ ℳ.
$5\frac{2}{5}$ Ctr. — x

$\frac{13}{4}$ Pfd.
$\frac{1}{4}$ „
1 „
1 Ctr.
$\frac{27}{5}$ „

$$\frac{24 . 4 . \overset{4}{100} . 27}{5 . 13 . 5} = \frac{10368}{13} = 797{,}538\,.\,.\ ℳ.$$

Jede mehrfach benannte Zahl wird in eine einfach benannte verwandelt. Das ist die einzige Regel, welche bei diesen Aufgaben zu beobachten ist.

B. Aufgaben mit einfachen umgekehrten Verhältnissen.

A. Mündlich.

§. 304.

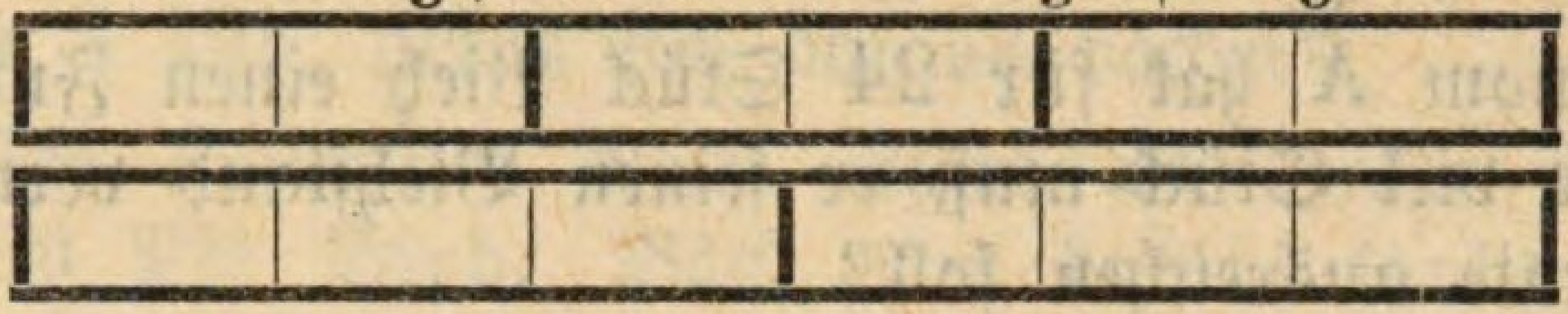
1) 3 Taglöhner fertigen einen Graben in zwei Tagen; wie lange brauchen 2 dazu?

Aufl. Die 3 Taglöhner treten an die Arbeit. Um sicher zu wissen, wie viel davon auf jeden von ihnen kommt, theilen sie dieselbe in 3 gleiche

Theile, und um zu wissen, wie viel der Mann in 1 Tag zu machen hat, so theilt jeder sein Stück wieder in 2 gleiche Theile. Die ganze Arbeit ist sonach in 3 × 2 oder 6 Theile getheilt. Jeder Theil ist das Tagwerk für 1 Mann. 1 Mann würde also zur ganzen Arbeit 6 Tage brauchen. Wird sie von 2 Taglöhnern ausgeführt, so kommt auf jeden die Hälfte von den 6 Theilen, nämlich 3. Also bringen 2 Taglöhner den Graben in der Hälfte von den 6 Tg., d. i. in 3 Tg. fertig.

3 Taglöhner … 2 Tage.

2 Taglöhner … 3 Tage.



2) Ein Getreidefeld kann von 4 Schnittern in 3 Tagen geschnitten werden; wie viel Schnitter sind erforderlich, um die Arbeit in 2 Tagen zu vollenden?

Aufl. Man denkt sich das Feld zuerst nach der Zahl der Tage in 3 und jeden Theil nach der Zahl der Schnitter wieder in 4, das Ganze also in 3 × 4 oder 12 gleiche Theile getheilt. Jeder Theil ist das Tagwerk für 1 Person. Wäre die Arbeit in 1 Tag zu vollenden, so müßten es also 12 Schnitter sein. Da aber 2 Tage Zeit gegeben sind, so ist in 1 Tg. nur die Hälfte von den 12 Theilen zu schneiden; folglich ist auch nur die Hälfte von 12 Schnittern erforderlich. In 2 Tg. wird daher die Arbeit von 6 Schnittern vollendet.

3) Will ein Landmann seine Wiese in 2 Tagen abmähen, so muß er täglich 8 Stunden dazu verwenden; wie lange braucht er täglich nur zu mähen, um die Arbeit in 3 Tagen zu vollenden?

Aufl. Um mit dem Mähen in 2 Tagen fertig zu werden, so muß er täglich 8 Stunden lang daran sein; also braucht er im Ganzen 2 × 8 oder 16 Std. Wollte er die Arbeit in 1 Tag vollenden, so müßte er in Einem fort 16 Std. darüber bleiben. Da er sich aber 3 Tage Zeit nehmen will, so braucht er in 1 Tg. nur den 3. Theil, d. i. $5^1/_3$ Stunden lang zu mähen.

4) Wenn ein Mädchen täglich 4 Std. lang an einem Hemde näht, so bringt sie es in 5 Tg. fertig; wie viel Tage wird sie dazu brauchen, wenn sie täglich nur 3 Std. daran arbeiten kann?

Aufl. Wenn sie täglich 4 Std. lang näht, so bringt sie das Hemd in 5 Tg. fertig. Sie braucht also im Ganzen 4 × 5 oder 20 Std. Zeit dazu. Näht sie täglich nur 3 Std. daran, so braucht sie so vielmal 1 Tag, als 3 Std. in 20 Std. enthalten sind, nämlich $6^2/_3$mal 1 Tag oder $6^2/_3$ Tage.

5) A macht den Weg von München nach Hamburg zu Fuß. Geht er täglich 6 Meilen weit, so braucht er 20 Tage; wie viel Tage wird er brauchen, wenn er täglich nur 5 Meilen zurücklegt?

Aufl. Da A 20 Tage braucht, wenn er täglich 10 Meilen macht, so ist die Entfernung von München bis Hamburg = 20 × 6 oder 120 Meilen. Legt er davon täglich 5 zurück, so dauert seine Reise so vielmal 1 Tag, als 5 Meilen in 120 Meilen enthalten sind, d. i. 24 Tage.

6) Ich gehe von A nach B. Will ich die Reise in 12 Tg. vollenden, so muß ich täglich 7 Meilen zurücklegen; wie weit muß ich täglich gehen, um mein Ziel in 15 Tagen zu erreichen?

Aufl. Meine Reise dauert 12 Tg., wenn ich täglich 7 Meilen gehe. Die Länge des Wegs beträgt also 12 × 7 oder 84 Meilen. Will ich diese in 15 Tg. machen, so muß ich an jedem Tag $^1/_{15}$ des Wegs, mithin $^1/_{15}$ von 84 M. zurücklegen. $^1/_{15}$ von 84 M. = $5^3/_5$ Meilen.

6) Der Oekonom A hat für 24 Stück Vieh einen Futtervorrath auf 5 Monate; um wie viel Stück muß er seinen Viehstand vermindern, wenn das Futter 6 Monate ausreichen soll?

Aufl. Ehe man finden kann, wie viel Stück Vieh abzuschaffen sind, muß man wissen, für wie viel Stück das Futter auf 6 Monate ausreicht. Für 24 Stück reicht der Vorrath 5 Monate lang. Man denkt sich denselben in 24 Theile und jeden davon wieder in 5 Theile, den ganzen Vorrath also in 24 × 5 oder 120 Theile getheilt. Jeder Theil ist die monatliche Portion für 1 Stück. Sollen die 120 Portionen auf 6 Monate reichen, so darf A in einem Monat nur den 6. Theil von 120 oder 20 Portionen verfüttern. Sein Viehstand darf also auch nur 20 Stück betragen. Mithin muß er denselben um 24—20, d. i. um 4 Stück vermindern.

8) A hat für 8 Pferde auf 6 Monate Hafer; wie lange würde dieser für 5 Pferde reichen?

Aufl. Der Hafervorrath gibt 8 × 6 oder 48 Monatsportionen für 1 Pferd. Sollen davon 5 Pferde gefüttert werden, so gehen in 1 Monat 5 Portionen auf. Der Vorrath reicht also auf so vielmal 1 Monat, als 5 Portionen in 48 Portionen enthalten sind, d. i. auf $9^3/_5$ Monat.

9) Frau A braucht zu einem Kleide 8 m Zeug, welcher 0,7 m breit ist; wie viel Meter wird sie von einem Zeuge nehmen müssen, der 0,9 m breit ist?

Aufl. Die 8 m Zeug, welche $^7/_{10}$ Meter breit sind, lassen sich in 7 Streifen zerschneiden, von denen jeder 8 Meter lang und $^1/_{10}$ Meter breit ist. Fügt man dieselben an ihren Enden zusammen, so geben sie ein Stück Zeug von 7 × 8 oder 56 Meter Länge und $^1/_{10}$ Meter Breite. Um nun aus diesem Stücke ein anderes zu bilden, welches $^9/_{10}$ Meter breit ist; so muß ich es in 9 gleiche Theile theilen und diese Theile neben einander legen. Die Länge des Zeuges beträgt dann den 9. Theil von 56 Meter = $6^2/_9$ Meter. Die Frau wird daher $6^2/_9$ (= 6,222) Meter Zeug von $^9/_{10}$ Meter Breite nehmen müssen.

10) Für einen gewissen Lohn werden 3 Ctr. $5^1/_4$ Meilen weit gefahren; wie weit 7 Ctr. für dasselbe Geld?

Aufl. Werden 3 Ctr. $5^1/_4$ Meilen weit gefahren, so kommt der erste Ctr. $5^1/_4$ M. weit, der 2. Ctr. $5^1/_4$ M. weit, und der 3. Ctr. $5^1/_4$ M. weit. Lasse ich den 2. Ctr. zurück, so muß mir der Fuhrmann dafür den ersten Ctr. um $5^1/_4$ M. weiter, im Ganzen also 2 × $5^1/_4$ M. weit fahren. Lasse ich auch den 3. Ctr. zurück, so muß er mir dafür den 1 Ctr. wieder um $5^1/_4$ Meilen weiter, im Ganzen also 3 × $5^1/_4$ M. weit fahren.

1 Ctr. wird also $3 \times 5\frac{1}{4} = 15\frac{3}{4}$ Meilen weit gefahren.

Nun fällt mir ein, statt eines Centners 7 Ctr. für dasselbe Geld mitzugeben. Die Entfernung von $15\frac{3}{4}$ Meilen vertheilt sich jetzt auf die 7 Ctr. Mithin kommt auf 1 Ctr. der 7. Theil von $15\frac{3}{4}$ Meilen, d. i. $2\frac{1}{4}$ Meilen.

11) Aus einer Quantität Mehl bäckt man 24 Brode à 4 Pfd.; wie viele Brode von 3 Pfd. ließen sich daraus backen?

Aufl. Die Quantität Mehl ergibt 24 Brode à 4 Pfd., mithin 24×4 oder 96 Pfd. Brod. Bäckt man daraus lauter Brode, die 3 Pfd. wiegen, so erhält man ihrer so viele, als 3 Pfd. in 96 Pfd. enthalten sind, nämlich 32.

12) Wenn das Hektoliter Korn 7 ℳ kostet, so soll der Brodlaib für einen gewissen Preis 5 Pfd. wiegen; wie schwer soll derselbe sein, wenn das Hektoliter 10 ℳ kostet?

Aufl. Kostet das Hektoliter 7 ℳ, so soll der Brodlaib 5 Pfd. wiegen. Kostet das Hektoliter 1 ℳ, also nur den 7. Theil, so braucht man aus demselben, um die Auslage zu decken, auch nur den 7. Theil so viel Brodlaibe zu backen. Diese können daher 7mal so schwer gemacht werden. Der Laib wird dann also 7×5 Pfd. oder 35 Pfd. wiegen müssen. Kostet das Hektoliter aber 10 ℳ, d. i. 10mal so viel, so muß man auch 10mal so viel Brodlaibe daraus backen; also kann 1 Brod nur $\frac{1}{10}$ von 35 Pfd. wiegen. $\frac{1}{10}$ von 35 Pfd. $= 3\frac{1}{2}$ Pfd.

B. Schriftlich.

§. 305.

Beispiel. 6 Männer vollenden eine Arbeit in 7 Wochen, wie lange würden 5 derselben dazu brauchen?

Nach dem Zweisatze.

a. Bruchform.

6 M. 7 Wch.
5 M. ?

6 M.
1 „ $\frac{7 \times 6}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ Wch.
5 „

b. Divisionsform.

6 M. 7 Wch.
5 M. ?

6 M.		7 Wch.
1 „		6
5 „	5	
	5	42 | $8\frac{2}{5}$ Wch.

Denk- oder Sprechweise: 6 Männer brauchen 7 Wochen; 1 Mann braucht 7mal so lang, also 6×7 Wch.; 5 Männer aber bedürfen nur den 5. Theil dieser Zeit, nämlich 6×7 Wch., getheilt durch 5.

C. Aufgaben mit mehrfachen Verhältnissen.

A. Mündlich.

§. 306.

1. Beispiel. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 ℳ; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

Behandlung.

I. Ich suche zuerst, wie viel 1 Arbeiter in 1 Tag verdient, und dann, was 8 Arbeiter in 15 Tagen erhalten. Das kann auf zweierlei Weise geschehen:

a. Verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen 96 ℳ, so 6 Arbeiter in 1 Tag 8 ℳ, 1 Arbeiter in 1 Tag $1^1/_3$ ℳ. 1 Arbeiter in 15 Tagen 20 ℳ, 8 Arbeiter in 15 Tagen 160 ℳ.

b. Verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen 96 ℳ, so 1 Arbeiter in 12 Tagen 16 ℳ, 1 Arbeiter in 1 Tag $1^1/_3$ ℳ. 8 Arbeiter in 1 Tag $10^2/_3$ ℳ, 8 Arbeiter in 15 Tagen 160 ℳ.

II. Ich löse die zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe in zwei einfache auf. Kann wieder auf zweifache Art geschehen:

a. 6 Arbeiter erhalten in 12 Tagen 96 ℳ; wie viel verdienen 8 Arbeiter in derselben Zeit? Antwort: 128 ℳ.
8 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 128 ℳ, wie viel in 15 Tagen? Antwort: 160 ℳ.

b. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 ℳ; wie viel in 15 Tagen? Antw.: 120 ℳ.
6 Arbeiter verd. in 15 Tagen 120 ℳ; wie viel verdienen 8 Arbeiter in dieser Zeit? Antw.: 160 ℳ.

III. Ich ziehe die zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe in eine einfache zusammen. Wieder auf zweierlei Weise:

a. Was 6 Arbeiter in 12 Tagen verdienen, das verdienen in einem Tag 12 × 6 oder 72 Arbeiter. Und was 8 Arbeiter in 15 Tagen verdienen, das verdienen in einem Tag 15 × 8 oder 120 Arbeiter. Nun heißt die Aufgabe: 72 Arbeiter verdienen 96 ℳ; wie viel verdienen 120 Arbeiter?

b. Was 6 Arbeiter in 12 Tagen verdienen, das verdient 1 Arbeiter in 6mal 12 oder 72 Tagen. Und was 8 Arbeiter in 15 Tagen erhalten, das bekommt 1 Arb. in 8mal 15 oder 120 Tagen. Die Aufgabe heißt jetzt: In 72 Tagen werden 96 ℳ verdient, wie viel in 120 Tagen?

Eine vortreffliche Uebung ist es, die Auflösung solcher Aufgaben von den Schülern, wie hier oben, schriftlich ausführen zu lassen.

2. Beispiel. 16 kg Garn geben 90 m Leinwand, welche 8 dm breit ist; wie viel Meter Leinwand von 9 dm Breite geben 24 kg Garn von gleicher Qualität?

Aufl. 16 kg Garn geben, wenn die Leinwand 8 dm breit ist, 90 m; 1 kg gibt den 16. Theil von 90 m = $5^5/_8$ m; 24 kg geben 24mal so viel; 24 × 5 = 120, und 24 × $^5/_8$ = 15; 120 + 15 = 135 m; 24 kg Garn geben also, wenn die Leinwand 8 dm breit wird, 135 m. Würde die Leinwand nur 1 dm breit werden, so würde es 8 × 135 m = 800 + 240 = 1040 + 40 = 1080 m geben; da sie aber 9 dm breit werden soll, so gibt es nur den 9. Theil von 1080 m = 100 + 20 oder 120 m.

B. Schriftlich.

§. 307.

a. Nach dem Zweisatze in Bruchform.

1) 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 ℳ; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

6 Arb.	12 Tag.	96 ℳ.
8 „	15 „	?

6 Arb.	12 Tg.
1 „	1 „
8 „	15 „

$$\frac{\overset{8}{\cancel{96}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{6} \times \underset{2}{\cancel{12}}} = 160 \text{ ℳ.}$$

6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 ℳ; **1** Arb. verdient in derselben Zeit $^1/_6$ von 96 ℳ und 8 Arb. verdienen 8mal so viel, nämlich 8×96 ℳ, getheilt durch 6. Dieser Ausdruck sagt, wie viel 8 Arbeiter in **12** Tg. verdienen. In **1** Tag verdienen sie den 12. Theil davon, und in **15** Tagen verdienen sie 15mal so viel als in 1 Tag, nämlich **15** × 8 × 96 ℳ, getheilt durch 6 × 12.

Fragen: Was verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen? (96 ℳ) Wie viel verdient **1** Arb. in 12 Tg. (96 ℳ getheilt durch **6**.) Und was verdienen **8** Arb. in 12 Tg.? (8mal 96 ℳ, getheilt durch 6.) Was sagt uns also der Ausdruck: 8 × 96 ℳ, getheilt durch 6? (Der sagt uns, was 8 Arb. in 12 Tg. verdienen.) Wie viel verdienen die 8 Arb. in **1** Tg.? (8 × 96 ℳ, getheilt durch **12** × 6.) Und wie viel verdienen sie in **15** Tg.? (**15** × 8 × 96 ℳ, getheilt durch 12 × 6.)

2) 8 Wägen, welche täglich 10 Std. lang gehen, bringen einen Schutthaufen in 20 Tg. auf eine andere Stelle; wie viel Tage zu 8 Std. würden 12 Wägen daran zu fahren haben?

8 Wg.	10 Std.	20 Tg.
12 „	8 „	?

8 Wg.	10 Std.
1 „	1 „
12 „	8 „

$$\frac{\overset{5}{\cancel{20}} \times 8 \times 10}{\underset{3}{\cancel{12}} \times 8} = \frac{50}{3} = 16^2/_3 \text{ Tg.}$$

8 Wägen brauchen 20 Tage; **1** Wagen braucht 8mal so lang, 8 × 20 Tage; **12** Wägen brauchen den 12. Theil dieser Zeit, nämlich 8 × 20 Tage, getheilt durch 12. So viele Tage brauchen die 12 Wägen, wenn sie täglich 10 Stunden lang fahren. Fahren sie täglich nur *eine* Stunde lang, so brauchen sie 10mal so viel *Tage*. Wenn sie aber 8 Std. fahren, so brauchen sie nur den 8. Theil, d. i. 10×8×20 Tg., getheilt durch 8×12.

b. Nach dem Zweisatze in Divisionsform.

Beisp. 1. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 96 ℳ.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

6 Arb.	12 Tg.	96 ℳ.
8 Arb.	15 Tg.	?

6 Arb.		96 ℳ.
1 „	6	
8 „ (in 12 Tagen)		8
1 „	12	
15 „		15
	3	16
		2
		5
		160 ℳ.

Die Auflösung zerfällt in 2 Schlußreihen:

a. 6 Arb. verd. 96 Mk.
1 „ „ den 6. Theil;
8 „ „ 8mal so viel u. zwar in 12 Tagen.

b. Mithin verdienen 8 Arb. in 1 Tag den 12. Theil und in 15 Tagen 15mal so viel.

Beisp. 2. 8 Wägen, welche täglich 10 Stunden lang gehen, bringen einen Schutthaufen in 20 Tagen auf eine andere Stelle. Wie viel Tage zu 8 Stunden würden 12 Wägen daran zu fahren haben? ($16^2/_3$ Tg.)

Ansatz und Berechnung.

8 Wg.	10 Std.	20 Tg.
12 Wg.	8 Std.	?

8 Wg.		20 Tg.
1 „		8
12 „ (10 St.)	12	
1 „		10
8 „	8	
	3	5
	3	$50 = 16^2/_3$ Tg.

Der Rechner denkt:

8 Wägen brauchen 20 Tg.;
1 Wagen braucht 8mal so lang;
12 Wg. brauchen den 12. Theil der Zeit, wenn sie täglich 10 St. fahren; fahren sie täglich 1 Stunde, so 10mal so lang; wenn aber 8 Stunden, so den 8. Theil.

Die Proportionsrechnung.

§. 308. Mit unbenannten Zahlen.

a. 5 : 10 7 : 14.

Wie verhält sich 5 zu 10? Und wie verhält sich 7 zu 14? 5 verhält sich zu 10, wie 1 : 2, und 7 verhält sich zu 14, wie 1 : 2; 10 ist das 2fache von 5, und 14 ist das 2fache von 7. Die zwei Zahlenpaare bilden daher zwei gleiche Verhältnisse. Darum können wir sie durch das Zeichen der Gleichheit verbinden, und so mit einander verbunden bilden sie eine Proportion. Steht:

$$5 : 10 = 7 : 14.$$

Wie viele Verhältnisse gehören demnach zu einer Proportion? Und was für Verhältnisse? — Wie viel Glieder hat ein Verhältniß? Wie viel Glieder hat eine Proportion? Welche von den vorstehenden Zahlen bildet das erste Glied der Proportion? Welche das zweite? das dritte? das vierte?

Die zwei Verhältnisse sind einander gleich, weil 5 in 10 so oft enthalten ist, als 7 in 14. Die vier Zahlen bilden daher eine Proportion,

weil die erste Zahl eben so oft in der zweiten liegt, als die dritte in der vierten. Woran kann man also erkennen, ob vier Zahlen eine Proportion bilden?

In dem Verhältniß 5 : 10 ist das zweite Glied größer, als das erste; eben so in dem Verhältniß 7 : 14. Beide sind daher steigend, zunehmend oder wachsend. Stellen wir die Glieder derselben um,

$$10 : 5 = 14 : 7$$

so erhalten wir zwei fallende Verhältnisse. Und da 10 in 5 eben so oft enthalten ist, wie 14 in 7, nämlich $^1/_2$mal, so sind die zwei Verhältnisse auch jetzt wieder einander gleich. Es gibt also Proportionen mit steigenden Verhältnissen und Proportionen mit fallenden Verhältnissen.

Untersucht, ob folgende Verhältnißpaare Proportionen bilden, oder nicht:

14 : 28	12 : 6	8 : 19	5 : 15
16 : 4	7 : 28	12 : 9	18 : 12

Wenn zwei Verhältnisse eine Proportion bilden sollen, so müssen beide steigend, oder beide fallend sein. Noch mehr: sie müssen beide in gleichem Grade steigen, oder in gleichem Grade fallen. — Schreibt 6 steigende und 6 fallende Proportionen auf!

b. $$2 : 6 = 11 : x.$$

Der Buchstabe x steht für das unbekannte vierte Glied, das gesucht werden soll. Wie finden wir es?

So oft 2 in 6 enthalten ist, eben so oft muß 11 in x enthalten sein. 2 ist in 6 dreimal; also muß 11 in x gleichfalls 3mal liegen. In welcher Zahl ist 11 dreimal enthalten? In 3×11 oder 33. Also ist x = 33. Und die Proportion heißt jetzt:

$$2 : 6 = 11 : 33$$

So wird auch das 4. Glied nachstehender Proportionen gesucht:

3 : 15 = 2 : x	$^3/_7$: $^6/_7$ = 14 : x	0,3 : 0,9 = 4 : x
7 : 28 = 5 : x	$12^1/_2$: $2^1/_2$ = 50 : x	0,16 : 1,44 = 7 : x
12 : 8 = 20 : x	$^2/_3$: 4 = $^3/_4$: x	2,5 : 9,75 = 9 : x
4 : 3 = 24 : x	$^9/_{12}$: $^9/_{20}$ = $^4/_5$: x	4,35 : 8,7 = 6,5 : x

c. $$3 : 6 = 5 : 10$$

3 ist in 6, wie 5 in 10, 2mal enthalten. Die 4 Zahlen bilden also eine Proportion. Multiplicire die äußeren Glieder 3 und 10, und dann die inneren Glieder 6 und 5 mit einander, und vergleiche die beiden Produkte! ($3 \times 10 = 30$, und $6 \times 5 = 30$.)

Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkte der inneren.

Dieß steht mit dem, daß 3 in 6 so oft enthalten ist, als 5 in 10 im engsten Zusammenhang. Da 3 in 6 2mal enthalten ist, so ist $6 = 2 \times 3$; und da 5 in 10 2mal enthalten ist, so ist $10 = 2 \times 5$. Also ist $3 \times 10 = 3 \times (2 \times 5)$, und $6 \times 5 = (2 \times 3) \times 5$. Nun ist aber $3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5$; also ist auch $3 \times 10 = 6 \times 5$.

Anschaulicher: $3 : 6 = 5 : 10$

$3 : 2.3 = 5 : 2.5$

Da nun bei jeder **Proportion** das erste Glied so oft im zweiten enthalten ist, als das dritte in dem vierten, so ist auch bei jeder Proportion das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren. Dieß gibt uns ein Mittel an die Hand, das fehlende vierte Glied einer Proportion noch auf eine zweite Weise zu finden.

d. $2 : 6 = 11 : x$

$2 \times x = 6 \times 11$; $6 \times 11 = 66$; also ist auch $2 \times x = 66$; ist aber 2mal $x = 66$, so ist 1mal x oder $x = 66$, getheilt durch $2 = 33$; also verhält sich

$$2 : 6 = 11 : 33.$$

Hiernach wird das unbekannte 4. Glied einer Proportion gefunden, **wenn man die inneren Glieder miteinander multiplicirt und das Produkt durch das erste Glied dividirt.**

Nun lasse man auch nach dieser Regel das 4. Glied der oben gegebenen Proportionen suchen.

Für Präparanden dürfte sich folgende Form empfehlen:

1) $2 : 5 = 11 : x$

$$2x = 5 . 11$$
$$x = \frac{5 . 11}{2}$$
$$x = \frac{55}{2} = 27^1/_2$$

$2x = 5 . 11$;
$x = 5 . 11$, getheilt durch 2.

2) $4 : 7 = {}^3/_5 : x$

$$4x = \frac{7 . 3}{5}$$
$$x = \frac{7 . 3}{4 . 5}$$
$$x = \frac{21}{20} = 1^1/_{20}$$

$4x = 7 . {}^3/_5$ od. $7 . 3$, geth. durch 5;
$x = 7 . 3$, getheilt durch $4 . 5$.

3) $4 : {}^7/_8 = 5 : x$

$$4x = \frac{7 . 5}{8}$$
$$x = \frac{7 . 5}{8 . 4}$$
$$x = \frac{35}{32} = 1^3/_{32}$$

$4x = {}^7/_8 . 5$ od. $7 . 5$, geth. durch 8;
$x = 7 . 5$, getheilt durch $4 . 8$

4) ${}^3/_5 : 8 = 7 : x$

$${}^3/_5 x = 8 : 7$$
$$x = \frac{8 . 7 . 5}{3}$$
$$x = \frac{280}{3} = 93^1/_3$$

${}^3/_5 x = 8 . 7$; $x = 8 . 7$, div. durch ${}^3/_5$
$= 8 . 7$, **multiplicirt** durch ${}^5/_3$.

5) ${}^8/_9 : {}^4/_5 = {}^5/_6 : x$

$$x = \frac{4 . 5 . \overset{2}{9}}{5 . \underset{2}{6} . \underset{2}{8}} = \frac{3}{4}$$

$x = {}^4/_5 \times {}^5/_6$, dividirt durch ${}^8/_9$,
$= {}^4/_5 \times {}^5/_6$, multipl. durch ${}^9/_8$,

6) $32^2/_5 : 10^2/_7 = 18^3/_8 : x$

$$\frac{162}{5} : \frac{72}{7} = \frac{147}{8} : x$$
$$x = \frac{72 . 147 . 5}{7 . 8 . 162}, \text{ gekürzt}$$
$$= \frac{35}{6} = 5^5/_6$$

7) $0{,}72 : 8{,}8 = 6{,}3 : x$

$$x = \frac{8{,}8 . 6{,}3}{0{,}72} = \frac{88 . 63}{72} = 77.$$

Wir erheben die Decimalbrüche auf ganze Zahlen. Der Divisor hat **zwei** Decimalstellen. Die Faktoren des Dividenden haben zusammen ebenfalls **zwei** solche, und, miteinander multiplicirt, geben sie auch

ein Produkt mit zwei Decimalstellen. Es sind also 100tel durch 100tel zu dividiren. Wir streichen daher überall das Komma und machen hierdurch sowohl den Divisor, als den Dividenden 100mal so groß. Dann suchen wir zu kürzen.

8) 3,6 : 4,8 = 5,7 : x

$$x = \frac{4,8 \,.\, 5,7}{3,6} = \frac{48 \,.\, 5,7}{36} = \frac{48 \,.\, 57}{360} \text{ od. } \frac{48 \,.\, 57}{36 \,.\, 10} = 7,6.$$

Der Divisor hat eine Decimalstelle, der Dividend hat im Ganzen zwei. Streichen wir das Komma der beiden Faktoren des Dividenden, so wird dieser 10 × 10 oder 100mal so groß. Streichen wir das Komma bei dem Divisor, so wird er nur 10mal so groß. Also müssen wir dem Divisor noch eine Null, oder die Zahl 10 als Faktor beifügen.

9) 0,225 : 1,2 = 10,5 : x

$$x = \frac{1,2 \,.\, 10,5}{0,225} = \frac{12 \,.\, 105}{22,5} = \frac{12 \,.\, 105 \,.\, 10}{225} = 65.$$

Der Divisor hat drei Decimalstellen, der Dividend hat im Ganzen nur zwei. Streichen wir überall das Komma, so wird der Divisor 1000mal, der Dividend nur 100mal so groß. Also ist dem Dividenden entweder noch eine Null, oder die Zahl 10 als Faktor beizufügen.

§. 309. Angewandt auf Regeldetri-Aufgaben.

a. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Das Erste und Wichtigste ist die Bildung des Ansatzes. Hierbei gehe man so zu Werke, daß die Schüler sich gleich von vorne herein gewöhnen, das erste Verhältniß nicht eher zu setzen, bis sie durch besonnene Betrachtung der Aufgabe deutlich erkannt haben, ob dasselbe steigend oder fallend sein müsse. „Muß mehr oder weniger herauskommen, als das dritte Glied beträgt? Verlangt die Aufgabe eine zunehmende oder eine abnehmende Proportion?" sind die Fragen, die bei jeder Aufgabe gestellt und beantwortet werden müssen, bevor zum Ansetzen der Glieder des ersten Verhältnisses übergegangen werden darf.

Beispiel 1. 5 m kosten 4 ℳ; wie viel werden 8 m kosten?

Fertigung des Ansatzes.

Was soll hier berechnet werden? (Wie viel 8 m kosten.) Da wir die Anzahl Mark, welche die 8 m kosten, noch nicht kennen, so bezeichnen wir sie vorläufig durch den Buchstaben **x**.

. . . x ℳ.

Das ist das vierte Glied. Das vierte Glied bildet mit dem dritten das zweite Verhältniß der Proportion. In einem Verhältnisse können nur gleichartige Größen stehen. Welche von den drei gegebenen Zahlen wird daher in die dritte Stelle kommen müssen? (4 ℳ)

. . 4 ℳ : x ℳ.

Welche Zahlen bilden nun das erste Verhältniß? (5 m und 8 m.) Wie müssen wir aber das Verhältniß bilden: zunehmend 5 : 8, oder ab-

nehmend 8 : 5? 4 ℳ. sind der Preis für 5 m; 8 m kosten mehr. Soll das vierte Glied größer werden, als das dritte, so muß auch das 2. Glied größer sein, als das erste. Die Proportion muß zunehmend sein. Wir müssen daher setzen:

$$5\,\text{m} : 8\,\text{m} = 4\,ℳ : x\,ℳ$$

Ausrechnung.

a. 5 m kosten 4 ℳ.; 2 × 5 m kosten 2 × 4 ℳ.; 3 × 5 m kosten 3 × 4 ℳ. u. s. f. Wie vielmal 5 m sind die zu berechnenden 8 m? 5 m sind in 1 m $^1/_5$mal, in 8 m $^8/_5$mal enthalten. 8 m sind also $^8/_5$ × 5 m; folglich kosten sie auch $^8/_5$ × 4 ℳ. Wie rechnest du das? Antwort: Ich rechne 8 × 4 ℳ. und theile das Produkt durch 5.

5 m : 8 m = 4 ℳ. : x ℳ.
× 8
5 | 32 | 6,4 ℳ.
30
2,0
20

b. Das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem der innern. Da 4 Mark durch 8 Meter nicht multiplicirt werden können, so denke ich mir das erste Verhältniß als ein Verhältniß in unbenannten Zahlen, nämlich so:

$$5 : 8 = 4\,ℳ : x$$

$$x = \frac{8 \times 4}{5} = \frac{32}{5} = 6{,}4\,ℳ.$$

5 x = 8 × 4 ℳ.; also ist x = 8 × 4 ℳ., getheilt durch 5; 8 × 4 ℳ. = 32 ℳ.; 32 ℳ. durch 5 getheilt = 6,4 ℳ. = 6 ℳ. 40 ₰.

So ausführlich wird zuerst jede Aufgabe behandelt.

Hiermit ist der Schüler in die angewandte Proportionsrechnung eingeführt. Er kennt den Ansatz und die Ausrechnung, welche in allen Fällen darin besteht, daß man das dritte Glied durch das zweite multiplicirt und das Produkt durch das erste Glied dividirt. Das Verfahren, den Ansatz zu fertigen, wird jetzt freier und einfacher. Es wird nicht eher Etwas notirt, bis die Aufgabe vollständig beurtheilt und den Zahlen ihre Stelle in der Proportion angewiesen ist.

Der Schüler hat das Aufgabenheft in der Hand und liest die betreffende Aufgabe laut vor.

Für 12 Mark erhält man 21 Kilo; wie viel für 17 ℳ.? Dann fährt er fort: Hiernach ist zu suchen, wie viel Kilo man für 17 ℳ. bekommt, und gegeben ist, wie viel man für 12 ℳ. erhält? (Jetzt haben wir die beiden Zahlen, welche das erste Verhältniß bilden, 17 ℳ. und 12 ℳ. Es ist nun noch zu bestimmen, ob das Verhältniß steigend oder fallend sein muß. Darum heißt es weiter:) Für 12 ℳ. erhält man 21 Kilo; für 17 Mark erhält man mehr; die Mark müssen daher in einem steigenden Verhältniß stehen. Ich

setze also: 12 ℳ verhalten sich zu 17 ℳ, wie 21 Kilo zu x. Steht mit Ausrechnung:

$$12 : 17 = 21\ \text{kg} : x$$

$$x = \frac{17 \cdot \overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{119}{4} = 29{,}75\ \text{kg}$$

Beispiel 2. Für 72 Tg. zahlt man 150 ℳ Kostgeld; wie viel für 42 Tage?

Hiernach ist zu suchen, wie viel Kostgeld für **42** Tage gezahlt werden muß, und gegeben ist, wie viel Kostgeld für **72** Tage gezahlt wird. Für 72 Tage werden 150 ℳ gezahlt; für 42 Tage ist nicht so viel zu zahlen. Die Verhältnisse müssen demnach fallend sein. Ich setze daher: 72 Tage verhalten sich zu 42 Tagen, wie 150 ℳ zu x. Steht:

$$72 : 42 = 150\ ℳ : x.$$

$$x = \frac{\overset{7}{\cancel{42}} \times \overset{25}{\cancel{150}}}{\underset{\underset{2}{\cancel{12}}}{\cancel{72}}} = \frac{175}{2} = 87{,}5\ ℳ$$

b. Mit gemeinen Brüchen.

Beispiel 1. Ein Kapital wirft in $^5/_8$ Jahren 24 ℳ Zinsen ab; wie viel in $3^3/_8$ Jahren? Antwort: 129 ℳ 60 ₰.

Ansatz. $^5/_8 : 3^3/_8 = 24\ ℳ : x$

$$x = \frac{27 \cdot 24 \cdot 8}{8 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{648}{5} = 129{,}6\ ℳ$$

Beispiel 2. $3^1/_8$ Ctr. zu 11 ℳ 25 ₰; was kosten $^4/_5$ Ctr.?

Ansatz. $3^1/_8 : {^4/_5} = 11^1/_4\ ℳ : x$

$$x = \frac{\cancel{4} \cdot \overset{9}{\cancel{45}} \cdot 8}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 25} = \frac{72}{25} = 2{,}88\ ℳ$$

c. Mit Decimalbrüchen.

Beispiel 1. Wie berechnen sich 0,9 m, wenn 0,5 m 48 ₰ kosten?

Ansatz. $0{,}5 : 0{,}9 = 48\ ₰ : x$

$$x = \frac{0{,}9 \cdot 48}{0{,}5} = \frac{9 \cdot 48}{5} = \frac{432}{5} = 86{,}4\ ₰$$

Beispiel 2. Für 3,5 ℳ erhält man 1,4 kg; wie viel für 15,65 ℳ?

Ansatz. $3{,}5 : 15{,}65 = 1{,}4\ \text{kg} : x$

$$x = \frac{15{,}65 \cdot 1{,}4}{3{,}5} = \frac{\overset{313}{\cancel{1565}} \cdot \overset{2}{\cancel{14}}}{100 \cdot \underset{5}{\cancel{35}}} = 6{,}26\ \text{kg}$$

d. Mit ungleichbenannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch berechnen sich 15 Ctr. Kaffee, wenn 75 Pfd. 96 M. kosten? Antwort 1920 M.

Zu berechnen ist, wie hoch 15 Ctr. Kaffee kommen; gegeben ist, wie viel 75 Pfd. kosten; 75 Pfd. kosten 96 M.; 15 Ctr. kosten mehr; 75 Pfd. und 15 Ctr. müssen daher in einem steigenden Verhältniß stehen. Das erste Verhältniß ist also 75 Pfd. : 15 Ctr. Damit aber die Zahlen, abgesehen von ihrer Benennung, ein steigendes Verhältniß bilden, so müssen beide Größen, die zwar gleichartig, aber nicht gleichnamig sind, in gleichbenannte verwandelt werden. Und es geschieht, indem man a. die 15 Ctr. in Pfd., oder b. die 75 Pfd. in Centnertheile verwandelt.

a.

75 Pfd. : 1500 Pfd. = 96 M. : x

b.

$^3/_4$ Ctr. : 15 Ctr. = 96 M. : x

c.

0,75 Ctr. : 15 Ctr. = 96 M. : x

Beispiel 2. In einer Fabrik wurden in 14 Wochen und 4 Tg. 1 Ctr. 43 Pfd. Oel verbraucht; wie viel in 5 Wch. 3 Tg.? Antwort: $53^5/_8$ Pfd.

a.

14 Wch. 4 Tg. : 5 Wch. 3 Tg. = 1 Ctr. 43 Pfd. : x

88 Tg. : 33 Tg. = 134 Pfd. : x

b.

$14^2/_3$ Wch. : $5^1/_2$ Wch. = 143 Pfd. : x

e. Mit umgekehrten Verhältnissen.

Beispiel: 6 Männer vollenden eine Arbeit in 7 Wochen; wie lange würden 5 derselben dazu brauchen?

Berechnet soll werden, wie lange 5 Männer zu einer Arbeit brauchen; bekannt ist, wie lange 6 Männer dazu brauchen. 6 Männer brauchen 7 Wochen; 5 Männer arbeiten in derselben Zeit nicht so viel; sie brauchen daher zu derselben Arbeit länger als 7 Wochen. Die Verhältnisse der Proportion müssen also steigend sein. Ich setze daher:

5 M. : 6 M. = 7 Wch. : x

6

5 | 42 | $8^2/_5$ Wch.

6 M. brauchen 7 Wch.; 5 M. brauchen $8^2/_5$ Wochen. In demselben Verhältniß, in welchem die Zahl der Arbeiter abnimmt, in eben demselben Verhältniß nimmt die Zahl der Tage zu. Arbeiter und Zeit sind umgekehrt proportionirt.

f. Mit mehrfachen Verhältnissen.

Beispiel 1. 8 Arbeiter verdienen in 6 Tagen 96 M.; wie viel werden 5 Arbeiter in 7 Tagen verdienen?

Ansatz und Berechnung.

Die Frage heißt: Wie viel, wie viel Mark, werden 5 Arbeiter in 7 Tagen verdienen? Das Frageglied ist daher x M., das hintere Verhältniß also 96 M. : x

Wovon hängt es hier ab, wie viel verdient wird? (Von der Anzahl der Arbeiter und von der Arbeitszeit.) Fassen wir zuerst die Arbeiter in's Auge.

Von welcher Anzahl Arbeiter werden 96 ℳ verdient? (Von 8 Arb.) Und von welcher Anzahl Arbeiter ist der Verdienst zu suchen? (Von 5.) Verdienen diese 5 Arbeiter mehr, oder weniger als jene 8, bei gleicher Zeit? (Weniger.) Das Verhältniß 96 ℳ : x ℳ ist also abnehmend oder fallend. In demselben Verhältnisse, in welchem die Anzahl der Arbeiter abnimmt, in eben demselben Verhältnisse nimmt auch der gemeinschaftliche Verdienst derselben ab. Wir setzen daher 8 Arbeiter : 5 Arbeiter, steht:

8 Arbeiter : 5 Arb. = 96 ℳ : x

Würden die 5 Arbeiter eben so lange arbeiten, wie die 8, so wäre ihr Verdienst = 5 × 96 ℳ, getheilt durch 8 = 60 ℳ. Ihre Arbeitszeit ist aber eine andere. Also ist auch ihr Arbeitslohn ein anderer.

In welcher Zeit werden denn die 96 ℳ verdient? (In 6 Tagen.) Und für welche Zeit ist der Verdienst zu berechnen? (Für 7 Tg.) Wird der Verdienst für diese 7 Tag mehr oder weniger betragen, als für jene 6? (Mehr.) Das Verhältniß der Zeiten wirkt also zunehmend auf das Verhältniß 96 ℳ : x. Denn in demselben Verhältnisse, in welchem die Arbeitszeit wächst, in eben demselben Verhältniß wächst auch der Arbeitslohn. Wir setzen daher unter das erste Verhältniß noch das zweite 6 Tag : 7 Tag.

8 Arbeiter	:	5 Arb.	=	96 ℳ : x
6 Tg.	:	7 Tg.		
48	:	35	=	96 ℳ : x

8 Arb. verdienen in 6 Tg. 96 ℳ. Denken wir uns an jedem der 6 Tage 8 andere Arbeiter angestellt, so sind es dann im Ganzen 6 × 8 oder 48 Arb., und jeder von ihnen arbeitet einen Tag lang. Was 8 Arb. in sechs Tagen thun und verdienen, das thun und verdienen also 6 × 8 oder 48 Arbeiter in 1 Tag. Und was 5 Arbeiter in 7 Tagen thun und verdienen, das thun und verdienen 7 × 5 oder 35 Arbeiter in 1 Tag. Der Einfluß der Zeit auf den Verdienst ist nun auf die Anzahl der Arbeiter übergetragen; das besondere Verhältniß der Zeit ist dadurch aufgehoben. Die 2 Verhältnisse sind in eines zusammengezogen. Wir haben nun eine einfache Proportion. Diese heißt: 48 Arbeiter verhalten sich zu 35 Arbeiter wie 96 ℳ zu x.

$$x = \frac{35 \cdot \overset{2}{\cancel{96}}\ ℳ}{48} = \frac{7 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{96}}\ ℳ}{\cancel{6} \cdot 8} = 70\ ℳ$$

Bei der zusammengesetzten Proportion sind also, wie bei der einfachen, die inneren Glieder (7, 5, 96) die Faktoren des Dividenden und die äußern (hier 6 und 8) die Faktoren des Divisors.

Beispiel 2. Wie lange brauchen 10 Arbeiter bei täglich 12-stündiger Arbeit, wenn 8 Arbeiter, welche täglich 10 St. arbeiten, 20 Tage brauchen? Antwort: $13^1/_2$ Tag.

Ansatz und Berechnung.

Die Frage heißt: Wie lange, d. h. wie viele Tage brauchen 10 Arbeiter bei täglich 12stündiger Arbeit? Das Fragеglied ist daher Tage, das hintere Verhältniß also

20 Tg. : x

Worauf kommt es an, wie viele Tage zu einer gewissen Arbeit erforderlich sind? (Auf die Anzahl der Arbeiter und auf die Anzahl der Stunden, welche sie täglich auf die Arbeit verwenden. Denn je mehr Arbeiter bei der Arbeit beschäftigt sind, desto eher werden sie damit fertig; je weniger Arbeiter, desto länger werden sie dazu brauchen. Je mehr Stunden täglich auf die Arbeit verwendet werden, desto mehr wird in 1 Tag gethan und desto weniger Tage sind dazu erforderlich; je weniger Stunden täglich auf die Arbeit verwendet werden, desto —). Fassen wir nun zuerst die Zahl der Arbeiter ins Auge und dann die Zahl der Stunden. 20 Tage lang brauchen 8 Arbeiter; 10 Arbeiter brauchen nicht so lang; das Verhältniß der Arbeiter ist daher abnehmend zu setzen.

10 Arbeiter : 8 Arb. = 20 Tg. : x

20 Tage sind erforderlich, wenn täglich 10 St. lang gearbeitet wird. Wird täglich 12 Stunden lang gearbeitet, so braucht man nicht so lange. Also ist auch das Verhältniß der Stunden abnehmend zu setzen.

10 Arbeiter : 8 Arb. = 20 Tg. : x
12 Std. : 10 Std.

$$x = \frac{\not{10} \cdot \overset{2}{\not{8}} \cdot 20 \text{ Tg.}}{\underset{3}{\not{12}} \cdot \not{10}} = \frac{40}{3} = 13^1/_3 \text{ Tg.}$$

Wie hier gezeigt, so wird auch in den Fällen verfahren, wo die gesuchte Größe von mehr als 2 Verhältnissen abhängig ist. Nur unterlasse man nicht, jede Aufgabe, sobald das hintere Verhältniß angesetzt ist, so zu beurtheilen, daß der Schüler die Art der Abhängigkeit des Gesuchten von dem Gegebenen deutlich erkennt.

Die Kettenrechnung.

§. 310. Vorbemerkung.

Den zusammengesetzten Aufgaben mit Gleichungen hat man früher auch solche einfache Regeldetriaufgaben beigeordnet, mit deren Ausrechnung Resolutionen und Reduktionen verbunden sind, und hat bei ihnen auch die gleiche Rechnungsform, nämlich den Kettensatz oder die Kettenregel in Anwendung gebracht, wodurch es möglich war, die Reduktionszahlen gegenseitig zu kürzen und so die Ausrechnung erheblich zu vereinfachen.

Durch die Einführung des decimalen Münz-, Maß- und Gewichtssystems hat sich dieß geändert. Das Resolviren und Reduciren ist jetzt so einfach, daß es auf die Wahl der Rechnungsform einen Einfluß nicht mehr haben kann. Geeignet ist der Kettensatz also nur noch für gewisse wirklich

zusammengesetzte Aufgaben, wie solche besonders im Geschäftsleben des Handelsstandes vorkommen. Für das kaufmännische Rechnen und für die Handelsschule wird er daher noch immer wichtig sein; für die Volksschule dagegen ist er nun entbehrlich. Und da er ohnehin sehr leicht und darum gewöhnlich zum todten Mechanismus übergeht, da er ferner, einmal eingeübt, nicht bloß in den geeigneten Fällen, sondern seiner leichten Anwendbarkeit wegen und aus Denkträgheit gerne überall angewendet werden will und hierdurch zum gedankenlosen, schablonmäßigen Rechnen überhaupt hinführt; so besteht Grund genug, ihn von der Volksschule völlig auszuschließen.

Kommen zusammengesetzte Aufgaben der Art, von denen hier die Rede ist, beim Rechenunterrichte vor, so leite man die Schüler an, sie in einfache zu zerlegen, oder sie in Bruchform durch einen Ansatz so auszuführen, wie es im Nachstehenden gezeigt werden wird. Was wir über den Kettensatz bringen, ist daher nicht für die Schule, sondern lediglich für den Lehrer, welcher denselben immerhin kennen lernen soll.

§. 311.

Beispiel 1. Wie viel Dollar betragen 1200 franz. Fr., wenn 5 franz. Fr. = 4 Reichsmark, und 30 Reichsmark = 7 Dollar?

Daß dieß eine zusammengesetzte Aufgabe, jedoch nicht von gleicher Art mit den in §. 306 behandelten ist, springt in die Augen. Französische Franken sollen in Dollars umgerechnet werden. Die Aufgabe bezeichnet aber nicht das Verhältniß dieser beiden Geldsorten selbst zu einander, sondern das Verhältniß zwischen Franken und Reichsmark und das zwischen Reichsmark und Dollar. Es gibt also zwei einfache Aufgaben und zugleich auch zweierlei Wege, welche zum Ziele führen. Wir können nämlich entweder zunächst suchen, wie viel 4 ℳ. oder 5 Fr. in Dollar betragen und davon auf 1200 Fr. übergehen, oder auch die 1200 Fr. zunächst in Mark und diese in Dollar verwandeln.

Erste Weise und zwar durch 2 einfache Rechnungen.

a. 4 ℳ. (oder 5 Fr.), wie v. Dollar?

30 ℳ.	7 Doll.
4 „	?

30 ℳ.
1 „
4 „

$$\frac{7 \cdot 4}{30} = \frac{28}{30} \text{ Doll.}$$

b. 1200 Fr., wie viel Dollar?

5 Fr.	$^{28}/_{30}$ Doll.
1200 „	?

5 Fr.
1 „
1200 „

$$\frac{28 \cdot \overset{8}{\cancel{1200}}}{\cancel{30} \cdot \cancel{5}} = 224 \text{ Doll.}$$

In einem Ansatze.

30 ℳ.
1 „
4 ℳ. (=5 Fr.)
1 „
1200 „

$$\frac{7 \text{ Doll.} \times 4 \times \overset{8}{\cancel{1200}}}{\cancel{30} \times \cancel{5}} = 224 \text{ Doll.}$$

30 ℳ. = 7 Doll.; 1 ℳ. = 7 Doll., getheilt durch 30, und 4 ℳ. = 4 × 7 Doll., getheilt durch 30. So viel Dollar betragen auch 5 Fr., also macht 1 Fr. den 5. Theil davon, und 1200 Fr. betragen dieses 1200mal.

Zweite Weise, zunächst durch 2 einfache Rechnungen.

a. 1200 Fr., wie viel M.?	b. 960 M., wie viel Dollar?
5 Fr. — 4 M.	30 M. — 7 Doll.
1200 „ — ?	960 „ — ?
5 Fr.	30 M.
1 „	1 „
1200 „ $\frac{4 \cdot \overset{240}{\cancel{1200}}}{\cancel{5}} = 960$ M.	960 „ $\frac{7 \cdot \overset{32}{\cancel{960}}}{\cancel{30}} = 224$ Doll.

Frei im Kopfe rechnen wir: 5 Fr. = 4 M.; so oft ich 5 Fr. habe, so oft habe ich 4 M.; so oft also 5 Fr. in 1200 Fr. enthalten sind, so vielmal 4 M. geben diese. Nun sind 5 Fr. in 1200 Fr. 240mal enthalten; also machen 1200 Fr. auch 240 × 4 oder 960 M. Diese Anzahl von Mark verwandeln wir nun eben so in Dollar.

Da 30 M. = 7 Doll., so machen 960 M. so vielmal 7 Doll., als 30 M. in 960 M. enthalten sind; und da 30 M. in 960 M., wie 3 in 96 = 32mal, so gibt es 32 × 7 oder 224 Doll.

Ganz so lösen wir die Aufgabe auch schriftlich in einem Ansatze

So oft in 1200 Fr. (notirt:) . .	1200
5 Fr. enthalten sind	$\frac{1200}{5}$
so vielmal 4 M. kommen . . .	$\frac{1200 \cdot 4}{5}$
und so oft hierin 30 M. enthalten sind .	$\frac{1200 \cdot 4}{5 \cdot 30}$
so vielmal 7 Dollar kommen . .	$\frac{1200 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 30}$

Gekürzt: $\frac{\overset{8}{\cancel{1200}} \cdot 4 \cdot 7}{\cancel{5} \cdot \cancel{30}} = 224$ Dollar.

Dieselbe Art zu schließen und der nämliche Gedankengang liegt dem Kettensatze zu Grunde, bei welchem die Rechnung sich folgendermaßen gestaltet:

? Doll.	~~1200~~ Fr. 8
~~5~~ Fr.	4 M.
~~30~~ M.	7 Doll.
	224 Doll.

So oft in 1200 Fr. 5 Fr. enthalten sind, so vielmal 4 M., und so oft hierin 30 M. enthalten sind, so vielmal 7 Doll. kommen.

Also sind 1200 fr. Fr. = 1200 × 4 M., dividirt durch 5 = 1200 × 4 × 7 Doll., dividirt durch 5 × 30; gekürzt = 8 × 4 × 7 oder 224 Dollar.

Worin besteht nun das Eigenthümliche dieser Rechnungsform?

1) Die Zahlen stehen in zwei senkrechten Reihen untereinander.

2) Als erstes Glied der linken Reihe steht ein Fragezeichen (gewöhnlich mit dem Namen der gesuchten Größe) und ihm gegenüber als erstes rechtes Glied die gegebene Größe, welche umzurechnen ist.

3) Das linke Glied jeder folgenden (wagrechten) Zeile schließt sich durch gleichen Namen an das vorstehende rechte an.

4) Jede wagrechte Zeile enthält zwei gleiche Werthe.

5) Der Name des untersten rechten Gliedes ist gleich dem des obersten linken.

6) Die Zahlen zur rechten Seite bilden die Faktoren des Dividenden, die zur linken Seite die Faktoren des Divisors, weßhalb sie auch gegenseitig gekürzt werden können.

Fragen wir, warum diese Rechnungsform zum Mechanismus leicht übergehe, so heißt die Antwort: Weil dieselbe dem Rechner es möglich macht, den Ansatz zu fertigen und die Ausrechnung zu vollziehen, ohne sich dabei auch der inneren Gründe des Verfahrens bewußt zu sein. Bei Fertigung des Ansatzes wird denn auch gewöhnlich bloß gedacht oder gesprochen:

Wie viel Dollar	=	1200 Fr.,
wenn 5 Fr.	=	4 ℳ
und 30 ℳ	=	7 Dollar.

Dann wird ohne Weiteres gekürzt und die Rechnung ausgeführt. Der eigentliche Grund, warum einzelnen Zahlen gerade diese, anderen jene Stelle angewiesen, die eine Zahl als dividirendes, die andere als multiplicirendes Glied gesetzt wird, kommt gewöhnlich nicht in Betracht.

Beispiel 2. Ein Handlungshaus in Deutschland bezieht aus Petersburg 750 russ. Pfd. einer Waare; wie viel beträgt sein Erlös hieraus, wenn das Kilo um 2,40 ℳ abgegeben, dabei aber von 25 kg je 1 kg eingewogen wird, und wenn 100 russ. Pfd. = 41 Kilo?

Berechnung und zwar nach der zweiten Weise.

Die Aufgabe zerfällt in drei Theile: 1. Wie viel Kilo betragen 750 russ. Pfund? 2. Wie viel Kilo hievon werden beim Wiederverkaufe in Folge des Einwiegens nur bezahlt? 3. Wie viel beträgt der Erlös? — Einzeln ausgeführt, gibt es also 3 Rechnungen.

a.

100 russ. Pfd.	41 kg
750 „ „	?

100 russ. Pfg.
1 „ „
750 „ „

$\frac{41 . 750}{100} = 307{,}5 \text{ kg}$

b.

25 kg	24 kg
307,5 kg	x

25,0 kg
0,1 „
307,5 „

$\frac{24 . \overset{123}{\cancel{3075}}}{\underset{10}{\cancel{250}}} = 295{,}2 \text{ kg}$

c. 2 9 5,2 × 2,4 ℳ

1 1 8 0 8
5 9 0 4
7 0 8,4 8 ℳ

In einem Ansatze.

a. Bruchform. So oft in 750 russ. Pfd. (notirt:) 750

100 russische Pfund enthalten sind, so vielmal 41 Kilo kommen: $\frac{750 . 41}{100}$

So oft hierin 25 Kilo enthalten sind, so vielmal 24 Kilo werden ausgewogen $\frac{750 . 41 . 24}{100 . 25}$

Und so oft 1 Kilo ausgewogen wird, so vielmal 2,4 ℳ werden bezahlt: $\frac{750 \,.\, 41 \,.\, 24 \,.\, 2{,}4}{100 \,.\, 25}$

Gekürzt: $\frac{\overset{3}{\overset{\cancel{15}}{\cancel{750}}} \,.\, 41 \,.\, 12 \,.\, 24}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{100}} \,.\, \underset{5}{\cancel{25}} \,.\, 10} = \frac{3542{,}4}{5\cancel{0}} = 708{,}48$ ℳ.

b. Kettensatz, mit demselben Gedankengang.

? ℳ	$75\cancel{0}$ russ. Pfd. $\cancel{15}$. 3
$\cancel{24}0\cancel{0}$ russ. Pfd.	41 kg
5 . $\cancel{25}$ kg	$\cancel{24}$ kg 12
1 kg	$\cancel{2,4}$ ℳ
10	24
$5\cancel{0}$	3542,4 = 708,48 ℳ.

Beispiel 3. Wie viel russische Silberrubel betragen 2400 spanische Piaster, wenn sich verhält der Piaster zum franz. Franken wie 34 zu 7, der franz. Frank zur deutschen Reichsmark wie 4 zu 5 und die deutsche Reichsmark zum russ. Silberrubel wie 4 zu 13?

Verwandlung der Verhältnisse in Gleichungen.

Da sich verhält
der span. Piaster zum franz. Fr. wie 34 : 7, so sind 7 Piaster = 34 Fr.
der französische Fr. zur Reichsmark wie 4 : 5, so sind 5 Fr. = 4 ℳ.
die Reichsmark zum S.-Rubel wie 4 : 13, so sind 13 Reichsm. = 4 S.-R.

Nun verwandeln wir die 2400 span. Piaster in franz. Fr., dann diese in deutsche Reichsmark, und diese in Silberrubel. Es gibt also 3 einfache Rechnungen. Wir führen sie sogleich in einem Ansatze aus.

a. Bruchform. So oft in 2400 Piastern 7 Piaster enthalten sind, so vielmal 34 franz. Fr. kommen: 2400; $\frac{2400 \,.\, 34}{7}$

So oft hierin 5 fr. Fr. enthalten sind, so vielmal 4 deutsche Reichsmark kommen: $\frac{2400 \,.\, 34 \,.\, 4}{7 \,.\, 5}$

Und so oft hierin 13 Reichsmark enthalten sind, so vielmal 4 russische Silberrubel kommen: $\frac{2400 \,.\, 34 \,.\, 4 \,.\, 4}{7 \,.\, 5 \,.\, 13}$

Gekürzt: $\frac{\overset{480}{240\cancel{0}} \,.\, 34 \,.\, 4 \,.\, 4}{7 \,.\, \cancel{5} \,.\, 13} = \frac{261120}{91} = 2869{,}45\,..$ Silberrubel.

b. Kettensatz, mit der nämlichen Schlußfolge.

? S.-R.	2400 Piaster
7 Piaster	34 Fr.
5 Fr.	4 ℳ
13 ℳ	4 S.-R.
91	261120 S.-R.

§. 312. Schlußbemerkung.

Wir haben nun für die schriftliche Ausführung der Regeldetri- oder Verhältnißrechnungen außer dem Kettensatze, welcher in der Volksschule nicht angewendet werden soll, dreierlei Formen gegeben: den Zweisatz in Bruchform, den Zweisatz in Divisionsform und die Proportion. Es versteht sich von selbst, daß damit nicht gemeint ist, als sollten alle drei Formen oder zwei derselben nach oder neben einander auch in der Schule behandelt werden. Eine einzige bestimmte Rechnungsform und bei ihrer Anwendung eine auf klarer Einsicht beruhende sichere Fertigkeit, das ist Aufgabe und Ziel der Volksschule. Daß wir für diese die Zweisatz- oder Schlußrechnung als ganz besonders geeignet erachten, ist schon bemerkt worden. Der Lehrer entscheide sich für eine der beiden Formen, welche wir für sie gegeben haben. Mit der Einführung einer geeigneten Rechnungsform ist jedoch noch nicht alles Erforderliche geschehen. Nicht die Form ist die Hauptsache. Wichtiger ist das Verhältniß des innern Wesens, der klare Durchblick der Beziehungen, die verständige Beurtheilung der Aufgaben. Und nur da, wo man auch diesen Punkt mit Liebe und Geschick recht in's Auge faßt, wo die Aufgaben so durchgesprochen werden, daß die Schüler eine völlig klare Einsicht in die Sache und in den Gang der Ausrechnung erhalten, wird man den Rechenunterricht auch mit dem rechten Erfolg gekrönt zu sehen.

Dritte Abtheilung.

Regeldetri- oder Verhältnißrechnungen,

nach den Gegenständen geordnet.

§. 313.

Die verschiedenen Gattungen der nun zur unterrichtlichen Behandlung kommenden Aufgaben entsprechen den verschiedenen Lebensverhältnissen, welche rechnerisch zu bestimmende Leistungen und Geschäfte mit sich bringen. Die Gliederung des Stoffes in diesem Sinne soll Gelegenheit und Veranlassung geben, die betreffenden Verhältnisse einmal klar und anschaulich in's Licht zu setzen, einerseits, damit der Schüler eine seiner Entwicklungsstufe entsprechende und seinen Gesichtskreis erweiternde Einsicht in dieselbe erhalte, andrerseits, damit er, um die Aufgaben mit Sinn und Verstand rechnen zu können, die Art der Abhängigkeit des Gesuchten vom Gegebenen deutlich erkenne und mit den oft eigenthümlichen Kalkulationen und Benennungen bekannt werde.

Das Erste und Wichtigste im Unterrichte ist also von jetzt an die Belehrung des Schülers über die Sachverhältnisse, sowohl im Allgemeinen, als im Besondern. Zur Belehrung im Allgemeinen sollen die bei den einzelnen Abschnitten gegebenen Vorbemerkungen dienen. Veranlassung im Besonderen bieten solche Aufgaben, welche, um mit Verständniß gelöst werden zu können, Kenntniß der betreffenden Sach- oder Lebensverhältnisse voraus-

setzen. — Das Zweite ist die Beurtheilung der vorkommenden Zahlenverhältnisse und die Erörterung der Ausrechnungsweise. Dabei kommt in Erwägung, ob zur Lösung der Aufgabe schon eine der Grundrechnungsarten hinreiche und welche, oder ob der Zweisatz in Anwendung zu kommen habe; ob die Aufgabe auf einmal ausgerechnet werden könne, oder ob und wie sie zerlegt werden müsse und in welcher Ordnung die einzelnen Theile auszuführen seien u. s. w. — Die Aufgaben müssen also überhaupt so besprochen werden, daß jedem Schüler daraufhin völlig klar ist, was zur Erzielung des verlangten Resultats zu geschehen hat, und die befähigteren derselben noch überdieß sich angeregt fühlen, auch beim Zifferrechnen außer dem gewöhnlichen oder Normal-Verfahren noch eine zweite und dritte Ausrechnungsweise anzuwenden.

Der Lehrer aber muß wissen, welche Abschnitte er in seiner Schule durchzumachen habe und in wieweit; denn Alles ist nicht für Alle. Er muß ohne das Allgemeine zu vernachlässigen, auch dem lokalen Bedürfnisse Rechnung tragen und die vorherrschenden Erwerbszweige seines Orts in ihrem rechnerischen Theile besonders eingehend und ausführlich behandeln.

Schließlich noch die Frage: Haben nun bei dem Berechnen angewandter Aufgaben auch noch besondere Uebungen mit der reinen und der bloß benannten Zahl einzutreten, oder nicht? Antwort: Ja! Sobald es sich zeigt, daß in irgend einer Operation die erforderliche Sicherheit und Schlagfertigkeit nicht mehr vorhanden ist; so wird dieselbe sofort aufs Neue geübt und nöthigenfalls auch wieder, wo möglich durch einen der Schüler selbst, veranschaulicht. Manchem Schwachbegabten, welcher inzwischen in seiner Entwicklung doch auch fortgeschritten ist, wird jetzt das rechte Licht dabei aufgehen und für die andern ist es eine nicht überflüssige Auffrischung.

Tauschrechnung.

§. 314.

Die Mannigfaltigkeit der Dinge, die wir zum Leben oder zum Gebrauche nöthig haben, ist so groß, daß der einzelne seinen Bedarf unmöglichst selbst erzeugen oder herstellen kann. Daher die Theilung der Arbeit. Ein großer Theil der Menschen gibt sich bloß mit Gewinnung der Rohprodukte ab: der Landmann mit dem Bau der Feldfrüchte und mit der Viehzucht, der Bergmann mit dem Zutagfördern der Metalle. Andere beschäftigen sich bloß damit, die Rohprodukte zum Genusse zuzurichten oder zum Gebrauche zu verarbeiten. Und wie vielfach ist diese Beschäftigung! Wie vielfach allein in Bezug auf die Kleiderstoffe! Und wie vielfach sind die Geschäfte der Metallarbeiter! So erzeugen und fertigen also die Einen dieß, die Andern jenes.

Am häufigsten geschieht es nun wohl, daß Jeder das, was er von seinen Erzeugnissen an Andere abtreten will, gegen baares Geld austauscht, d. i. verkauft, und das, was er von andern bedarf, für baares Geld sich eintauscht, d. i. einkauft. Es kommt aber auch vor, daß die Waaren selbst gegen einander umgetauscht werden. Und dabei sind es vorzüglich drei wesentlich verschiedene Fälle, welche stattfinden. Ent-

weder will man zwei Gegenstände umtauschen, deren Quantität (Größe oder Menge) im Voraus genau bestimmt ist, und den Werthunterschied durch baares Geld ausgleichen; oder man will für einen Gegenstand von bestimmter Quantität genau so viel von einem andern umtauschen, als zur Ausgleichung des Werthes erforderlich ist; oder man will aus der Quantität und dem Werthe eines Tauschgegenstandes den Preis von irgend einer Einheit desselben wissen.

§. 315. Der Werthunterschied der Tauschgegenstände wird gesucht.

1) A tauscht seine Taschenuhr gegen eine neue um. Die neue Uhr kostet 45 ℳ; die alte wird zu 18 ℳ 50 ₰ angenommen; wie viel hat A darauf zu zahlen?

Antw. So viel, als die neue Uhr mehr werth ist denn die alte, mithin so viel als 45 ℳ mehr sind, denn 18 ℳ 50 ₰, d. i. 26 ℳ 50 ₰.

2) Jemand kauft einen neuen Ofen um 75 ℳ und gibt einen alten von 2 Ctr. 48 Pfd. daran; das Pfd. von diesem wird zu 15 ₰ gerechnet; wie viel ist noch darauf zu legen?

Ausr. Die Tauschgegenstände sind 2 Oefen, ein neuer und ein alter. Der Werth des neuen ist bekannt; er beträgt 75 Mark. Den des alten müssen wir erst berechnen; er beträgt 248 × 15 Pfennige. 248 × 10 = 2480 Pfg. = 24 ℳ 80 ₰; 248 × 5 ist $^1/_2$ von 24 ℳ 80 ₰ = 12 ℳ 40 ₰; 24 ℳ 80 ₰ + 12 ℳ 40 ₰ = 37 ℳ 20 ₰. Wie viel ist also der neue Ofen mehr werth als der alte? Antw. 75 ℳ — 37 ℳ 20 ₰ = 37 ℳ 80 ₰. Mithin muß der Eisenhändler außer dem alten Ofen noch 37 ℳ 80 ₰ baar erhalten.

3) Eine Frau kauft 16,5 m Zeug, das Meter zu 1 ℳ 15 ₰, und gibt dagegen 7 Pfd. 300 g Wolle, das Pfd. zu 2 ℳ 60 ₰. Wie viel beträgt das Aufgeld?

Hier ist zuerst der Werth der beiden Tauschgegenstände zu bestimmen; dann kann die Ausgleichung erfolgen.

a. Die 16,5 m à 1,15 ℳ kosten

16 × 1 ℳ	=	16 ℳ
16 × 10 ₰	=	1,60
16 × 5 ₰	=	0,80
$^1/_2$ × 1,15	=	0,58
		18,98 ℳ

b. Die 7 Pfd. 300 g Wolle kosten

7 × 2,60 ℳ	=	18,20 ℳ
$^3/_5$ × 2,60 =		
3 × 0,52 ℳ	=	1,56 ℳ
		19,76 ℳ
		— 18,98 ℳ
		0,78 ℳ

Die Wolle hat 78 ₰ mehr Werth als der Zeug; also hat die Frau diesen Betrag noch zu erhalten.

§. 316. Die Quantität des einen Tauschgegenstandes wird gesucht.

Die Berechnung dieser Aufgaben ist mit einer Division im Sinne des Enthaltenseins verbunden. Erforderlichenfalls werden die Uebungen unter §. 226 wiederholt.

1) A will für 1 hl Wein Zwetschgen eintauschen; das hl Wein kostet 33 ℳ 75 ₰, das Hektoliter Zwetschgen 2 ℳ 25 ₰; wie viel Hektoliter Zwetschgen wird A erhalten?

Aufl. Da das Hektoliter Wein einen Werth von 33 ℳ 75 ₰ hat, so muß A auch für 33 ℳ 75 ₰ Zwetschgen bekommen. 1 hl Zwetschgen kostet 2 ℳ 25 Pfg. So oft daher 2 ℳ 25 ₰ in 33 ℳ 75 ₰ enthalten sind, so vielmal 1 hl Zwetschgen bekommt A.

Ausr. 2 ℳ 25 ₰ = $2^{1}/_{4}$ ℳ = $^{9}/_{4}$ ℳ; 33 ℳ 75 ₰ = $33^{3}/_{4}$ = $^{135}/_{4}$ ℳ; $^{9}/_{4}$ ℳ sind in $^{135}/_{3}$ ℳ 15mal enthalten. Also hat A 15 hl Zwetschgen zu bekommen.

Die Berechnung ist richtig, wenn 15 hl Zwetschgen à 2,25 ℳ = 1 hl Wein zu 33,75 ℳ Ausrechnung! — Dieß stets als Probe.

2) Wie viel Pfd. Lichter erhält man für $8^{1}/_{2}$ Pfd. Unschlitt, wenn 1 Pfd. Unschlitt 48 Pfg. und 1 Pfd. Lichter 72 Pfg. kostet?

Aufl. Warum kostet das Pfd. Lichter mehr, als das Pfd. Unschlitt? (Abgang, Arbeitskosten, Verzinsung des Betriebskapitals.) Vergleicht diese Aufgabe mit der vorigen! (Dort werden für 1 hl Wein Zwetschgen eingetauscht; hier sollen für $8^{1}/_{2}$ Pfd. Unschlitt Lichter eingetauscht werden. Der Werth von dem hl Wein war bekannt, der Werth von den $8^{1}/_{2}$ Pfd. Unschlitt ist nicht bekannt, er ist also erst zu suchen). Ausr. 8 Pfd. Unschlitt machen 8 × 48 Pfg. oder 3 ℳ 84 ₰; das halbe Pfund macht 24 Pfg.; zusammen 4 ℳ 8 Pfg. — Für 72 ₰ erhält man 1 Pfd. Lichter, für 4 ℳ 8 ₰ oder 408 ₰ also so vielmal 1 Pfd., als 72 Pfg. darin enthalten sind. 72 Pfg. sind in 360 Pfg. 5mal und in 48 ₰ noch $^{2}/_{3}$mal enthalten. Für $8^{1}/_{2}$ Pfd. Unschlitt erhält man also $5^{2}/_{3}$ Pfd. Lichter.

3) Eine Frau gibt dem Kaufmann $6^{1}/_{2}$ Pfd. Federn, das Pfd. zu 4 ℳ 20 ₰; von dem Betrage läßt sie eine alte Schuld von 7 ℳ 50 ₰ abrechnen, und für das übrige Geld nimmt sie Barchent, das Mtr. zu 80 ₰; wie viel Meter erhält sie?

a. $6^{1}/_{2}$ Pfd. à 4,20 ℳ
6 Pfd. = 25,20 ℳ
$^{1}/_{2}$ Pfd. = 2,10 „
$6^{1}/_{2}$ Pfd. = 27,30 ℳ
— 7,50 „
19,80 ℳ

b. 8Ø | 198Ø | 24,75 × 1 m
16 | = 24 m 75 cm
38
6,0
40

Die $6^{1}/_{2}$ Pfd. Federn machen 27 ℳ 30 ₰. Hievon kommt zunächst die Schuld in Abzug. Rest 19 ℳ 80 ₰. Für diesen Betrag nimmt die Frau Barchent, das Meter zu 80 ₰. Für 19 ℳ 80 ₰ erhält sie so viele Meter, als 80 ₰ in 19 ℳ 80 ₰ enthalten sind. 80 ₰ in 1980 ₰ = 8 in 198 = 4 in 99 = $24^{3}/_{4}$. Die Frau erhält also $24^{3}/_{4}$ m = 24 m 75 cm Barchent.

§. 317. **Der Preis von irgend einer Einheit des einen Tauschgegenstandes ist zu bestimmen.**

1) Um ihre Güter zu arrondiren gibt A dem B einen Acker von 87 Ar und erhält dagegen einen andern von 75 Ar nebst 126 ℳ. Aufgeld; beide Grundstücke haben gleiche Lage und Bodengüte; wie berechnet sich das Ar und wie das Hektar?

Ausr. A bekommt für seinen Acker einen andern von gleicher Güte und Lage und außerdem noch 126 Mark Aufgeld. Warum dieß? Weil sein Acker, den er abtrat, um 12 Ar größer ist, als der andere. Die 126 ℳ. sind also der Werth für 12 Ar. Mithin kommt 1 Ar auf $^1/_{12}$ von 126 ℳ. = $10^1/_2$ ℳ., und das Hektar auf 100 × $10^1/_2$ ℳ. = 1050 ℳ.

2) Ein Oekonom schickt in eine Kunstmühle $7^3/_4$ hl Roggen und erhält dagegen 835 Pfd. Mehl; wie hoch kommt der Centner Mehl, wenn das Hektoliter Roggen 12 ℳ. 60 ₰. kostet?

Aufl. Die 835 Pfd. Mehl kommen so hoch, als die $7^3/_4$ hl Roggen. Ich suche daher zunächst, welchen Werth die $7^3/_4$ hl Roggen haben.

Ausr.	7 hl à 12 ℳ. 60 ₰.	= 84 ℳ.
		+ 4,20
	$^1/_2$ hl	= 6,30
	$^1/_4$ hl	= 3,15
	$7^3/_4$ hl	= 97,65 ℳ.

Denselben Werth haben die 735 Pfd. Mehl. Die Aufgabe heißt jetzt: 835 Pfd. Mehl kommen auf 97,65 ℳ.; wie berechnet sich der Centner?

835 Pfd.	97,65 ℳ.	Oder 835 : 100 = 97,65 ℳ. : x
100 Pfd.	?	x = 11,69 ℳ.

3) A gibt dem B 5 hl Kartoffeln und nimmt dafür Heu. Der gewöhnliche Preis für das hl ist 2 ℳ. 50 ₰.; A setzt es aber zu 3 ℳ. an. a. Wie muß nun B, um keinen Schaden zu haben, den Ctr. Heu rechnen, wenn dessen Verkaufspreis = 1 ℳ. 15 ₰.? b. Wie viel Ctr. hat er an A abzugeben?

Ausr. a. A setzt das Hektoliter Kartoffeln von 2 ℳ. 50 ₰ auf 3 ℳ., mithin um 50 ₰. oder um $^1/_5$ des gewöhnlichen Preises höher; also muß B den Centner Heu, um nicht im Nachtheil zu sein, auch um $^1/_5$ höher als 1 ℳ. 15 ₰. rechnen. $^1/_5$ von 1 ℳ. 15 ₰. = 23 ₰.; 1 ℳ. 15 Pfg. + 23 Pfg. = 1 ℳ. 38 ₰. Dieß läßt sich auch so finden: $2^1/_2$ ℳ. gewöhnlicher Preis machen 3 ℳ. im Austausche; wie viel betragen demnach 1 ℳ. 15 ₰. im Austausche?

2,50 ℳ.	3 ℳ.
1,15 „	?

250 ₰.
1 „
115 „

$$\frac{3 \cdot \overset{23}{\cancel{115}}}{\underset{50}{\cancel{250}}} = \frac{69}{50} = 1{,}38 \text{ ℳ.}$$

b. Die 5 hl Kartoffeln, welche A an B abgibt, machen 5 × 3 oder 15 ℳ. Hiefür muß B dem A so vielmal 1 Ctr. Heu geben, als 1,38 ℳ in 15 ℳ enthalten sind.

1,38	15,00	
138	1500	10,869.. Ctr. oder 10 Ctr. 87 Pfd.

Verwandlungs-Rechnung.

§. 318. Vorbemerkung.

Sowohl bei dem Kaufe als bei dem Tausche sind es entweder einzelne Dinge, oder größere und kleinere Quantitäten gewisser Waaren und deren Werth, um das sich's handelt.

Die Quantität, d. i. die Menge oder das Wieviel der Waaren wird in manchen Fällen durch Zählen, in den meisten Fällen jedoch durch Messen oder Wägen bestimmt. Der Werth der Dinge aber wird überall, wenigstens bei den Kulturvölkern, nach geprägten Silber- oder Goldstücken, welche man Münzen nennt, festgestellt. Man sagt: dieses oder jenes Ding, die eine oder die andere Quantität von einer Waare hat einen Werth von so und so vielen Stücken dieser oder jener Münze.

Nun ist es natürlich, daß einerseits die Maße und Gewichte, durch welche die Quantität der Waaren bestimmt wird, und andrerseits die Gold- und Silberstücke, welche zur Feststellung ihres Werthes dienen, nicht von beliebiger und stets veränderlicher Größe sein dürfen. Der Käufer will die Waare nach einem bestimmten und ihm bekannten Maße oder Gewichte gemessen oder gewogen haben, und der Verkäufer will dafür mit gangbaren, nach Werth und Geltung ihm bekannten Münzen bezahlt sein. Daher muß es auch solche festbestimmte und allgemein anerkannte und bekannte Maße und Gewichte, Gold- und Silbermünzen geben. Und diese gibt es, zwar nicht die nämlichen in allen Ländern, die gleichen Maße und Gewichte aber gegenwärtig doch in vielen Staaten Europa's (in Deutschland, Frankreich, Belgien, Holland, in der Schweiz, in Spanien, Portugal und in Griechenland.) Ein besonderes einheitliches Münzsystem hat indeß fast jeder größere Staat, seit 1871 auch das deutsche Reich.

Während die Staatsregierung die Maße und Gewichte, deren man sich beim Handel und Wandel zu bedienen hat, bloß prüft und zum Zeichen dessen mit einem Stempel versieht, prägt sie die Münzen selbst und hat sich das ausschließliche Recht dazu vorbehalten. Die Seite der Münze, welche das Bild des Landesfürsten oder das Wappen trägt, heißt die Vorderseite (Avers). Die andere Seite, welche den Namen und die Geltung der Münze zeigt, heißt Kehr- oder Rückseite (Revers.)

Die Gold- und Silbermünzen werden nicht aus reinem Metalle geprägt. Bei jenen enthält das Münzmetall einen Zusatz von Silber oder Kupfer, oder es ist mit beiden Metallen zugleich legirt; bei diesen ist es mit

Kupfer vermischt. Durch den Zusatz wird das Münzmetall härter, und die Münzkosten werden zum Theil dadurch gewonnen. Die legirte Masse einer Münze heißt Schrot, das edle Metall darin Korn.

Das Mischungsverhältniß der Gold- und Silbermünzen des deutschen Reichs ist auf 900 Tausendtheile Gold oder Silber und 100 Tausendtheile Zusatz festgestellt und als Werthsverhältniß des Silbers zum Golde der durchschnittliche Marktkurs 1 : 15½ angenommen.

Ausländische Münzen werden bei uns nach ihrem Gold- und Silberwerthe berechnet.

§. 319. Ausländische Münzen in deutscher Reichswährung ausgedrückt.

Arabien, 1 Piaster	=	3,50 ℳ.
Belgien, 1 Frank zu 100 Centimen . . .	=	0,80 „
Bolivia, 1 Piaster	=	4,00 „
Brasilien, 1 Milreis zu 1000 Reis . . .	=	3,50 „
Chile, 1 Pesos oder Curantpiaster . . .	=	4,20 „
China, 1 Liang oder Tehl	=	6,00 „
Dänemark, 1 Reichsthaler zu 96 Schillingen .	=	2,20 „
Ecuador, 1 Peso	=	3,00 „
Egypten, 1 Piaster	=	0,21 „
England, 1 Pfd. Sterling zu 20 Schillingen à 12 Pence	=	20,25 „
Frankreich, 1 Frank zu 100 Centimen . .	=	0,80 „
Griechenland, 1 Drachme zu 100 Lepta . .	=	0,72 „
Holland, 1 Gulden zu 100 Cents . . .	=	1,60 „
Japan, 1 Tehl oder Tale	=	2,80 „
Italien, 1 Lira zu 100 Centesimi . . .	=	0,80 „
Marokko, 1 Peso oder spanischer Piaster . .	=	4,20 „
Mexiko, 1 Piaster zu 8 Realen . . .	=	4,20 „
Mittelamerikanische Freistaaten, 1 Piaster .	=	4,20 „
Montevideo, 1 neuer Peso	=	4,20 „
Neugranada, 1 Piaster	=	4,20 „
Nordamerikanische Union, 1 Doll. zu 100 Cents	=	4,20 „
Norwegen, 1 Speciesthaler zu 120 Schilling .	=	4,36 „
Ostindien, englisch, 1 Compagnie-Rupie . .	=	1,92 „
Persien, 1 Rupie	=	1,55 „
Peru, 1 Piaster	=	4,20 „
Portugal, 1 Milreis zu 1000 Reis . . .	=	4,00 „
Rußland, 1 Silber-Rubel zu 100 Kopeken . .	=	3,20 „
Schweden, 1 Thaler Banko zu 40 Schilling à 12 Pfennig	=	1,12 „
„ 1 Reichsthaler Species . . .	=	4,48 „
Schweiz, 1 Frank zu 100 Rappen oder Centimen .	=	0,80 „
Siam, 1 Tikal	=	2,60 „
Spanien, 1 neuer Piaster zu 2 Eskudo oder 5 Pesetas	=	4,20 „
Tunis, 1 Piaster	=	0,60 „
Türkei, 1 Piaster (500 Piaster = 1 Beutel) .	=	0,17 „
Venezuela, 1 Peso	=	3,10 „

§. 320. Münzen-Umrechnung.

1. Deutsche und französische Währung.

1 Fr. = 80 Reichspfg.; also sind 100 Fr. = 80 ℳ, 5 Fr. = 4 ℳ.

1) Wie viel Mark betragen 84 Fr.? (So vielmal 5 Fr., so vielmal 4 ℳ; 80 oder 16 × 5 Fr. = 16 × 4 oder 64 ℳ; 4 Fr. = 4 × 80 oder 320 ₰ = 3 ℳ 20 ₰; 64 ℳ + 3 ℳ 20 ₰ = 67 ℳ 20 ₰.)

2) 15 000 Fr., wie viel Mark? (100 Fr. = 80 ℳ; 1000 Fr. = 800 ℳ; also sind 15 000 Fr. = 15 × 800 = 8000 + 4000 oder 12 000 ℳ.)

3) 150 ℳ, wie viel franz. Fr.? (So vielmal 4 ℳ, so vielmal 5 Fr.; 150 = 120 + 28 + 2; 120 oder 30 × 4 ℳ = 30 × 5 oder 150 Fr.; 28 oder 7 × 4 ℳ = 7 × 5 oder 35 Fr.; 150 + 35 = 185 Fr.; 2 ℳ = $^1/_2$ × 5 oder 2,5 Fr.; 185 + 2,5 = 187,5 Fr.)

4) 1800 ℳ, wie viel Fr.? (80 ℳ = 100 Fr.; 800 ℳ = 1000 Fr.; 1600 ℳ = 2000 Fr.; 200 oder 160 + 40 ℳ = $2^1/_2$ × 80 ℳ, daher auch $2^1/_2$ × 100 oder 250 Fr.; 2000 Fr. + 250 Fr. = 2250 Fr.)

5) 356 Fr. 85 Cent., wie viel in deutscher Reichswährung?

a.	b.
1 Fr. = 0,80 ℳ; also sind	5,00 Fr. 4 ℳ
356,85 Fr. = 356,85 × 0,80 ℳ	356,85 „ x
285,48~~00~~ ℳ	4 . 35685 / 500

6) 565,72 ℳ, wie viel in französischer Währung?

a.	b.
Da 4 ℳ = 5 Fr., so ist 1 ℳ = $1^1/_4$ Fr., und 565,72 ℳ =	4,00 ℳ 5 Fr.
565,72 Fr.	565,72 „ x
+ 141,43 „	5 . 56572 / 400
707,15 Fr.	

2. Die deutsche und die österreichische Währung.

Oesterreich rechnet nach Gulden; 1 fl. österr. = 2 ℳ.

Wie die Mark in 100 ₰, so wird der österr. Gulden in 100 kr. eingetheilt. Da 2 ℳ deutsch = 1 fl. österr., so sind auch
200 ₰ deutsch = 100 kr. österr. und
2 ₰ deutsch = 1 kr. österr.

75 fl. österr. = 75 × 2 oder 150 ℳ, und 75 kr. österr. = 75 × 2 oder 150 ₰ = 1 ℳ 50 ₰ deutsch.

75 ℳ = 75 : 2 = $37^1/_2$ fl., und 75 ₰ = 45 : 2 = $37^1/_2$ kr. österr.
125 fl. 83 kr. österr. = 2 × 125,83 = 251,66 ℳ, und
125 ℳ 83 ₰ deutsch = $^1/_2$ × 125,83 = 62,915 fl. österr.

So, der Gulden zu 2 ℳ gerechnet, werden die österr. Staatsschuldscheine an den deutschen Handelsplätzen berechnet. Die Zahlungen nach Oesterreich werden aber gewöhnlich in österr. Banknoten geleistet, welche, je nachdem sie mehr oder weniger gesucht sind, wie andere Werthpapiere im Preise steigen und fallen. Sind die österr. Banknoten z. B. zu 170 notirt, so bedeutet dieß, daß 100 fl. derselben, statt 200 ℳ, nur 170 ℳ kosten.

3. Ausländisches Geld gegenseitig umzurechnen.

1200 Dollar, wie viel russische Silberrubel?

1 Doll. = 4,20 ℳ = 420 ₰

1 S.-R. = 3,20 ℳ = 320 ₰

Der Dollar verhält sich zum russ. Silberrubel wie 420 : 320 = 42 : 32 = 21 : 16. Mithin sind 16 Doll. = 21 S.-R.

16 Doll. 21 S.-R.

1200 „ x

$$\frac{21 \cdot \overset{75}{\not{1}\not{2}\not{0}\not{0}}}{\not{1}\not{6}} = 1575 \text{ S.-R.}$$

§. 321. **Waaren- und Preisumrechnung.**

Ein Seiler kauft 4950 russ. Pfund Hanf für 560 Silberrubel; wie berechnet sich das Kilo, wenn 100 russ. Pfund = 41 Kilo und 1 S.-R. = 3,20 ℳ?

Ich verwandle die russ. Pfd. in Kilo, die Silberrubel in Mark, und berechne alsdann den Preis per Kilo in deutscher Währung.

a. 100 russ. Pfd. 41 kg

4950 „ „ x

$$\frac{41 \cdot 4950}{100} = 2029{,}5 \text{ kg}$$

b. 3,20 ℳ × 560

19200

1600

1792,00 ℳ

c. Nun heißt es: 2029,5 kg zu 1792 ℳ; was kostet 1 kg?

2029,5 | 1792,0 | 0,88 . . . ℳ

Procent-Rechnung.

§. 322. **Vorbemerkung.**

Der Werth der Schnittwaaren wird per Meter, der Flüssigkeiten per Liter und Hektoliter, der Materialwaaren per Kilo und Gramm, vieler zählbaren Dinge per Stück, Dutzend, Mandel und Stock festgesetzt. Zins und Rabatt, oft auch Gewinn und Verlust, sowie die chemischen Bestandtheile mancher Dinge u. s. w. pflegt man vom Hundert (= pro cent = %) zu bestimmen. Was also z. B. bei den Schnittwaaren das Meter ist, das ist in den Fällen, wo der Werth nach Procenten bestimmt zu werden pflegt, das Hundert. Und wie dort der Werth gewöhnlich von 1 Meter gegeben und von einer größeren oder kleineren Länge zu berechnen ist, oder umgekehrt; so ist hier entweder der Werth vom Hundert gegeben und von einer größeren oder kleineren Summe zu suchen, oder es ist der Werth von einer größeren oder kleineren Summe als 100 gegeben und vom Hundert zu berechnen.

A. Mündlich.

§. 323. **Der Werth vom Hundert wird bestimmt.**

1) Ein Handelsmann verkauft für 200 ℳ Waaren und gewinnt damit 42 ℳ; wie viel proc., d. i. wie viel gewinnt er mit 100 ℳ?

(Gewinnt man mit 200 ℳ. 42 ℳ., so gewinnt man mit 100 ℳ. die Hälfte von 42 ℳ., nämlich 21 ℳ.; also ist der Gewinn = 21 %.)

2) Ein Weinhändler kauft für 800 ℳ. Wein, verliert aber beim Verkaufe 75 ℳ.; wie viel proc. also? (Verliert man an 800 ℳ. 75 ℳ., so verliert man an 100 ℳ. $^1/_8$ von 75 = $9^3/_8$ ℳ., der Verlust = $9^3/_8$ %.)

3) Von 400 kg Kartoffeln erhält man nur 98 kg getrocknete Scheiben; wie viel proc.? ($^1/_4$ von 98 kg = $24^1/_2$ kg = $24^1/_2$ %.)

4) 1000 kg Winterreps geben 330 kg Oel, wie viel proc.? ($^1/_{10}$ von 330 = 33 %.)

5) 1200 kg Rohflachs ergeben 210 kg geschwungenen Flachs, wie viel proc.? ($^1/_{12}$ von 210 = $17^1/_2$ %.)

6) Von 2500 Mann Soldaten fielen in einem Gefechte 200 Mann; wie viel proc. beträgt der Verlust? ($^1/_{25}$ von 200 = 8 %.)

---

7) 50 kg Leinsamen geben 14 kg Oel, wie viel proc.? (Geben 50 kg Leinsamen 14 kg Oel, so geben 100 oder 2 × 50 kg Leinsamen 2 × 14 oder 28 kg. Der Oelgehalt beträgt 28 %.)

8) $33^1/_3$ kg Sonnenblumen geben 5 kg Oel; wie viel proc.? (100 = 3 × $33^1/_3$; 3 × 5 kg = 15 kg = 15 %.)

9) 25 kg Buchecker geben 4 kg Oel; wie viel proc. (16 %.)

10) 20 kg Kartoffeln enthalten 14 kg Wasser; wie v. proc. (70 %.)

11) Von 10 Pfd. Rindfleisch gehen durch's Kochen 2 Pfd., durchs Braten $1^1/_2$ Pfd. ab; wie viel beträgt der Verlust proc. (20%, 15%.)

12) Mit 5 ₰. gewinnt man $1^1/_2$ ₰.; wie viel proc. (30 %.)

13) $66^2/_3$ Pfd. Schweinefleisch enthalten 16 Pfd. nährenden Stoff; wie viel proc.? ($66^2/_3$ = 2 × $33^1/_3$, 100 = 3 × $33^1/_3$. Man geht also von $66^2/_3$ auf $33^1/_3$ und dann auf 100; $66^2/_3$ Pfd. enthalten 16 Pfd. Nahrungsstoff; $33^1/_3$ enth. $^1/_2$ von 16 Pfd. = 8 Pfd., 100 Pfd. enth. 3 × 8 oder 24 Pfd. = 24%.)

14) Mit 75 Pfg. gewinnt Jemand 36 Pfg.; wie viel proc.? (48%).

15) Von 40 Kindern starben in ihrem ersten Lebensjahre 7, wie viel proc.? ($17^1/_2$ %.)

16) Eine Hausfrau mischt unter 50 kg Kornmehl 30 kg Gerstenmehl; wie viel proc. Gerstenmehl sind unter der Mischung? (50 + 30 = 80. Unter 80 kg Mischung befinden sich 30 kg Gerstenmehl, wie viel unter 100 kg? Antwort: $37^1/_2$ kg, also $37^1/_2$ %.)

17) Ein Fabrikherr erhöhete den Tagelohn seiner Arbeiter von 2,40 ℳ. auf 3 ℳ., um wie viel proc. also? (240 macht 60, 20 macht 5, 100 macht 25. Die Lohnerhöhung beträgt also 25 %.)

18) Der Bauer A erntet von einem Ackerfeld 15 hl Korn, sein Nachbar von einem gleichgroßen Acker 18 hl; wie viel proc. erntet dieser mehr als jener? (15 macht 3, 5 macht 1, 100 macht 20 × 1 = 20, also 20%.)

---

19) 150 kg Weizenkörner gaben $1^7/_8$ kg Asche, die im Wasser löslich war; wie viel proc.? (150 = $1^7/_8$ kg, 50 = $^1/_3$ von $1^7/_8$ = $^5/_8$ kg, 100 = 2 × $^5/_8$ kg = $1^1/_4$ kg; also $1^1/_4$ %.)

20) 125 kg getrocknete Kartoffelknollen enthalten 8 kg lösliche Asche, wie viel proc.? ($6^2/_5$ %.)

21) A stieg von 450 M. Gehalt auf 525 M.; wie viel proc. beträgt seine Einnahme jetzt mehr? ($16^2/_3$ %.)

22) Von 750 M. Kapital rettete A bei einem Concurse 600 M.; wie viel betrug sein Verlust proc.? (750 — 600 = 150; an 750 M. verliert A 150 M., an 50 M. also $^1/_{15}$ von 150 M. = 10 M., an 100 M. 2 × 10 = 20 M. Der Verlust beträgt also 20 %.)

23) $1^1/_4$ hl Aussaat geben 18 hl Ernte; wie viel proc. also? (Erntet man von $1^1/_4$ oder $^5/_4$ hl 18 hl, so macht es auf $^1/_4$ hl $3^3/_5$ hl, auf 1 hl 4 × $3^3/_5$ = $14^2/_5$ hl und auf 100 hl 100 × $14^2/_5$ = 1440 hl.)

24) Aus $12^1/_2$ kg rohem Hanfe erhält man 7 kg langen Hanf; wie viel proc.? (56 %.)

§. 324. Der Werth von Hundert ist gegeben.

1) A kauft 1 Hektar Wiesen um 800 M. und berechnet, daß ihm so sein Geld 8 % abwirft, wie viel Mark also? (Werfen 100 M. 8 M. ab, so 800 M. 8 × 8 oder 64 M.)

2) Das Fleisch hat durchschnittlich 26 % nährende Stoffe; wie viel kg Nahrungsstoffe enthalten demnach 200 kg Fleisch? 500 kg? 50 kg Fl.? 25 kg? (52, 130, 13, $6^1/_2$ kg Nahrungstheile.)

3) Im Allgemeinen rechnet man von dem in die Mühle gegebenen Getreide auf die Mahlgebühr oder Mitze 10 %, auf das Verstäuben 6 %, auf Kleie 14 % und auf Mehl 70 %; wie viel Kilo macht jedes von 300 kg Weizen? (30 kg Mitze, 18 kg Mehlstaub, 42 kg Kleie, 210 kg Mehl.)

4) Durch Eintrocknen gehen beim Aufspeichern von Körnerfrüchten in dem ersten Jahre 3 % verloren; wie viel wird von 80 hl neuer Frucht nach 12 Monaten noch vorhanden sein? (100 hl machen 3, 20 machen $^3/_5$, 80 machen 4 × $^3/_5$ = $2^2/_5$; 80 — $2^2/_5$ = $77^3/_5$.)

5) Neues Wiesenheu verliert in den ersten 5 Monaten $11^1/_2$ % am Gewichte; wie viel beträgt der Verlust von 15 Wagen Heu à 30 Ctr. in dieser Zeit? (15 × 30 = 450; $4^1/_2$ × $11^1/_2$ = $51^3/_4$ Ctr.)

6) Ein Landmann hat seine Früchte auf dem Halme gegen Hagelschlag mit 1275 M. versichern lassen und zahlt dafür 4 % an Prämie; wie viel also? (1275 = $12^3/_4$ Hundert; $12^3/_4$ × 4 = 51 M.)

§. 325. Fortsetzung.

Bisher haben wir, im Ganzen genommen, immer eine und dieselbe Berechnungsweise angewendet. Es ist dieß diejenige, welche der schriftlichen Berechnung zu Grunde liegt. Für das Kopfrechnen gibt es jedoch eine zweite, welche in vielen Fällen jener vorzuziehen ist. Damit nun der

Schüler die Eigenthümlichkeit der einen wie der andern kennen lerne und hiedurch zugleich des Unterschiedes derselben sich klar bewußt werde, so stellen wir beide an einem Beispiele neben einander. Die Aufgabe sei: Wie viel Kilo Oel erhält man von 360 kg Mohnsamen, wenn dessen Oelgehalt 33¹/₃ % beträgt?

Der Oelgehalt beträgt 33¹/₃ %, d. 100 Kilo Mohnsamen geben 33¹/₃ Kilo Oel. Hieraus ist nun zu berechnen, wie viel Kilo Oel 360 Kilo Mohnsamen geben. Der leichteren Uebersicht wegen setzen wir

100 kg Mohn	33¹/₃ kg Oel
360 kg Mohn	?

a. Bisherige Weise. Wir vergleichen die 100 kg Mohn mit den 360 kg Mohn. Wie kommen wir von 100 auf 360? Wir schließen von 100 auf 10 und von 10 auf 360. Wenn 100 kg Mohn 33¹/₃ kg Oel geben, so geben 10 kg Mohn den 10. Theil von 33¹/₃ kg oder 3¹/₃ kg Oel; und wenn 10 kg Mohn 3¹/₃ kg Oel geben, so geben 360 kg Mohn 36 × 3¹/₃ kg oder 120 kg Oel.

b. Andere Weise. Wir vergleichen die Quantität des Mohns, von welcher der Oelbetrag bekannt ist, mit der Quantität des daraus gewonnenen Oels selbst, die 100 kg also mit den 33¹/₃ kg. Was springt da sofort in die Augen? Daß 33¹/₃ der dritte Theil von 100 ist, und daß also das Gewicht des Oels ¹/₃ von dem Gewichte des Mohns beträgt. Und was können wir daraus schließen? Daß auch das Oel von 360 kg Mohn ¹/₃ von 360 kg, nämlich 120 kg betragen wird.

Die zweite Weise ist hier unstreitig die bessere. Und warum? Weil 33¹/₃ (die Zahl der Procente) ein einfacher Theil von 100 ist, während 360 weder ein einfacher Theil, noch ein reines Vielfaches von 100 ist. Dieselbe wird daher in allen Fällen mit Vortheil angewendet, wo die Zahl der Procente einen bequemen Bruchtheil vom Hundert bildet.

So ist's auch, wenn wir die Aufgabe umkehren und setzen: Von 360 kg Mohn erhielt man 120 kg Oel; wie viel proc.?

360 kg Mohn	120 kg Oel
100 kg Mohn	?

a. Bisherige Weise. Man vergleicht die 360 kg Mohn mit den 100 kg Mohn, und da 100 weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von 360 ist, so geht man von 360 kg auf 10 kg und von 10 auf 100 kg. Facit 33¹/₃ %.

b. Andere Weise. Man vergleicht die 360 kg Mohn mit den daraus gewonnenen 120 kg Oel, woraus sich ergibt, daß die Quantität des Oels ¹/₃ von der Quantität des Mohns ist. Also, so schließen wir nun, muß auch das Oel von 100 kg Mohn ¹/₃ von 100 kg, d. i. 33¹/₃ kg betragen.

Die zweite Weise führt auch hier leichter und schneller zum Ziele, als die erste. Darum ist der Schüler auch besonders darin zu üben. Als Vorübung dient das Folgende:

a. 50	procent	= 50	von 100	= $^1/_2$	vom Ganzen.		
$33^1/_3$	„	= $33^1/_3$	v. 100	= $^1/_3$	„	„
25	„	= 25	von 100	= $^1/_4$	„	„
20	„	= 20	von 100	= $^1/_5$	„	„
$12^1/_2$	„	= $12^1/_2$	v. 100	= $^1/_8$	„	„
10	„	= 10	von 100	= $^1/_{10}$	„	„
5	„	= 5	von 100	= $^1/_{20}$	„	„
4	„	= 4	von 100	= $^1/_{25}$	„	„
2	„	= 2	von 100	= $^1/_{50}$	„	„
1	„	= 1	von 100	= $^1/_{100}$	„	„

---

b. $^1/_2$ vom Ganzen	= 50	proc.	$^1/_7$ vom Ganzen	= $14^2/_7$	proc.
$^1/_3$ „ „	= $33^1/_3$	„	$^1/_8$ „ „	= $12^1/_2$	„
$^2/_3$ „ „	= $66^2/_3$	„	$^1/_9$ „ „	= $11^1/_9$	„
$^1/_4$ „ „	= 25	„	$^1/_{10}$ „ „	= 10	„
$^3/_4$ „ „	= 75	„	$^1/_{15}$ „ „	= $6^2/_3$	„
$^1/_5$ „ „	= 20	„	$^1/_{20}$ „ „	= 5	„
$^2/_5$ „ „	= 40	„	$^1/_{25}$ „ „	= 4	„
$^3/_5$ „ „	= 60	„	$^1/_{30}$ „ „	= $3^1/_3$	„
$^4/_5$ „ „	= 80	„	$^1/_{40}$ „ „	= $2^1/_2$	„
$^1/_6$ „ „	= $16^2/_3$	„	$^1/_{50}$ „ „	= 2	„

Wird durchgesprochen und eingeübt, wie folgt:

50% gewinnen heißt, mit 100 *M.* 50 *M.*, mit 100 *ₔ.* 50 *ₔ.*, überhaupt mit 100 50 oder die Hälfte gewinnen. Wer also 50 % gewinnt, der gewinnt mit 200 *M.* die Hälfte von 200 *M.*, mit 300 *M.* die Hälfte von 300 *M.*, mit 400 *M.* die Hälfte von 400 *M.*, mit 48 *ₔ.* $^1/_2 \times 48$ *ₔ.*, mit 13 *ₔ.* $^1/_2 \times 13$ *ₔ.*, mit 6 *ₔ.* $^1/_2 \times 6$ *ₔ.*, also immer die Hälfte vom Ganzen.

1) A verliert durch einen Bankerott die Hälfte seines Vermögens; wie viel proc. also? (50 %.)

2) Ein Wohlthäter schenkt zur Armenstiftung seines Ortes $^3/_8$ seines Geldes, wie viel proc.? ($^1/_8$ von $100 = 12^1/_2$, $^3/_8 = 3 \times 12^1/_2 = 37^1/_2$; also $37^1/_2$ %.)

3) Ein Kaufmann gewinnt mit 10 *ₔ.* 4 *ₔ.*, wie viel Theile vom Ganzen also und wie viel proc.? ($4 = {^2/_5}$ von 10; $^2/_5$ von $100 = 40$; also 40 %.)

4) Der Kopf, die Zunge und die Füße eines Ochsen betragen $^1/_{20}$, die Haut $^1/_{12}$ des lebenden Gewichts; wie viel proc.? (5 %, $8^1/_3$ %.)

5) Bei einem Schweine rechnet man, daß das Fleischgewicht 75 % des lebenden betrage; welchen Theil also? ($^3/_4$.)

6) Das Hammelfleisch verliert beim Braten 24 %, welchen Theil also vom Ganzen? (1 % = $^1/_{100}$, 24 % = $^{24}/_{100} = {^6/_{25}}$.)

7) In England leben 50 % der Einwohnerzahl in Städten, im Königreich Sachsen $33^1/_3$ %, in Frankreich 25 %, in Bayern 24 %; welche Theile also vom Ganzen? ($^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^6/_{25}$.)

8) A, der 80 ℳ. Miethe zahlte, wird um 20 ℳ. gesteigert, mithin um wie viel %? (20 ℳ. sind $^1/_4$ von 80 ℳ.; A wird also um $^1/_4$ gesteigert; das macht vom Hundert $^1/_4$mal 100 oder 25; die Erhöhung des Miethzinses beträgt also 25 %.)

9) B bietet das Meter zu 2 ℳ. 40 ₰., gibt es aber um 2 ℳ. 10 ₰., wie viel proc. also billiger? (2 ℳ. 40 ₰. — 2 ℳ. 10 ₰. = 30 ₰.; 30 ₰. sind $^1/_8$ von 2 ℳ. 40 ₰.; das macht vom Hundert $^1/_8$mal 100 oder $12^1/_2$; er gibt das Meter also um $12^1/_2$ % billiger, als er es bot.)

B. Schriftlich.

§. 326.

1) Jemand kauft sich für 775 ℳ. ein Grundstück; dasselbe gewährt ihm jährlich durch Verpachtung einen Reinertrag von 51 ℳ. 30 ₰.; wie viel proc. wirft ihm die Kaufsumme ab?

Aufl. Berechnen soll ich, wie viel 100 ℳ. von der Kaufsumme jährlich abwerfen, und die Aufgabe sagt mir, wie viel die ganze Kaufsumme abwirft. Die Aufgabe ist also die: 775 ℳ. werfen $51^1/_2$ ℳ. ab, wie viel 100 ℳ.?

Zweisatz.		Proportion.
775 ℳ. K.	$51^1/_2$ ℳ.	$775 : 100 = 51^1/_2$ ℳ. : x
100 ℳ. K.	?	$x = 6^{20}/_{31}$ %.

2) A verkauft den Ctr. Weizen einmal für 18,60 ℳ. und dann für 16,70 ℳ.; wie viel proc. löst er diesmal weniger?

Ausr. 18,60 ℳ.
16,70 ℳ.
1,90 ℳ.

Von $18^3/_5$ ℳ. betrug der Mindererlös $1^9/_{10}$ ℳ.; wie viel von 100 ℳ.?

$18^3/_5$ ℳ.	$1^9/_{10}$ ℳ.	$18^3/_5 : 100 = 1^9/_{10} : x$
100 „	?	$x = 10^{20}/_{93}$ %.

3) Nach Angabe der Chemiker enthält die Eichenrinde 15 % Gerbestoff; wie viel Gerbestoff enthalten demnach 8,65 Ctr. Eichenrinde?

Aufl. Wenn man 100 Pfd. trockene Eichenrinde mahlt und durch Wasser den Gerbestoff herauszieht, die Rinde dann wieder trocknet und wiegt, so hat sie nur noch ein Gewicht von 85 Pfd. Die 100 Pfd. Eichenrinde enthielten also 15 Pfd. Gerbestoff. Nach der Aufgabe ist zu berechnen, wie viel solchen Stoff 8,65 Ctr. oder 865 Pfd. Eichenrinde enthalten.

100 Pfd. R.	15 Pfd. G.	100 : 865 = 15 Pfd. : x
865 Pfd. „	?	$x = 129^3/_4$ Pfd.

4) A betheiligte sich bei einem Eisenbahn-Unternehmen mit 3500 ℳ. und verkaufte seine Aktien wieder, nachdem sie um $13^1/_2$ % gestiegen waren; wie viel betrug sein Erlös?

Aufl. A trat einer Gesellschaft bei, welche auf ihre Kosten einen Eisenbahnbau unternahm, und zahlte zu diesem Zwecke 3500 ℳ. Dafür erhielt er Aktien, d. h. gleichlautende schriftliche Scheine (etwa über je

500 ℳ einen), worin ihm zugleich ein verhältnißmäßiger Antheil an dem jährlichen Reinertrage der Bahn zugesichert ward. Da später die Bahn eine hohe Einnahme und daher auch einen guten Antheil (eine gute Dividende) für die Aktienbesitzer abwarf; so wurden die Aktien von Andern zu kaufen gesucht. Sie stiegen deßhalb im Preise. Gewöhnlich wird dieß nun nach Procenten bestimmt. Zahlt man z. B. für eine Actie, welche auf 500 ℳ lautet, 500 + 5 ℳ; so macht das für 100 ℳ 100 + 1 ℳ. Die Aktien sind also um 1% gestiegen; sie stehen 1% über pari = 101. Sind also die Aktien des A um $13^1/_2$ proc. gestiegen, so kostet jedes Hundert $100 + 13^1/_2 = 113^1/_2$ ℳ.

100 ℳ	$113^1/_2$ ℳ	$100 : 3500 = 113^1/_2$ ℳ : x
3500 „	?	$x = 3872^1/_2$ „

Gewinn- und Verlustrechnung.

§. 327. Allgemeines.

Werden erkaufte Gegenstände wieder verkauft, so beträgt der Erlös daraus entweder eben so viel, oder mehr oder weniger als der Einkaufspreis. Der Mehrerlös ist Gewinn, der Mindererlös Verlust. Gewinn und Verlust sind also der Unterschied zwischen der Ausgabe für den Einkauf und der Einnahme aus dem Verkaufe. Demnach kommen bei der Gewinn- und Verlustrechnung zunächst dreierlei Werthe vor: der Einkaufspreis, der Verkaufspreis und der Unterschied zwischen beiden — Gewinn und Verlust. Sind zwei dieser Stücke gegeben, so läßt sich das dritte durch Rechnung finden. Also sind, da jedes derselben in Frage stehen kann, drei Formen von Aufgaben möglich. Sie lassen sich, wenn man den Einkaufspreis mit a, den Verkaufspreis mit b und den Unterschied mit c bezeichnet, wie folgt darstellen:

Gegeben, gesucht.	Gegeben, gesucht.	Gegeben, gesucht.
a. b. c.	b. c. a.	b. c. a.

Gesetzt, man habe Gelegenheit, bei einem Geschäfte mit je 25 ℳ 8 ℳ und bei einem anderen Geschäfte mit je 40 ℳ 13 ℳ zu gewinnen; so entsteht die Frage: welches derselben bietet den größeren Vortheil? Um dieß bestimmen zu können, so muß man wissen, wie viel in beiden Fällen mit einer gleichen Summe gewonnen wird. Als solche läßt sich jede beliebige Zahl annehmen. Gewöhnlich setzt man 100. Man sucht also den Gewinn pro cent. Gewinnt man mit 25 ℳ 8 ℳ, so werden mit 100 oder 4mal 25 ℳ 4mal 8 oder 32 ℳ gewonnen. Gewinnt man aber mit 40 ℳ 13 ℳ, so beträgt der Gewinn vom 100, d. i. von $2^1/_2$mal 40 ℳ $2^1/_2$mal 13 oder $32^1/_2$ ℳ, mithin $^1/_2$ % mehr als im vorigen Falle. — Der Gewinn und Verlust pro cent ist daher in besonderen Fällen eben so wohl zu wissen nöthig, als der Gewinn und Verlust überhaupt. Es ist der vierte Begriff in der Gewinn- und Verlustrechnung und kann in den vorhin bezeichneten drei Formen an die Stelle jedes der

drei Werthe treten. Dadurch lassen sich, wie folgende Uebersicht ergibt, wieder 3mal 3 oder 9 verschiedene Formen von Aufgaben bilden.

Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.
a. b.	%	a. c.	%.	b. c.	%.
a. %.	c.	a. %.	b.	b. %.	a.
% b.	c.	% c.	b.	%. c.	a.

Die Mannigfaltigkeit der Aufgaben dieser Art wird aber noch vermehrt, wenn man die Aufgaben zum Theil auf die ganze Quantität, zum Theil auf einen Theil derselben, und die Procente auf eine bestimmte Zeit bezieht.

A. Aufgaben ohne Procentbestimmung.

Mündlich.

§. 328. **Der Gewinn oder der Verlust wird gesucht.**

1) Jemand kauft ein Pferd, um es wieder zu verkaufen, für 835 ℳ. Wenn wird er mit Gewinn verkaufen? Wenn mit Verlust? Wie viel beträgt sein Gewinn, wenn er das Pferd um 900 ℳ. verkauft? Wie viel beträgt sein Verlust, wenn er 780 ℳ. löst? — Was muß gegeben sein, um den Gewinn oder den Verlust bestimmen zu können? Wie findet man dann den Gewinn? wie den Verlust?

2) A kauft 25 m Zeug um 70 ℳ. und gibt das Meter um 4,20 ℳ. Wie viel beträgt sein Gewinn?

Aufl. Zu berechnen ist, wie viel A an 25 m gewinnt. Das findet sich, wenn ich weiß, wie er die 25 m eingekauft und wieder verkauft hat. Eingekauft hat er sie um 70 ℳ.; verkauft hat er sie um 25 × 4,20 ℳ. = 100 + 5 oder 105 ℳ. A gewinnt also 105 ℳ. — 70 ℳ. = 35 ℳ.

Wie viel A an 25 m gewinnt, kann ich auch finden, wenn ich weiß, wie viel er an 1 m gewinnt. Dazu ist erforderlich, daß ich den Einkaufs- und Verkaufspreis von 1 m kenne. Ausrechnung!

3) B kauft das Hektoliter Linsen für 12,50 ℳ. und verkauft das Liter um 20 ₰.; wie viel wird er an $4^1/_2$ hl gewinnen oder verlieren?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel B an $4^1/_2$ hl gewinnt oder verliert. Das findet sich, wenn ich weiß, wie viel er dafür ausgegeben und eingenommen hat. Bezahlt hat er für 1 hl 12,50 ℳ., für $4^1/_2$ hl also $4^1/_2$ × 12,50 ℳ. = 50 ℳ. + 6,25 ℳ. = 56,25 ℳ. Gelöst hat er für 1 l 20 ₰., für 1 hl also 20 ℳ. und für $4^1/_2$ hl $4^1/_2$ × 20 ℳ. = 90 ℳ. Der Ankauf beträgt 56,25 ℳ., der Verkauf 90 ℳ.; also verkauft B mit Gewinn; er gewinnt 90 ℳ. — 56,25 ℳ. = 33,75 ℳ.

Die Aufgabe läßt sich noch auf eine zweite und dritte Weise berechnen. Wie viel B an $4^1/_2$ hl gewinnt, kann nämlich auch gefunden werden, wenn man weiß, wie viel er an einem Hektoliter gewinnt, oder wenn man weiß, wie viel er an einem Liter gewinnt. Will man zuerst suchen, wie viel B an dem Hektoliter gewinnt, so muß man den Einkaufspreis und den Verkaufspreis von dem Hektoliter kennen; und will man zuerst suchen,

wie viel B an dem Liter gewinnt, so muß man sowohl den Einkaufspreis als den Verkaufspreis von dem Liter wissen.

Hieraus geht überhaupt hervor: um den Gewinn oder Verlust bestimmen zu können, so muß man den Einkaufspreis und den Verkaufspreis **von einer gleichen Quantität** Waare kennen, und ist dieß in der Aufgabe nicht gegeben, so ist das Erste, es zu suchen.

§. 329. Der Verkaufspreis wird gesucht.

1) A kaufte ein Haus um 7800 ℳ. und verkaufte es wieder. Wie hat er es verkauft, wenn er 750 ℳ. dabei gewann? (Um 7800 + 750 ℳ.) Wie, wenn er 750 ℳ. dabei verlor? (Um 7800 — 750 ℳ.)

Was muß gegeben sein, um den Verkaufspreis finden zu können? Wie wird der Verkaufspreis aus dem Einkaufspreise und dem Gewinn berechnet? Wie aus dem Einkaufspreise und dem Verluste?

2) Ein Kaufmann zahlt für 20 Kilo Gewürz 600 ℳ. und will am Kilo 15 ℳ. gewinnen; wie muß er das Gramm verkaufen?

Aufl. Um finden zu können, wie das Gramm zu verkaufen ist, so muß ich den Einkaufspreis und den Gewinn von 1 Gramm kennen. Der Kaufmann bezahlt für 20 kg 600 ℳ., für 1 kg $^1/_{20}$ davon = 30 ℳ., für 1 Gramm $^1/_{1000}$ von 30 ℳ. = 3 ₰. Gewinnen will er am Kilo 15 ℳ., am Gramm $^1/_{1000}$ von 15 ℳ. = 1,5 ₰. Er muß also das Gramm im Verkaufe zu 3 + 1,5 = 4,5 ₰. berechnen.

Wie das Gramm zu verkaufen ist, kann übrigens auch gefunden werden, wenn man weiß, wie das Kilo, oder wie die 20 Kilo zu verkaufen sind. Also noch auf zweierlei Weise. Im ersteren Falle muß man den Einkaufspreis und den Gewinn vom Kilo kennen, im andern Falle den Einkaufspreis und den Gewinn von 20 Kilo, mithin immer den Einkaufspreis und den Gewinn von einer gleichen Quantität.

3) Ein Melber kauft 5 Ctr. Mehl, den Ctr. zu 17,20 ℳ.; die Mehlpreise fallen, und er muß das Pfd. mit 3 ₰. Schaden verkaufen; wie viel wird er für 5 Ctr. lösen?

Aufl. Wie viel der Melber für die 5 Ctr. löst, findet sich, wenn ich weiß, wie viel er für die 5 Ctr. bezahlt hat, und wie viel er daran verliert. Bezahlt hat er dafür 5 × 17,20 ℳ. = 86 ℳ. Sein Verlust beträgt am Pfund 3 ₰., am Centner 3 ℳ., an 5 Ctr. 5 × 3 oder 15 ℳ. Sein Erlös beträgt also 86 — 15 = 71 ℳ. Oder ich suche zuerst, wie er 1 Ctr. verkauft, dann, wie er 5 Ctr. verkauft.

§. 330. Der Einkaufspreis wird gesucht.

1) A verkauft das Meter Tuch um 8,50 ℳ. Wie viel hat es ihn selbst gekostet, wenn er 75 ₰. daran gewinnt? (8,50 ℳ. — 75 ₰.) Wie viel, wenn er 75 ₰. daran verliert? (8,50 ℳ. + 75 ₰.)

Was muß gegeben sein, um den Einkaufspreis berechnen zu können? Wie wird der Einkaufspreis aus dem Verkaufspreis und dem Gewinne gefunden? Wie aus dem Verkaufspreis und dem Verluste?

2) Ein Händler verkauft 12 Ctr. Hopfen, den Ctr. zu 160 ℳ.; wie hat er den Centner gekauft, wenn er im Ganzen 252 ℳ. gewinnt?

Aufl. Wie der Ctr. eingekauft wurde, ergibt sich, wenn ich weiß, wie ihn der Händler verkauft und wie viel er daran gewinnt. Er verkauft den Ctr. um 160 ℳ. und gewinnt daran $^1/_{12}$ von 252 ℳ. = 21 ℳ. Also hat er denselben eingekauft um 160 — 21 = 139 ℳ.

Wie der Händler den Centner eingekauft hat, wird auch gefunden, wenn man zuerst die Einnahme, dann die Ausgabe für die 12 Ctr. sucht und von der letzteren auf die Ausgabe für 1 Ctr. schließt.

3) A verkauft 5 hl Wein um 344 ℳ. und verliert dabei am Hektoliter 4,20 ℳ.; wie hat er das Hektoliter eingekauft?

Aufl. Den Einkaufspreis von 1 hl kann ich bestimmen, wenn ich den Verkaufspreis und den Verlust per Hektoliter kenne. Verkauft hat A das Hektoliter um $^1/_5$ von 344 ℳ. = 68,80 ℳ., und verloren hat er daran 4,20 ℳ.; also hat er es eingekauft um 68,80 ℳ. + 4,20 ℳ. = 73 ℳ.

Den Einkaufspreis von 1 Hektoliter kann man übrigens auch bestimmen, wenn man denselben von 5 hl kennt. In diesem Falle muß man die Verkaufssumme und den Verlust von 5 hl wissen. Ausr.!

§. 331. Aus dem Gewinn wird die Quantität der Waare berechnet.

1) Ein Obsthändler kaufte eine Partie Aepfel, das Hektoliter zu 3,20 ℳ.; er verkaufte dieses wieder um 5 ℳ. und gewann im Ganzen 36 ℳ. Wie viel Hektoliter sind es gewesen? (20 hl).

Aufl. An 1 hl gewann er 5 ℳ. — 3,20 = 1,80 ℳ. So vielmal 1 hl Aepfel er kaufte und verkaufte, so vielmal 1,80 ℳ. beträgt sein Gewinn. Da er im Ganzen 36 ℳ. gewann, so waren es so viele Hektoliter, als 1,80 ℳ. in 36 ℳ. enthalten sind. Ausr.!

2) Ein Kilo kostete im Einkaufe 15 ℳ., und das Gramm im Verkaufe 2 ₰.; wie viel wurde verkauft, wenn der Gewinn im Ganzen 54 ℳ. betrug?

Aufl. Im Allgemeinen wurden so viel Kilo verkauft, als der Gewinn von 1 Kilo in 54 ℳ. enthalten ist. Und wie viel beträgt dieser? (1000 × 2 ₰. oder 20 ℳ. — 15 ℳ. = 5 ℳ.) 5 ℳ. in 54 ℳ. = $10^4/_5$mal. Also waren es $10^4/_5$ kg oder 10,800 kg.

Schriftlich.

§. 332.

1) Ein Wirth kauft 8,48 hl Wein à 43,75 ℳ.; der Fuhrlohn und die andern Unkosten betragen im Ganzen 12,50 ℳ.; wie viel gewinnt er daran, wenn er das Liter um 70 ₰. gibt?

Aufl. Ich berechne zuerst die Auslagen, dann den Erlös, dann den Gewinn.

a. 8,48 hl à 43,75 ℳ.

```
    35000
   17500
  35000
  ---------
  371,0000 ℳ.
+  12,50
  ---------
  383,50 ℳ.
```

b. 8,48 hl = 848 l à 0,7 ℳ.

Erlös	593,6 ℳ.
Auslagen	383,50 „
c. Gewinn	210,10 ℳ.

2) A kauft 1 Ctr 62,5 Pfd. Zucker um 81,25 ℳ. und will am Pfunde 10 ₰ gewinnen; wie muß er es verkaufen?

Aufl. Ich berechne zuerst, was ihn selbst das Pfund kostet, und zähle dann die 10 ₰. dazu.

162,5 Pfd.	81,25 ℳ.
1,0 „	x

Oder: 162,5 | 81,25 ℳ.; 1625 | 812,5 | 0,5 ℳ.

$$\frac{\overset{5}{8125} \cdot 10}{100 \cdot 1625} = 0{,}5$$ ℳ. Einkauf + 10 ₰. Gewinn = 60 ₰. Verkf.

3) Ein Händler verkaufte 15,50 Ctr. Wolle, den Ctr. zu 196 ℳ. und gewann im Ganzen 85,25 ℳ.; wie hat er den Ctr. eingekauft?

Aufl. Ich suche, wie viel er am Centner gewonnen hat, und ziehe dieß vom Verkaufspreise ab.

15,5 Ctr.	$85\frac{1}{4}$ ℳ.
1,0 „	x

$$\frac{341 \cdot 10}{4 \cdot 155} = 5{,}5$$ ℳ.

Oder: 15,5 | 85,25 ℳ; 155 | 852,5 | 5,5 ℳ.

Verkauf	196,0 ℳ.
Gewinn	5,5 „
Einkauf	190,5 ℳ.

B. Aufgaben mit Procentbestimmung.

Mündlich.

§. 333. **Der Gewinn oder Verlust procent wird gesucht:**

a. Aus dem Einkaufspreise und dem Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. A kauft das Meter zu 1 ℳ. 50 ₰. und verkauft es wieder mit 30 ₰. Gewinn; wie viel proc. gewinnt er?

Aufl. Wie viel procent gewinnt A, d. i. wie viel Mark gewinnt er mit 100 ℳ., oder wie viel Pfennige gewinnt er mit 100 ₰.?

a. 1 ℳ. 50 ₰. = $1\frac{1}{2}$ ℳ., und 30 ₰. = $\frac{3}{10}$ ℳ.; mit $1\frac{1}{2}$ ℳ. gewinnt A $\frac{3}{10}$ ℳ.; mit $\frac{1}{2}$ ℳ. gewinnt er den 3. Theil von $\frac{3}{10}$ ℳ. = $\frac{1}{10}$ ℳ.; mit 1 ℳ. gewinnt er $2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ℳ., mit 100 ℳ. also $100 \times \frac{1}{5}$ ℳ. oder 20 ℳ. A gewinnt also 20 %.

b. 1 ℳ. 50 ₰. = 150 ₰. Mit 150 ₰. gewinnt A 30 ₰.; mit 50 ₰. gewinnt er den 3. Theil von 30 ₰. = 10 ₰.; mit 100 ₰. gewinnt er 2×10 oder 20 ₰ Er gewinnt also, auch so gerechnet, 20 %.

Oder: Ich suche, wie sich der Gewinn zum Einkaufspreise verhält. 30 ₰. bilden $\frac{1}{5}$ von 150 ₰. Gewinnt B mit 150 ₰. $\frac{1}{5}$ von 150 ₰., so gewinnt er mit 100 ₰. $\frac{1}{5}$ von 100 ₰.; $\frac{1}{5}$ von 100 ₰. = 20 ₰. = 20 %.

Beisp. 2. B muß das Kilo einer Waare, das ihn 3 ℳ. 75 ₰. kostete, mit 50 ₰. Schaden verkaufen; wie viel proc. beträgt sein Verlust?

a. 3,75 ℳ. = 375 ₰. An 375 ₰. verliert B 50 ₰.; an 25 ₰. verliert er den 15. Theil von 50 ₰. = $3^1/_3$ ₰, an 100 ₰. also $4 \times 3^1/_3 = 12 + 1^1/_3 = 13^1/_3$ ₰. = $13^1/_3$ %.

b. 375 = 15 × 25, und 50 = 2 × 25. Der Verlust beträgt daher $^2/_{15}$ des Einkaufspreises, von 100 also $^2/_{15} \times 100 = 13^1/_3$.

b. Aus dem Einkaufs- und Verkaufspreise.

Beisp. 1. Den Obsthändler A kommt das Pfund Kirschen auf 12 ₰.; wie viel proc. gewinnt (oder verliert) er, wenn er es um 13 (10, 15, 8, 18, 6, 24) ₰. wieder verkauft?

Ausr. Wenn A das Pfund um 12 ₰. einkauft und um 13 ₰. verkauft, so gewinnt er mit 12 ₰. 1 ₰., also $^1/_{12}$ vom Ganzen; folglich gewinnt er an 100 ₰. $^1/_{12}$ von 100 ₰. oder $8^1/_3$ ₰., d. i. $8^1/_3$ %. — Verkauft er das Pfd. um 10 ₰., so verliert er an 12 ₰. 2 ₰., also $^1/_6$ von 12 ₰.; folglich verliert er an 100 ₰. $^1/_6$ von 100 ₰. oder $16^2/_3$ ₰., d. i. $16^2/_3$ %. So fort.

Beisp. 2. A kauft 36 m um 126 ℳ. und verkauft das Meter um 4 ℳ.; wie viel beträgt sein Gewinn procent?

Aufl. Ich soll suchen, wie viel A mit 100 ℳ. oder 100 ₰. des Geldes gewinnt, welches er für die Waare ausgegeben hat. Dabei kann ich von dem Betrage für 1 m, oder auch von dem Betrage für die 36 m ausgehen.

a. Gekauft hat A das Meter um den 36. Theil von 126 ℳ. = 3,50 ℳ.; verkauft hat er das Meter um 4 ℳ.; mit 3,50 ℳ. gewinnt er also 50 ₰., d. i. den 7. Theil vom Einkaufspreise; sein Gewinn von 100 ist daher auch $^1/_7$ von 100 = $14^2/_7$.

b. Gekauft hat A die 36 m um 126 ℳ.; verkauft hat er sie um 36 × 4 oder 144 ℳ.; er gewinnt also mit 126 ℳ. (144 — 126 =) 18 ℳ.; mit 1 ℳ. gewinnt er den 126. Theil von 18 ℳ. = $^{18}/_{126} = {^9/_{63}} = {^1/_7}$ ℳ., mit 100 ℳ. also $100 \times {^1/_7} = 14^2/_7$ ℳ. A gewinnt also $14^2/_7$ %.

c. Aus dem Verkaufspreis und dem Gewinn oder Verlust.

Hier ist besonders darauf aufmerksam zu machen, daß der Gewinn und der Verlust sich stets auf den Einkaufspreis, nie auf den Verkaufspreis beziehen.

1) A verkauft den Ctr. Heu mit 90 ₰. Gewinn um 2,40 ℳ.; wie viel macht der Gewinn procent? Antwort: 60 %.

Aufl. Den Gewinn vom Hundert kann ich berechnen, wenn mir der Gewinn vom Einkaufspreise und der Einkaufspreis bekannt ist. Der Gewinn = 90 ₰.; der Einkaufspreis beträgt 2,40 ℳ. — 90 ₰. = 1,50 ℳ. Nun heißt es: Mit 150 ₰. werden 90 ₰. gewonnen, wie viel mit 100 ₰.?

2) Eine Quantität Kaffee wird mit 56 ℳ. Verlust um 344 ℳ. verkauft; wie viel proc. werden verloren? Antwort 14 %.

Aufl. Die 56 M. werden an der Summe verloren, welche der Kaffee im Einkauf kostete. Der Einkaufspreis beträgt 344 + 56 = 400 M. Nun heißt es: An 400 M. werden 56 M. verloren; wie viel an 100 M.?

§. 334. Aus dem Einkaufspreise und dem Gewinn oder Verlust procent wird gesucht:

a. Der Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. Ein Landmann kaufte eine Wiese um 820 M. und verkauft sie wieder mit 15 % Gewinn; wie viel beträgt sein Mehrerlös?

Aufl. Zu berechnen ist, wie viel der Mehrerlös oder der Gewinn von 820 M. beträgt. Der Ausdruck „15 proc." zeigt an, wie viel derselbe von 100 M. macht. Von 100 M. macht der Gewinn 15 M.; von 820 oder $8^1/_5$ Hundert macht er $8^1/_5 \times 15$ oder 123 M.

Beisp. 2. A verkauft ein Haus, das ihn 4500 M. gekostet, mit $7^1/_2$ procent Verlust; wie viel beträgt der Mindererlös?

Aufl. Gesucht soll werden, was der Mindererlös oder Verlust von 4500 M. beträgt; der Ausdruck „$7^1/_2$ proc." sagt uns, wie viel derselbe von 100 M. macht. Von 100 M. macht der Verlust $7^1/_2$ M.; mithin beträgt er von 4500 M. $45 \times 7^1/_2$ oder $337^1/_2$ M.

b. Der Verkaufspreis.

Beisp. 1. B kauft das Hektoliter Linsen um 12,50 M.; wie muß er das Liter verkaufen, um 20 % zu gewinnen?

Aufl. Um 20 % zu gewinnen, muß B von 12,50 M. den 5. Theil, d. i. 2,50 M. gewinnen. Er muß also das Hektoliter um 12,50 + 2,50 = 15 M. und das Liter um 15 ₰. verkaufen.

Beisp. 2. Wie theuer hat C das Kilo, das ihn selbst 3,20 M. gekostet hat, wieder verkauft, da er 25 % dabei verlor?

Aufl. 3,20 M. = 320 ₰.; an 100 ₰. verlor C 25 ₰., an 320 ₰. also $3^1/_5 \times 25 = 80$ ₰.; folglich hat er das Kilo um 320 − 80 = 240 ₰. oder 2,40 M. verkauft. Oder:

C verlor 25 %, also $^1/_4$ des Einkaufspreises; $^1/_4$ von 3,20 M. = 80 ₰.; mithin hat er das Kilo um 3,20 M. — 0,80 M. = 2,40 M. abgegeben.

Schriftlich.

§. 335.

1) Ein Kaufmann bezieht 75 m Tuch à 5,95 M.; die Fracht macht 3,75 M.; wie viel proc. gewinnt er, wenn er das Meter um 7,20 M. verkauft?

a. Auslage.	b. Erlös.	d. Gewinnprocent.
5,95 M. × 75	7,2 M. × 75	450 M. — 90 M.
2975	360	100 „ — x
4165	504	$\frac{90 \times 100}{450} = 20$ %
446,25	540,0 M.	
+ 3,75	− 450 „	
450 M.	c. Gew. 90 M.	

2) A verkauft eine Waare mit 18 ℳ Verlust um 154 ℳ; wie viel proc. verliert er?

Ausr. Da A mit 18 ℳ Verlust verkauft, so hat er die Waare um 18 ℳ höher als 154 ℳ, also um 154 + 18 = 172 ℳ eingekauft. Die Aufgabe heißt nun: An 172 ℳ verliert A 18 ℳ, wie viel an 100 ℳ?

172 ℳ	18 ℳ	172 : 100 = 18 : x
100 „	x	x = $10\frac{20}{43}$ %

3) Fünf Aktien einer Baumwollspinnerei werden per Stück zu 187 ℳ gekauft und später mit $16\frac{3}{4}$ % Gewinn wieder abgegeben; wie viel wurde gewonnen? (156,61 ℳ)

Ausr. Ich suche zuerst, was die 5 Aktien gekostet haben. Die Auslage dafür betrug 5 × 187 ℳ = 935 ℳ.

Nun suche ich, wie viel damit gewonnen wird. Die Aufgabe heißt: Mit 100 ℳ werden $16\frac{3}{4}$ ℳ gewonnen; wie viel mit 935 ℳ?

100 ℳ	$16\frac{3}{4}$ ℳ	Oder: 16,75 ℳ × 9,35
935 „	?	

4) Wie ist das Kilo zu verkaufen, wenn 135 Kilo 303,75 ℳ kosten und 24 % gewonnen werden wollen?

Ausr. Zuerst berechne ich den Gewinn und den Erlös im Ganzen, dann den Verkaufspreis per Kilo.

a.

100 ℳ	24 ℳ
$303\frac{3}{4}$ „	x

$$\frac{\overset{6}{24} \cdot 1215}{100 \cdot 4} = 72{,}90 \text{ ℳ}$$

b.

Ankauf	303,75 ℳ
Gewinn	72,90 „
Verkauf	376,65 ℳ

c. 135 | 376,65 ℳ | 2,79 ℳ per Kilo.

§. 336.

Das Bisherige kann und soll in jeder Schule durchgenommen werden. Von dem Folgenden wird nur unter Umständen Gebrauch gemacht. Während bisher das Gesuchte fast ohne Weiteres aus dem Gegebenen abgeleitet werden konnte, ist in den nachstehenden Fällen das Verhältniß des Einen zum Andern aus der Zahl der Procente erst zu bestimmen.

§. 337. Aus dem Verkaufspreise und dem Gewinn- oder Verlustprocent wird gesucht

a. Der Einkaufspreis.

1) Eine Sache wird mit 40 % Gewinn um 385 ℳ verkauft; wie viel hat sie im Einkaufe gekostet? (275 ℳ)

Aufl. Man gewinnt 40 %, wenn man Etwas um 100 einkauft und um 140 verkauft. Der Ankaufspreis verhält sich also zum Verkaufspreis wie 100 : 140 oder wie 5 : 7, d. i. der Einkaufspreis hat 5 Theile, wie der Verkaufspreis 7 Theile hat. Und da der Verkaufspreis = 385 ℳ, so heißt es: 7 Theile = 385 ℳ; was machen 5 Theile? Ausr.!

140 ℳ Vkf.	100 ℳ Ekf.	140 : 100 = 385 ℳ : x
385 „ „	x	x = 275 ℳ

2) Mit welcher Summe war A bei einem Unternehmen, welches mit $16^2/_3$ % Verlust abschloß, betheiligt, wenn er 5400 ℳ zurück bekam?

Aufl. Am Hundert wurden $16^2/_3$ verloren. Für je 100 ℳ, welche A eingelegt, erhielt er 100 — $16^2/_3$ = $83^1/_3$ ℳ zurück. Die Einlage verhält sich daher zur Rückzahlung wie 100 : $83^1/_3$ = 300 : 250 = 30 : 25 = 6 : 5. Die Einlage hat 6 Theile, wie die zurück erhaltene Summe 5. Und da diese = 5400 ℳ, so heißt nun die Aufgabe: 5 Theile betragen 5400 ℳ; wie viel betragen 6?

5 Th.	5400 ℳ	$83^1/_3$: 100 = 5400 ℳ : x
6 „	x	x = 6480 ℳ

Oder: So vielmal $83^1/_3$ ℳ A zurück erhielt, so vielmal 100 ℳ hatte er eingelegt. $83^1/_3$: 5400 = 100 : x.

Oder: Der Verlust beträgt $16^2/_3$ % oder $^1/_6$ der Einlage; mithin betrug die zurück erhaltene Summe $^5/_6$ derselben. Die Aufgabe heißt jetzt: $^5/_6$ der Einlage = 5400 ℳ; wie viel betragen $^6/_6$?

b. Der Gewinn oder der Verlust.

1) Man verkauft eine Waare für 300 ℳ und gewinnt 20 % dabei; wie viel Mark beträgt der Gewinn?

Aufl. Die 300 ℳ enthalten den Einkaufspreis und den Gewinn. Der Gewinn beträgt 20 %; 100 ℳ Einkauf machen 120 ℳ Verkauf. Unter 120 ℳ Erlös befinden sich also 20 ℳ Gewinn. Der Gewinn verhält sich daher zum Erlöse wie 20 : 120 oder wie 1 : 6; er beträgt $^1/_6$ von demselben. Und da der Erlös = 300 ℳ, so beträgt der Gewinn $^1/_6$ von 300 ℳ = 50 ℳ.

2) Ein Faß Wein wird für 1050 ℳ mit 30 % Verlust verkauft; wie viele Mark beträgt dieser? (450 ℳ)

Aufl. 30 % werden verloren, wenn man Etwas um 100 eingekauft und um 100 — 30, also um 70 wieder verkauft. Der Verlust verhält sich daher zum Erlöse wie 30 : 70 oder wie 3 : 7; der Verlust hat 3 Theile, wie der Erlös 7 Theile hat. Und da dieser 1050 ℳ beträgt, so heißt es nun: 7 Theile = 1050 ℳ; was machen 3 Theile?

Oder: Verliert man 30 %, so verliert man $^3/_{10}$ des Einkaufspreises; also löst man $^7/_{10}$ desselben. Diese betragen 1050 ℳ. Es heißt nun: $^7/_{10}$ machen 1050 ℳ; was machen $^3/_{10}$?

§. 338. Aus dem Gewinn und Gewinnprocent wird der Einkaufs- und Verkaufspreis gesucht.

1) Ein Gastwirth gewinnt an dem Hektoliter Wein 56 ℳ oder 28 %; wie theuer hat er das Hektol. eingekauft?

Aufl. Wie verhalten sich 28 % Gewinn zum Einkaufspreis? Antwort: Wie 28 : 100 oder wie 7 : 25. Der Gewinn hat 7 Theile,

wie der Einkaufspreis 25 Theile hat. Die Aufgabe ist also: 7 Theile = 56 *M.*; was machen 25 Theile? (200 *M.*)

2) An einer Aktie wurden $12^1/_2$ % oder 45 *M.* verloren; wie viel hat sie im Ankaufe gekostet?

Aufl. Der Verlust beträgt $12^1/_2$ von 100. Er verhält sich daher zum Ankaufspreis, wie $12^1/_2$ zu 100 oder wie 1 : 8, d. h. der Verlust ist 1 Theil, wie der Ankaufspreis 8 Th. hat. Und da der Verlust 45 *M.* beträgt, so beträgt der Ankaufspreis 8 × 45 oder 360 *M.* ($12^1/_2$ *M.* Gew. = 100 *M.* Eink.; 56 *M.* Gew. =?)

3) A gewinnt an dem Meter 42 ₰. oder 15 %; wie theuer verkauft er dasselbe? (Um 3,22 *M.*)

a. Ich berechne zuerst den Einkaufspreis. 15 % Gewinn verhalten sich zum Einkaufspreis wie 15 : 100 oder wie 3 : 20. Der Gewinn hat 3 Theile, wie der Einkaufspreis 20 hat. Die Aufgabe ist also: 3 Theile = 42 ₰.; wie viel betragen 20 Theile? Antwort: 2,80 *M.* Zu 2,80 *M.* Einkaufspreis 42 ₰. Gewinn gibt 3,22 *M.* Verkaufspreis.

b. Ich berechne sogleich den Verkaufspreis. Nun ist die Frage: Wie verhalten sich 15 % Gewinn zum Verkaufspreise? Antwort: wie 15 : 115 oder wie 3 : 23. Und die Aufgabe heißt jetzt: 3 Theile = 42 ₰.; was machen 23 Theile?

4) B verliert an einer Waare 16 *M.* oder 8 %; wie verkauft er sie? (Um 184 *M.*)

a. 8 % Verlust verhalten sich zum Einkaufspreise wie 8 : 100 oder wie 2 : 25; 2 Theile = 16 *M.*, 1 Theil = 8 *M.*, 25 Th. = 25 × 8 oder 200 *M.*; 200 *M.* — 16 *M.* = 184 *M.*

b. 8 % Verlust verhalten sich zum Verkaufspreise wie 8 : 92 oder wie 2 zu 23; 2 Theile = 16 *M.*, 1 Th. = 8 *M.*, 23 Th. = 23 × 8 oder 184 *M.*

§. 339. Der Gewinn procent pro anno wird gesucht.

1) Ein Geschäft, das mit 1200 *M.* betrieben wurde, warf in $2^1/_2$ Jahren 800 *M.* reinen Nutzen ab; wie viel proc. p. a.?

Ausr. Berechnet soll werden, welchen Nutzen 100 *M.* in 1 Jahre abwarfen; gegeben ist, welchen Nutzen 1200 *M.* in $2^1/_2$ Jahren abwarfen; 1200 *M.* warfen in $2^1/_2$ J. 800 *M.*, in $^1/_2$ Jahre 160 *M.* und in 1 Jahre 320 *M.* ab. Auf 100 *M.* kommt in dieser Zeit $^1/_{12}$ von 320 *M.*, d. i. $26^2/_3$ *M.* Der Nutzen proc. p. a. ist also $26^2/_3$.

2) Ein Gastwirth kauft das Hektoliter Wein zu 45 *M.* und schenkt denselben, das Liter zu 60 ₰., in 4 Wochen aus; wie viel beträgt sein Gewinn proc. pr. a.?

Ist so zu nehmen: Der Gastwirth nimmt 45 *M.* seines Geldes und kauft dafür 1 hl Wein. Den schenkt er in 4 Wch. aus, und da er das Liter um 60 ₰. gibt, so löst er 100 × 60 ₰. oder 60 *M.* Von diesen 60 *M.* nimmt er nun 45 *M.* und kauft sich wieder 1 hl. Das schenkt er abermals in 4 Wch. aus, löst dafür wieder 60 *M.* u. s. f. Da nun 52 Wch. = 13 × 4 Wch., so thut er es im Jahre 13mal. So oft er es

aber thut, so oft gewinnt er 60 ℳ. — 45 ℳ. = 15 ℳ. Also gewinnt er und zwar mit einen und denselben 45 ℳ. seines Geldes im Jahre 13 × 15 ℳ. = 195 ℳ. Das ist der Gewinn pro anno von 45 ℳ. Von 100 ℳ. beträgt derselbe $433^1/_3$ ℳ. Der Gewinn proc. pr. a. ist sonach $433^1/_3$.

3) Wie viel proc. pr. a. werden gewonnen, wenn man eine Waare mit 48 ℳ. bezahlt und nach 4 Mon. für 60 ℳ. verkauft? (75 %).

4) A und B kaufen das Hektoliter Wein zu 37,50 ℳ. A gibt dasselbe wieder zu 50 ℳ., B zu 56 ℳ. Jener verkauft das Jahr hindurch 200 hl, dieser 75 hl. a. Wie viel nimmt jeder am Hektoliter Gewinn? Wie viel B mehr als A? b. Wie viel nimmt jeder Procent? Wie viel B mehr als A? c. Wie viel gewinnt jeder pro anno? (A gewinnt pro anno 2500, B 1387,5 ℳ.)

5) Zwei Kaufleute, A und B, bekommen das Meter Tuch zu 6,25 ℳ. A begnügt sich mit 12 % Gewinn, B nimmt 20 %. Dagegen verkauft A in 5 Monat eben so viel als B in $1^1/_2$ Jahre. a. Um wie viel baares Geld gibt A das Meter billiger als B? b. Wie viel beträgt eines Jeden Gewinn Procent pro anno?

Antw. a. B gibt das Meter um 7,5 ℳ., A um 7 ℳ., mithin um 50 ₰. wohlfeiler als B. b. Der Gewinn Procent pro anno beträgt bei A $28^4/_5$, bei B $13^1/_3$.

Was folgt hieraus? Derjenige wird auf die Dauer die besten Geschäfte machen, welcher gute Waare führt und sich im Einzelnverkaufe mit einem mäßigen Gewinn begnüget.

§. 340. Noch einige besondere Fälle.

1) A verkauft den Centner Weizen zu 12 ℳ. und gewinnt dabei 20 %; später verkauft er denselben mit 30 % Gewinn; wie theuer also?

Aufl. Wir suchen zunächst, wie sich der erstere Verkaufspreis zu dem späteren verhält. Zuerst verkaufte A mit 20 % Gewinn; was ihn 100 ℳ. kostete, dafür löste er 120 ℳ. Später verkaufte er mit 30 % Gewinn; was ihn also 100 ℳ. kostete, dafür löste er jetzt 130 ℳ. Der erstere Verkaufspreis verhält sich daher zum späteren, wie 120 : 130 oder wie 12 : 13. Da er den Centner zuerst um 12 ℳ. verkauft hat, so heißt es: 12 Theile betragen 12 ℳ.; wie v. betragen 13 Theile? (13 ℳ.)

120 : 130 = 12 ℳ. : x.

2) B verkaufte den Ctr. Hopfen zu 120 ℳ. und gewann 25 % dabei. Später mußte er mit 20 % Verlust abgeben; wie verkaufte er jetzt den Ctr.?

Aufl. Zuerst verkaufte B mit 25 % Gewinn; 100 ℳ. Einkauf machten also 125 ℳ. Verkauf. Dann verkaufte er mit 20 % Verlust; 100 ℳ. Einkauf machten jetzt also nur 80 ℳ. Verkauf. Der erstere Verkaufspreis verhält sich daher zu dem späteren wie 125 : 80 oder wie 25 : 16. Jener hat 25 Theile, wie dieser 16. Und da B zuerst 120 ℳ.

löste, so heißt es: 25 Theile machen 120 ℳ.; was machen 16 Theile? (76 ℳ. 80 ₰.)

$$125 : 80 = 120 \text{ ℳ} : x.$$

3) Ein Kleinhändler erhält für 1 ₰. 3 Stück Nähnadeln, gibt aber für 1 Pfg. nur 2 Stück; wie viel Proc. nimmt er Gewinn?

Aufl. Er löst aus 2 Nadeln 1 ₰., aus 1 Nadel $^1/_2$ ₰. und aus 3 Nadeln $3 \times {}^1/_2$ ₰. $= 1^1/_2$ ₰. Was er für 1 ₰. gekauft, das verkauft er wieder für $1^1/_2$ ₰.; er gewinnt daher mit 1 ₰. $^1/_2$ ₰., mit 100 ₰. also 100mal $^1/_2$ ₰. = 50 ₰.

4) Derselbe erhält ferner für 1 ₰. 18 m Band; wie viel wird man für das gleiche Geld von ihm bekommen, da er diese Waare mit $33^1/_3$ % Gewinn verkauft?

Aufl. $33^1/_3$ % gewinnen, heißt: den 3. Theil vom Einkaufspreis gewinnen. Unser Kaufmann gibt daher die 18 m, die ihn 1 ℳ. gekostet haben, nur um $1 + {}^1/_3$ ℳ. wieder ab. Erhält man aber für $1^1/_3$ ($= {}^4/_3$) ℳ. 18 m, so bekommt man für $^1/_3$ ℳ. den 4. Theil von 18 m $= 4^1/_2$ m; mithin für 1 ℳ. $3 \times 4^1/_2$ m $= 13^1/_3$ m.

Zinsrechnung.

§. 341. Vorbemerkung.

Es besitzt Jemand, den wir A nennen, eine Summe Geldes; er ist aber nicht in der Lage, dieselbe mit Nutzen zu verwenden. B dagegen, ein Andrer, könnte sich mit einer gleichen Summe durch den Ankauf eines Grundstückes oder gewisser Waaren einen bedeutenden Vortheil verschaffen, wenn er sie hätte. Was thun daher beide? A leiht sein Geld dem B, unter der Voraussetzung, daß es ihm seiner Zeit wieder zurück erstattet werde, und B zahlt ihm dafür jährlich eine bestimmte Vergütung. So wird das Geld dem Einen wie dem Andern nutzbar. — Bei derartigen Geldgeschäften sind nun aber besondere Benennungen gebräuchlich. Wer Geld ausleiht, wird Gläubiger, Kreditor genannt. Wer Geld entlehnt, heißt Schuldner, Debitor. Die verliehene Geldsumme heißt Kapital. Die Vergütung, welche der Schuldner dem Gläubiger zahlt, heißt Zins. Der Betrag des Zinses wird pro cento, d. i. vom oder für das Hundert festgesetzt. Der Zinsprocent, auch Zinsfuß genannt, bestimmt den Zins von 100 gewöhnlich auf 1 Jahr. Der Ausdruck „von 100" ist unbenannt; man muß sich aber immer dieselbe Geldsorte dazu denken, in welcher das Kapital besteht. 4 procent kann also heißen:

von je 100 Mark Kapital jährlich 4 Mark Zins,
von je 100 Gulden Kapital jährlich 4 Gulden Zins,
von je 100 Thalern Kapital jährlich 4 Thaler Zins.

Die Ausleihung von Kapitalien und die Entrichtung der Zinsen hiefür, die Höhe des Zinsfußes und die verschiedene Zeitdauer, während welcher ein Kapital ausstehen kann, gibt im bürgerlichen Leben Veranlassung zu vielen und verschiedenen Rechnungen, die man mit dem allgemeinen Namen

Zinsrechnung belegt. Die Stücke, die dabei in Betracht kommen, sind: Kapital, Zins, Zinsfuß und Zeit. Jedes dieser 4 Stücke kann gesucht werden und von jedem der übrigen 3 abhängig sein.

Es kann nämlich abhängig sein
1) der Zins: a. vom Kapital, b. vom Zinsfuß, c. von der Zeit;
2) das Kapital: a. vom Zins, b. vom Zinsfuß, c. von der Zeit;
3) der Zinsfuß: a. vom Kapital, b. vom Zins, c. von der Zeit;
4) die Zeit: a. vom Kapital, b. vom Zins, c. vom Zinsfuß.

Dieß gibt 4 × 3 oder 12 verschiedene Arten von Aufgaben mit einfachen Verhältnissen, einfache Regeldetri-Aufgaben.

Das in Frage gestellte Stück kann aber auch von zwei der übrigen Stücke abhängig sein, und zwar:
1) der Zins: a. von Kapital und Zeit, b. von Kapital und Zinsfuß, c. von Zinsfuß und Zeit;
2) das Kapital: a. von Zins und Zinsfuß, b. von Zinsfuß und Zeit, c. von Zins und Zeit:
3) der Zinsfuß: a. von Kapital und Zins, b. von Zins und Zeit, c. von Kapital und Zeit;
4) die Zeit: a. von Kapital und Zins, b. von Zins und Zinsfuß, c. von Kapital und Zinsfuß;

Hierdurch ergeben sich wieder 4 × 3 oder 12 verschiedene Fälle, und zwar Aufgaben mit mehrfachen Verhältnissen, also zusammengesetzte Regeldetri-Aufgaben.

Außerdem kann noch zu berechnen sein, a. wie viel das Kapital und der Zins nach einer gewissen Zeit zusammen machen, b. wie viel das Kapital, oder der Zins bei einer aus Kapital und Zins zusammengesetzten Summe beträgt, c. wie viel der Zinsfuß, und d. wie viel die Zeit betragen muß, wenn ein bestimmtes Kapital mit Einschluß der einfachen Zinsen eine gewisse Höhe erreichen soll, und endlich e. wie hoch eine ausgeliehene Summe anwächst, wenn der Jahreszins alljährlich zum Kapital geschlagen und Zins von Zins genommen wird.

Wie viel Bildendes alle die verschiedenen Fälle auch in sich schließen, so wird sich der Unterricht in den allermeisten Schulen doch nur auf diejenigen ausdehnen können, welche gewöhnlich im Leben vorkommen und daher nothwendig behandelt werden müssen. Bei Anordnung des Stoffes ist hierauf Rücksicht genommen. Das Nähere aber wird am gehörigen Orte selbst noch bemerkt werden.

A. Kapital und Zins getrennt.

A. Zinsrechnungen mit einfachen Verhältnissen.

§. 342. Der Zins ist zu berechnen.

Mündlich.

1) Wie viel Zins geben 300 (500, 800) ℳ jährlich zu 4 %?

Ausr. Steht ein Kapital zu 4 % aus, so geben 100 ℳ jährlich (oder in 12 Mon. oder in 360 Tg.) 4 ℳ Zins. So vielmal 100 ℳ

Kapital, so vielmal 4 *M.* Zins. 300 *M.* geben also 3 × 4 oder 12 *M.*, 500 *M.* geben 5 × 4 oder 20 *M.*, 800 *M.* geben 8 × 4 = 32 *M.* Zs.

2) Wie viel Zins geben 1000 *M.* jährl. zu $3^1/_2$ %, $4^1/_2$ %, 5 %?

Ausr. Bei $3^1/_2$ % geben 1000 *M.* jährlich 10 × $3^1/_2$ = 35 *M.*; bei $4^1/_2$ % geben 1000 *M.* jährlich 10 × $4^1/_2$ oder 45 *M.* u. s. w.

3) Wie viel Zins tragen 18000 *M.* jährlich zu $5^1/_2$ %?

Ausr. Bei $5^1/_2$ % tragen 1000 *M.* jährlich 10 × $5^1/_2$ = 55 *M.*; 18000 *M.* tragen 18 × 55 = 990 *M.*

4) Wie viel Zins werfen 21800 *M.* zu $4^1/_2$ % jährlich ab?

Ausr. 1000 *M.* geben 10 × $4^1/_2$ = 45 *M.*; 21000 *M.* geben 21mal so viel; 21 × 45 = 900 + 45 = 945; 800 *M.* geben 8 × $4^1/_2$ = 36; 945 + 36 = 981; also geben 21800 *M.* jährlich 981 *M.* Zins.

---

5) Wie viel Zins tragen 50, 25, 75 *M.* zu 4 %? 20, 40, 60, 80 *M.* zu 5 % jährlich? (Wenn 100 *M.* jährlich 4 *M.* Zins tragen, so tragen 50 *M.* die Hälfte von 4 *M.* oder 2 *M.* ꝛc.)

6) Wie viel Zins trifft auf 1 *M.* bei 3, 4, 5, 6, $3^1/_2$, $4^1/_2$ %?

Ausr. Wenn 100 *M.* Kp. 3 *M.* Zins geben, so gibt 1 *M.* den 100. Theil von 3 *M.* = 3 *ℌ.* Zs.; geben 100 *M.* Kp. 4 *M.* Zs., so ꝛc.

Die Zahl der Procente ist auch die Zahl der Pfennige, welche 1 *M.* Kapital jährlich als Zins abwirft. Bei 3 % gibt die Mark jährlich 3 *ℌ.*, bei 4 % gibt die Mark jährlich 4 *ℌ.* Zins ꝛc.

7) Wie viel Zins werfen 45 *M.* Kap. zu 5 % jährlich ab?

Ausr. 100 *M.* Kp. geben 5 *M.* Zs., 1 *M.* Kp. gibt 5 *ℌ.*; 45 *M.* Kp. geben 45 × 5 oder 225 *ℌ.* = 2,25 *M.* Zins. — Dergleichen Aufgaben bis zur Schlagfertigkeit!

8) Wie viel Zins tragen 795 *M.* Kapital zu 6 % jährlich?

Ausr. 700 *M.* Kp. machen 7 × 6 *M.* oder 42 *M.*; 95 *M.* machen 95 × 6 *ℌ.* oder 570 *ℌ.* = 5,70 *M.*; 42 *M.* + 5,70 *M.* = 47,70 *M.* Oder: 795 *M.* Kp. machen 8 × 6 *M.* — 5 × 6 *ℌ.* = 48 *M.* — 30 *ℌ.* = 47,70 *M.* Zs.

---

9) Welchen Zins geben 100 *M.* Kp. zu 4 % a. in 2, 3, 4 Jahren? b. in 6, 4, 3, 2, 1 Mon.? (In 1 Jahre geben 100 *M.* Kp. 4 *M.* Zs.; in 2 Jahren geben sie 2 × 4 oder 8 *M.*, in 3 Jahren geben sie 3 × 4 oder 12 *M.* ꝛc.; in 6 Mon. geben 100 *M.* die Hälfte von 4 *M.* = 2 *M.* ꝛc.)

10) Ein Kap. gibt jährl. 18 *M.* Zs.; wie v. vom 1. Jan. bis 1 Okt?

Ausr. Vom 1. Jan. bis 1. Okt. sind 9 Mon. = 6 + 3 Mon. In 12 Mon. macht der Zins 18 *M.*, in 6 Mon. 9 *M.* und in 3 Mon. 4,50 *M.*, in 9 Mon. also 9 *M.* + 4,50 *M.* = 13,50 *M.* — Oder man geht von 12 Mon. auf 3 Mon. und von 3 Mon. auf 9 Mon. — Oder man schließt auf 1 Mon. und dann auf 9.

Hier lasse man nochmal die Zeiträume bestimmen und dabei jeden Monat zu 30, das Jahr also zu 360 Tg. annehmen. Z. B. Vom 8. März bis 8. Aug. sind 5 Mon., vom 17. Okt. bis 17. Febr. des nächsten

Jahres sind 4 Mon., vom 1. April bis 27. April sind 27 — 1 = 26 Tage. Vom 19. Dec. bis 5. März des folg. Jahres =? (Vom 19. Dec. bis 19. Febr. sind 2 M., und vom 19. Febr. bis 5. März sind 11 + 5 oder 16 Tage, zusammen 2 Mon. 16 Tg. = 76 Tg.) u. s. w.

Schriftlich.

Wie viel Zins geben 1855 ℳ Kapital zu $4^1/_2$ % jährlich?

1. Durch die entsprechende Grundrechnungsart.

a. 1 8,5 5 × $4^1/_2$ ℳ
7 4,2 0
  9,2 7 5
8 3,4 7 5 ℳ

b. 1 8,5 5 × 4,5 ℳ
  9 2 7 5
7 4 2 0
8 3,4 7 5 ℳ = 83 ℳ 47,5 ₰.

1855 ℳ oder $18^{55}/_{100}$ × 100 ℳ Kp. geben 18,55 × $4^1/_2$ oder $4^1/_2$ × 18,55 ℳ Zins. Es ist dieß die einfachste Weise und daher ganz besonders zu berücksichtigen.

2. Durch den Zweisatz.

a. 100 ℳ K. — $4^1/_2$ ℳ Zs.
855 „ „ — ?

100 ℳ K.	9 × 855
1 „	2 × 100
855 „	

b. 100 ℳ — $4^1/_2$ ℳ Zs.
855 „ — ?

100 ℳ K.	2	9 ℳ
1 „	100	
855 „		855

3. Durch die Proportion.

Je größer das ausgeliehene Kapital ist, desto größer ist der jährliche Zins. Doppeltes Kapital, doppelter Zins; 3faches Kapital, 3facher Zins. Sowie sich also 100 ℳ K. zu 855 ℳ K. verhalten, eben so verhält sich der jährliche Zins aus 100 ℳ zu dem jährlichen Zinse aus 855 ℳ Steht:

100 ℳ : 855 ℳ = $4^1/_4$ ℳ Zins : x.

So oft 100 ℳ K. in 855 ℳ K. enthalten sind, so vielmal $4^1/_2$ ℳ Zins geben diese.

Von allen Zinsrechnungen mit einfachen Verhältnissen sind die bisherigen, als die im Leben häufigst vorkommenden, am ausführlichsten zu behandeln.

§. 343. Das Kapital ist zu berechnen.

Mündlich.

Ist ein Kapital zu 4% ausgeliehen, so heißt es: So vielmal 100 ℳ Kpt. ich ausgeliehen habe, so vielmal 4 ℳ Zs. nehme ich jährlich ein. Umgekehrt heißt es daher auch: So vielmal 4 ℳ Zins ich jährlich einnehme, so vielmal 100 ℳ Kpt. habe ich ausgeliehen. Beträgt der Jahreszins 24 ℳ, also 6 × 4 ℳ, so beträgt das Kapital 6 × 100 oder 600 ℳ; beträgt der Jahreszins 72 ℳ, also 18 × 4 ℳ, so beträgt das Kapital 18 × 100 oder 1800 ℳ.

So werden auch die Fälle besprochen, wenn das Kapital zu 3, zu $3^1/_2$, zu $4^1/_2$, zu 5 proc. aussteht.

Aufgabe: Welches Kapital gibt zu 4 % jährlich 185 ℳ. Zins?

Ausr. So vielmal 4 ℳ. Zins, so vielmal 100 ℳ. Kapital. Das Kapital beträgt daher so vielmal 100 ℳ., als 4 ℳ. Zs. in 185 ℳ. Zs. enthalten sind. 4 ist in 185 oder in 160 + 25 = 40 + $6^1/_4$ oder $46^1/_4$mal; das Kapital beträgt also $46^1/_4 \times 100$ oder 4625 ℳ.

Aufgabe: Die Zinsen eines Mannes berechnen sich per Tag auf 1 ℳ.; wie viel betragen seine Kapitalien, wenn sie ihm a. 4 %, b. 5 % abwerfen? (Bei 4 % betragen seine Kapitalien so vielmal 100 ℳ., als 4 ℳ. Zs. in 365 ℳ. Zs. enthalten sind = $91^1/_4 \times 100$ oder 9125 ℳ.; bei 5 % betragen sie so vielmal 100 ℳ., als 5 ℳ. Zs. in 365 ℳ. Zs. enthalten sind = 73 × 100 oder 7300 ℳ.)

Schriftlich.

Welches Kapital gibt zu $4^1/_2$ % jährlich 412,65 ℳ. Zins?

a. Durch die entsprechende Grundrechnungsart.

So vielmal $4^1/_2$ ℳ. Zins, so vielmal 100 ℳ. Kapital.

4,5 | 412,65 | 91,7 × 100 = 9170 ℳ.

b. Zweisatz.

4,50	ℳ. Zs.	100 ℳ. K.
412,85	„	x

$$\frac{100 \,.\, 41265}{450}$$

c. Proportion.

4,5 : 412,65 = 100 ℳ. K. : x

$$x = \frac{412,65 \,.\, 100}{4,5} = \frac{41265}{4,5}$$

Bei dem Zweisatze heißt es: Zu 450 ₰. Zs. gehören 100 ℳ. Kp.; zu 1 ₰. Zs. gehört der 450. Theil; zu 41265 ₰. gehört 41265mal so viel. — Bei der Proportion: Wie sich 4,5 ℳ. Zs. zu 412,65 ℳ. Zs. verhalten, so verhalten sich 100 ℳ. K. zu x ℳ. Kp.

§. 344. Der Zinsprocent ist zu berechnen.

1) A nimmt von 800 ℳ. Kapital jährlich 36 ℳ. Zins ein; zu wie viel Procent ist das Geld ausgeliehen?

Was soll berechnet werden? (Zu wie viel Procent ꝛc.) Was heißt das, deutsch ausgedrückt? (Wir sollen suchen, wie viel Zins 100 ℳ. jährlich tragen.) Wie heißt nun so die Aufgabe? (800 ℳ. Kpt. tragen 36 ℳ. Zs.; wie viel Zins tragen 100 ℳ. davon?)

Ausrechnung! Wenn 800 ℳ. K. 36 ℳ. Zs. tragen, so tragen 100 ℳ. den 8. Theil von 36 ℳ. = $4^1/_2$ ℳ. Das Geld ist also zu $4^1/_2$ % ausgeliehen.

2) Wie viel Procent werfen 1200 ℳ. ab, wenn der jährliche Zins 57 ℳ. beträgt?

Ausr. Berechnen soll ich, wie viel Zins 100 ℳ. jährlich tragen, und die Aufgabe sagt mir, wie viel Zins 1200 ℳ. geben. 1200 ℳ. geben

57 ℳ Zs.; 100 ℳ geben den 12. Theil davon; der 12. Theil von 57 ℳ = $4^3/_4$ ℳ Die 1200 ℳ werfen also $4^3/_4$ % ab.

3) Von 75 ℳ Kpt. erhält man jährlich 3,75 ℳ Zs.; wie viel Procent also?

Ausr. Ich soll suchen, wie viel Zins 100 ℳ tragen; 75 ℳ tragen 3,75 ℳ Zs.; 25 ℳ tragen den 3. Theil davon; der 3. Theil von 3,75 ℳ = 1,25 ℳ; 100 ℳ tragen 4 × 1,25 ℳ = 5 ℳ Die 75 ℳ Kpt. stehen also zu 5 % aus.

4) 1250 ℳ Kpt. tragen jährlich 68,75 ℳ Zs.; wie viel proc.?

Ausr. Ich soll berechnen, wie viel Zins 100 ℳ jährlich geben; 1250 ℳ geben jährlich 68,75 ℳ Zins; 50 ℳ geben den 25. Theil davon. Der 25. Theil von 50 ℳ = 2 ℳ, von 18 ℳ = 18 × 4 oder 72 ₰, von 75 ₰ = 3 ₰; zusammen 2,75 ℳ So viel Zins geben 50 ℳ; 100 ℳ geben 2 × 2,75 ℳ = 5,50 ℳ Die 1250 ℳ Kpt. tragen also $5^1/_2$ %.

Schriftlich.

1250 ℳ K.	68,75 ℳ Zs.	1250 : 100 = 68,75 ℳ : x
100 „ „	x	x = $5^1/_2$ %.

§. 345. Vermischte Aufgaben.

1) Welches ist der jährliche Zins von 1750 ℳ zu 4%? (1750 ℳ tragen $17^1/_2$ × 4 = 68 + 2 oder 70 ℳ Zs.)

Benützt das Resultat und kehrt die Aufgabe um! (1750 ℳ tragen jährlich 70 ℳ Zins; wie viel 100 ℳ?) Ausrechnung! Tragen 1750 ℳ jährlich 70 ℳ Zs., so tragen 50 ℳ den 35. Theil von 70 ℳ = 2 ℳ, und 100 ℳ tragen 2 × 2 oder 4 ℳ

Berechnet nun aus dem Zins und Zinsprocent das Kapital! Wie heißt die Aufgabe? (Welches Kapital trägt zu 4 % jährlich 70 ℳ Zins?) Ausrechnung! (So vielmal 4 ℳ Zs., so vielmal 100 ℳ Kapital. 4 ℳ Zs. sind in 70 ℳ Zs. $17^1/_2$mal enthalten; $17^1/_2$ × 100 = 1750. Das Kapital ist also 1750 ℳ)

Die allseitige Behandlung solcher Aufgaben fördert die Gewandtheit sowohl in der Auffassung, als in der Ausrechnung. Die abgeleiteten Aufgaben müssen jedoch von den Schülern selbst gebildet werden.

4) Bei 4 % wirft ein Kapital 180 ℳ Zinsen ab; wie viel in derselben Zeit bei 5 %? (Bei 1 % trägt das Kapital nur den 4. Theil der Zinsen, also nur 45 ℳ; bei 5 % 5mal so viel, nämlich 5 × 45 oder 225 ℳ) Mit dem Zinsprocent steigen und fallen die Zinsen. Andere Beispiele!

3) Welches Kapital wirft zu 4 % in derselben Zeit eben so viel Zins ab, wie 800 ℳ zu 5 %? (Bei 5 % beträgt das Kapital 800 ℳ; bei 1 % muß dasselbe, um eben so viel Zins abzuwerfen, 5 × 800 oder 4000 ℳ betragen; bei 4 % reicht der 4. Theil hievon aus; der 4. Theil von 4000 ℳ = 1000 ℳ)

4) A verkauft $7^1/_2$ hl Getreid à 12 ℳ.; der Erlös reichte ihm gerade hin, 4 m Tuch à 6,75 ℳ. und den Jahreszins von einem zu $4^1/_2$ % verzinslichen Kapital zu bezahlen. Wie groß ist das Kapital? (1400 ℳ.)

B. Zinsrechnungen mit mehrfachen Verhältnissen.

§. 346. Der Zins ist zu berechnen.

1) Wie viel Zins geben 885 ℳ. zu 5 % in 2 Jahren?

Mündlich. Ich suche den Zins zuerst auf 1 Jahr, dann auf 2 Jahre. 800 ℳ. geben 8 × 5 oder 40 ℳ.; 85 ℳ. geben 85 × 5 ₰. = 4,25 ℳ.; 40 ℳ. + 4,25 ℳ. = 44,25 ℳ. Das ist der Zins auf 1 Jahr. Auf 2 Jahre macht er 2 × 44,25 ℳ. = 88,50 ℳ.

Schriftlich. a. 8,85 ℳ. × 5
44,25 ℳ. × 2
88,50 ℳ.

b.

100 ℳ. 1 J.	5 ℳ. Zs.	
885 „ 2 „	x	
100 ℳ. 1 J.		
1 „ 1 „	$\frac{5 \,.\, 885 \,.\, 2}{100}$	
885 „ 2 „		

c. 100 : 885 = 5 ℳ. : x
1 : 2

$$x = \frac{2 \,.\, 885 \,.\, 5}{100}$$

b. 100 ℳ. geben in 1 Jahre 5 ℳ. Zs.; 1 ℳ. gibt den 100. Theil; 885 ℳ. geben dieß 885mal, nämlich 885 × 5 ℳ. getheilt durch 100. Das ist der Zins auf 1 Jahr. Auf 2 J. macht er 2mal so viel.

c. Je mehr Kapital, desto mehr Zins; je länger das Kapital aussteht, desto mehr Zins wirft es ab. Es sind daher beide Verhältnisse steigend.

2) Wie viel Zins geben 1250 ℳ. zu $4^1/_2$ % in 7 Mon.?

Mündlich.

100 ℳ. geben in 1 Jahre $4^1/_2$ ℳ. Zins; 1200 ℳ. geben 12 × $4^1/_2$ ℳ. = 54 ℳ., und 50 ℳ. geben die Hälfte von $4^1/_2 = 2^1/_4$ ℳ.; $54 + 2^1/_4 = 56^1/_4$ ℳ. = 56,25 ℳ. So viel in 1 Jahre. In 1 Monat beträgt der Zins $^1/_{12}$ von 56,25 ℳ. = 4 ℳ. $68^3/_4$ ₰.; in 7 Mon. 7 × 4 ℳ. $68^3/_4$ ₰. = 32 ℳ. $81^1/_4$ ₰.

Schriftlich.

a. 12,50 ℳ. × $4^1/_2$
50,00
6,25
56,25 ℳ. per Jahr

56,25 ℳ.
28,125 auf 6 Monate
4,6875 $^1/_6$ hievon auf 1 Mon.
32,8125 = 32 ℳ. $81^1/_4$ ₰.

b.

100 ℳ.	12 Mon.	$4^1/_2$ ℳ.	
1250 „	7 „	x	
100 ℳ.	12 Mon.		
1 „	1 „		$\frac{9 \,.\, 1250 \,.\, 7}{2 \,.\, 100 \,.\, 12}$
1250 „	7 „		

c. 100 : 1250 = $4^1/_2$ ℳ. : x
12 : 7

$$x = \frac{7 \,.\, 1250 \,.\, 9}{100 \,.\, 12 \,.\, 2}$$

3) Wie viel beträgt der Zins aus 580 ℳ. bei 6 % vom 26. August 1876 bis 13. Mai 1878?

Beisp. 2. A erhält 3 Fässer Waare von 314, 282 und 304 Kilo Brutto. Wie viel hat er dafür zu zahlen, wenn 10 % Tara, $2^1/_2$ % Gutgewicht und 3,2 *M.* für 1 Kilo Netto gerechnet werden?

a.	b.	
314	? *M.*	900 kg Brutto
282	100 kg Br.	90 kg ohne Gutgewicht
304	100 kg ohne Gutgew.	97,5 kg Netto
900 kg Br.	1 kg Netto	3,2 *M.*
	10	2527,2 *M.*

Termin-Rechnung.

§. 360. Vorbemerkung.

Je länger man eine Summe Geldes in Händen hat und vortheilhaft gebraucht, desto größer ist der Nutzen, den sie bringt. Die Leistung einer unverzinslichen Zahlung vor dem Termin ist daher für den Zahlungspflichtigen von Nachtheil, für den Empfänger von Vortheil. Wird eine Zahlung nach dem Termin geleistet, so ist's umgekehrt. Nun kommt es im Leben nicht selten vor, daß eine Zahlung, die an einem bestimmten Termin auf einmal zu leisten ist, in verschiedenen Terminen gemacht werden will, oder daß eine solche, die in verschiedenen Terminen zu leisten ist, auf einmal entrichtet werden soll. Wie wird nun in diesem Falle verfahren, damit solches weder dem einen, noch dem andern Theile zum Schaden gereicht? Der Schuldner, welcher einen Theil der Summe vor dem Zahlungstermin entrichtet, darf dafür den anderen Theil so lange über den Termin hinaus behalten, bis Schaden und Nutzen sich gegenseitig decken. Das Mittel zur Ausgleichung ist also die Zeit, und die Bestimmung des Zeitpunktes, an dem die Zahlung ohne Nachtheil für beide Seiten stattzufinden hat, ist der Gegenstand der Terminrechnung. Dabei wird angenommen, daß eine Summe in einer gewissen Zeit denselben Nutzen bringe, als die Hälfte der Summe in der doppelten Zeit, als $^1/_3$ der Summe in der dreifachen Zeit, oder als die doppelte Summe in der Hälfte der Zeit, als die 3fache Summe in $^1/_3$ der Zeit u. s. w. Und so ist es auch in der That. Bei 5 % werfen 5 *M.* in 4 Jahren eben so viel Zins ab, als 4 × 5 oder 20 *M.* in 1 Jahre, und eben so viel als 1 *M.* in 4 × 5 oder 20 Jahren, nämlich 1 Mark.

§. 361. Für mehrere Termine einen Termin.

Beisp. 1. 800 *M.* sind in 2 Terminen zu zahlen und zwar 400 *M.* nach 3 Jahren und 400 *M.* nach 5 Jahren; wann ist die Summe auf einmal zu erlegen? Antwort: In 4 Jahren.

Da die 2 Posten von gleicher Größe sind, so fällt der zu bestimmende Termin in die Mitte der beiden gegebenen. Die 800 *M.* sind daher nach 4 J. zahlbar. Hiernach werden die einen 400 *M.* 1 Jahr später,

die andern 1 Jahr früher gezahlt; Vor= und Nachtheil heben sich so gegenseitig auf. Die umständlichere Berechnung ist die:

400 ℳ 3 J.	= 100 ℳ 12 J.	8 | 32 J.	4 J.
400 ℳ 5 J.	= 100 ℳ 20 J.	32	
800 ℳ	100 ℳ 32 J.		

Der Schuldner kann jeden der beiden Posten bis zur Verfallzeit, die einen 400 ℳ also 3 Jahre, die andern 400 ℳ 5 Jahre lang für sich benutzen. Es gewähren nun aber 400 ℳ in 3 Jahren eben so viel Nutzen, wie 100 ℳ in 4 × 3 oder 12 Jahren, und 400 ℳ in 5 Jahren eben so viel, wie 100 ℳ in 4 × 5 oder 20 Jahren. Der Gewinn, welchen die beiden Posten bis zur Verfallzeit dem Schuldner abwerfen, ist daher dem gleich, welchen 100 ℳ in 12 + 20 oder 32 Jahren gewähren, und der Nutzen, welchen 100 ℳ in 32 Mon. gewähren, ist wieder dem gleich, den 800 ℳ in dem 8. Theil von 32 Jahren, d. i. in 4 Jahren bringen.

Beisp. 2. A kauft für 9600 ℳ ein Haus unter der Bedingung, daß ihm gestattet werde, 1600 ℳ nach 1 Mon., 1800 ℳ nach 3 Mon., 3000 ℳ nach 6 Mon. und 3200 ℳ nach 8 Mon. zu zahlen. Wann kann er seine Schuld auf einmal abtragen? Antwort: In 5 Mon. 8 Tg.

Berechnung.

1600 ℳ 1 Mon.	= 100 ℳ 16 Mon.	96 | 506 M.	5 Mon.
1800 „ 3 „	= 100 „ 54 „	480	
3000 „ 6 „	= 100 „ 180 „	26 × 30	
3200 „ 8 „	= 100 „ 256 „	96 | 780 Tg.	$8^1/_8$ Tg.
9600 ℳ	100 ℳ 506 Mon.		

A hat das Recht, 100 ℳ 506 Mon. lang zu benutzen. Der Gewinn, den 100 ℳ in 506 Monat bringen, ist gleich dem, den 9600 ℳ in dem 96. Theil dieser Zeit geben. $^1/_{96}$ von 506 Mon. = 5 Mon. $8^1/_8$ Tag.

§. 362. Für einen Termin mehrere Termine.

Beisp. 1. A hat nach 2 Jahren 600 ℳ ohne Zins zu zahlen. Er zahlt aber 300 ℳ sogleich; wie lange darf er nun die übrigen 300 ℳ behalten?

Hier springt sogleich in die Augen, daß A, da er die eine Hälfte der Schuld um 2 Jahre vor dem Termin zahlt, die andere Hälfte um eben so viel nach demselben, mithin erst in 4 Jahren zu zahlen hat. Die Art und Weise, es zu berechnen, ist aber die: A hat das Recht, die 600 ℳ 2 Jahre lang zu benutzen. Nun bringen 600 ℳ in 2 Jahren denselben Vortheil als 100 ℳ in 6 × 2 oder 12 Jahren. Darf er aber 100 ℳ 12 Jahre lang benutzen, so beträgt es für die 300 ℳ, die er noch behält, $^1/_3$ von 12 oder 4 Jahre. (300 ℳ geben in 4 Jahren denselben Zins als 600 ℳ in 2 J.)

Beisp. 2. A kauft ein Haus und bezahlt die Kaufsumme sogleich bis auf 5000 ℳ, welche er in 6 Mon. zu erlegen hat. Er bezahlt aber

schon nach 3 Mon. 2500 ℳ.; wie lange darf er dafür die übrigen 2500 ℳ. noch benutzen?

Auch dieser Fall ist sehr einfach. Da A die einen 2500 ℳ. 3 Mon. vor dem Termine zahlt, so darf er dafür die andern 2500 ℳ. 3 Mon. über denselben hinaus behalten. Er hat diese also, anstatt nach 3 Mon., erst nach 6 zu entrichten. Die Berechnung ist folgende:

5000 ℳ. 6 Mon. = 100 ℳ. 300 Mon.		25 | 150 M. | 6 Mon.
5000 ℳ. 3 Mon. = 100 ℳ. 150 Mon.		
2500 ℳ.	100 ℳ. 150 Mon.	

A hat das Recht, die 5000 ℳ. 6 Mon. lang zu benutzen. Der Nutzen von 5000 ℳ. auf 6 Mon. ist aber = dem von 100 ℳ. auf 50 × 6 oder 300 Mon. Da er nun die vollen 5000 ℳ. nur 3 Mon. in Händen hatte und dieß so viel ist als 100 ℳ. auf 50 × 3 oder 150 Mon.; so hat er nach der ersten Zahlung noch den Nutzen von 100 ℳ. auf 300 — 150 = 150 Mon. anzusprechen. Nun ist die Frage: Auf welche Zeit beträgt der Nutzen von 2500 ℳ. eben so viel, als von 100 ℳ. in 150 Mon.? 100 ℳ. auf 150 Mon. = 2500 ℳ. auf $^1/_{25}$ von 150 Mon. = 6 Mon.

Beisp. 3. A hat nach 9 Mon. 1200 ℳ. zu zahlen. Nun zahlt er aber schon nach 3 Mon 350 ℳ. und nach weiteren 2 Mon. 450 ℳ.; wie lange darf er den Rest dann noch benützen?

a.		b.	c.
1200 ℳ. 9 Mon.	=	10800 ℳ. 1 Mon.	10800
1200 ℳ. 3 Mon.	=	3600 ℳ. 1 Mon.	— 5300
850 ℳ. 2 Mon.	=	1700 ℳ. 1 Mon.	400 | 5500 | $13^3/_4$ Mon.
850—450=400 ℳ.		5300 ℳ. 1 Mon.	

a. A darf die 1200 ℳ. auf 9 Mon. benutzen. Schon nach 3 Mon. zahlt er 350 ℳ.; er benutzt also die vollen 1200 ℳ. nur 3 Mon. lang und hat dann noch 1200 — 350 = 850 ℳ. im Genuß.

Von diesen 850 ℳ. zahlt er nach 2 Mon. 450 ℳ.; die 850 ℳ. benutzt er also 2 Mon. lang und hat dann noch 850 — 450 = 400 ℳ. in Händen.

b. Zu beanspruchen hat A den Nutzen von 1200 ℳ. auf 9 Mon. oder, was dasselbe ist, von 9 × 1200 = 10800 ℳ. auf 1 Monat.

Bezogen hat er den Nutzen bereits von 1200 ℳ. auf 3 Mon. und von 850 ℳ. auf 2 Mon., im Ganzen von 3600 + 1700 oder 5300 ℳ. auf 1 Monat.

c. Zu beziehen hat A daher den Nutzen noch von 10800 — 5300 = 5500 ℳ. auf 1 Mon. = 1 ℳ. auf 5500 Mon. = 400 ℳ. auf $13^3/_4$ Mon.

§. 363. Für mehrere Termine mehrere andere.

Beisp. 1. B hat 500 ℳ. nach 4 Mon. und 700 ℳ. nach 6 Mon. zu zahlen; er bezahlt 800 ℳ. nach 5 Mon.; wann ist der Rest zu erlegen? Antwort: Nach $5^1/_2$ Mon.

500 ℳ. 4 Mon.	= 2000 ℳ. 1 Mon.		400 | 2200 | $5^1/_2$ Mon.
700 ℳ. 6 Mon.	= 4200 ℳ. 1 Mon.		2000
1200 ℳ.	6200 ℳ. 1 Mon.		200
800 ℳ. 5 Mon.	= 4000 ℳ. 1 Mon.		400
400 ℳ.	2200 ℳ. 1 Mon.		

B hat den Nutzen von 500 ℳ. auf 4 Mon. und von 700 ℳ. auf 6 Mon. oder, was dasselbe ist, von 2000 + 4200 = 6200 ℳ. auf 1 Mon. zu beanspruchen.

Bezogen hat er den Nutzen bereits von 800 ℳ. auf 5 Mon. = 4000 ℳ. auf 1 Mon.

Zu beziehen hat er also noch den Nutzen von 6200 — 4000 = 2200 ℳ. auf 1 Mon. = 1 ℳ. auf 2200 Mon. = 400 ℳ. auf $5^1/_2$ Mon.

Beisp. 2. R hat 800 ℳ. nach 3 Mon. und 900 ℳ. nach 5 Mon. zu bezahlen. Er bezahlt 600 ℳ. nach 4 Mon. und 500 ℳ. nach 6 Mon.; wann muß er den Rest abtragen?

	800 ℳ. 3 Mon.	= 2400 ℳ. 1 Mon.
	900 „ 5 Mon.	= 4500 „ 1 „
a.	1700 ℳ.	6900 ℳ. 1 Mon.
	600 ℳ. 4 Mon.	= 2400 ℳ. 1 Mon.
	500 „ 6 „	= 3000 „ 1 „
b.	1100 ℳ.	5400 ℳ. 1 Mon.
c.	600 ℳ.	1500 ℳ. 1 Mon.

R schuldete 1700 ℳ.; bezahlt hat er daran 1100 ℳ.; in Händen hat er noch 600 ℳ. Zu beanspruchen hatte er den Nutzen von 6900 ℳ. auf 1 Mon.; bezogen hat er bereits denselben von 5400 ℳ. auf 1 Mon.; zu beanspruchen hat er also den Nutzen noch von 1500 ℳ. auf 1 Mon. = 1 ℳ. auf 1500 Mon. = 600 ℳ. auf 1500 Mon. : 600 = $2^1/_2$ Mon.

§. 364. Zinszahlungen.

Sind verschiedene Zinstermine auf einen und denselben Tag zu vereinigen, so werden die Zinsen als Kapital angesehen und (nach §. 360) eben so behandelt.

Beisp. Ich leihe dem B zu 5 % am 1. März 400 ℳ., am 24. Juli 300 ℳ. und am 10. Okt. 600 ℳ. und wünsche, daß der Zinstermin von sämmtlichen Posten einer und derselbe sei. Auf welchen Tag wird dieser fallen müssen?

a. Berechnung der jährlichen Zinsen à 5 %.

400 ℳ. K. = 20 ℳ. Zs., fällig d. 1 März.
300 „ „ = 15 „ „ „ „ 24. Juli, $4^4/_5$ M. nach d. 1. März.
600 „ „ = 30 „ „ „ „ 10. Okt., $7^1/_3$ „ „ „ 1. „

b. Berechnung des mittleren Zinstermins.

Der erste Zins ist am 1. März des folgenden Jahres fällig. An diesem Tage stellt sich die Aufgabe: B hat heute 20 ℳ., nach $4^4/_5$ Mon. 15 ℳ. und nach $7^1/_3$ Mon. 30 ℳ. zu zahlen; wann hat er diese 3 Posten

zugleich abzutragen? Da B die 20 ℳ. heute zu zahlen hat, so hat er kein Recht darauf, sie noch länger zu benutzen. Dagegen steht ihm zu, die 15 ℳ. noch $4\frac{4}{5}$ Mon. und die 30 ℳ. noch $7\frac{1}{3}$ Mon. für sich zu verwenden.

20 ℳ.	0 Mon.				65 | 292 | 4 Mon.
15 „	$4\frac{4}{5}$ „	= 1 ℳ.	72 Mon.		260
30 „	$7\frac{1}{3}$ „	= 1 „	220 „		32 × 30
65		1 ℳ.	292 Mon.		65 | 960 | $14\frac{10}{13}$ Tg.

Für $14\frac{10}{13}$ Tg. werden 15 Tg. genommen. Der Zinstermin fällt also 4 Mon. 15 Tg. nach dem 1. März, d. i. auf den 16. Juli.

Man kann übrigens von jedem Zeitpunkt aus den mittleren Zinstermin berechnen. Nehmen wir den 1. Jan. an, so stellt sich die Berechnung, wie folgt:

400 ℳ. K. = 20 ℳ. Zs., fällig den 1. März, also nach 2 Mon.
300 „ „ = 15 „ „ „ „ 24. Juli, also nach $6\frac{4}{5}$ Mon.
600 „ „ = 30 „ „ „ „ 10. Okt., „ „ $9\frac{1}{3}$ „

20 ℳ.	2 Mon.	= 1 ℳ.	40 Mon.		65 | 422 | 6 Mon.
15 „	$6\frac{4}{5}$ „	= 1 „	102 „		390
30 „	$9\frac{1}{3}$ „	= 1 „	280 „		32 × 30
65 ℳ.		1 ℳ.	422 Mon.		65 | 960 | $14\frac{10}{13}$ Tg.

Hiernach fällt der Zinstermin 6 Mon. 15 Tg. nach dem 1. Januar, also ebenfalls auf den 16. Juli.

Gesellschafts- oder Theilungs-Rechnung.

§. 365. Vorbemerkung.

Wenn zwei oder mehrere Personen zusammentreten, um gemeinschaftlich Etwas zu unternehmen, so bilden sie eine Gesellschaft. Beabsichtigen sie, einen Einkauf zu machen, ein Geschäft zu begründen rc., so haben sie hiezu eine gewisse Summe Geldes nöthig. Was jeder dazu beiträgt oder einlegt, wird seine Einlage genannt. Entweder sind die Einlagen von gleicher oder von verschiedener Größe. Sind sie von gleicher Größe, so wird auch der Gewinn oder der Verlust in gleiche Theile getheilt. Mit Aufgaben dieser Art haben wir es hier nicht zu thun. Vielmehr werden jetzt bloß solche Fälle in Betracht gezogen, wobei die Einlagen und dadurch auch die Antheile an dem Gewinn oder Verlust von verschiedener Größe sind. Das ist Gegenstand der eigentlichen Gesellschaftsrechnung. Es wird dieselbe aber auch bei Vertheilung der Steuern, Umlagen, Brandschatzungen und Einquartirungen, dann bei Concursen, Erbtheilungen, sowie überhaupt da in Anwendung gebracht, wo Etwas nach bestimmten Verhältnissen zu vertheilen ist. Die Art und Weise, wie das Größenverhältniß der Theile zu einander bestimmt wird, heißt Theilungsfuß.

Gibt der Theilungsfuß an, wie vielmal so groß oder so klein ein Theil ist, als ein anderer; so ist das Verhältniß der Theile geometrisch bestimmt.

Gibt der Theilungsfuß an, um **wie viel** ein Theil größer oder kleiner ist als ein anderer, so ist das Verhältniß der Theile **arithmetisch** bestimmt.

1. Das Verhältniß der Theile ist geometrisch bestimmt.

A. Mündlich.

§. 366.

1) A kauft 2 Kilo Kaffee und B 3 Kilo von derselben Sorte. Im Ganzen haben beide 14 *M.* zu bezahlen; wie viel jeder?

Aufl. Im Ganzen sind für 2 + 3 oder 5 Kilo 14 *M.* zu bezahlen. Die Aufgabe ist also: 5 kg kosten 14 *M.*; wie viel kosten a. 2 kg? b. 3 kg? Ausr. Kosten 5 kg 14 *M.*, so kostet 1 kg den 5. Theil von 14 *M.* = $2^4/_5$ *M.* Kostet aber 1 kg $2^4/_5$ *M.*, so kosten 2 kg 2 × $2^4/_5$ = $5^3/_5$ *M.*, und 3 kg kosten 3 × $2^4/_5$ = $8^2/_5$ *M.* ($5^3/_5$ + $8^2/_5$ = 14.)

2) A und B haben 384 *M.* so unter sich zu theilen, daß A 1 Theil, wie B 2 Theile erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Ausr. Da A 1 Theil, wie B 2 Theile erhalten soll, so ist die zu theilende Summe in 1 + 2 oder 3 gleiche Theile zu zerlegen. 384 *M.* in 3 gleiche Theile getheilt = 3 × 128 *M.* A bekommt also 1 × 128 *M.*, und B 2 × 128 oder 256 *M.* (128 + 256 = 384.)

3) Zwei Brüder, A und B, haben 75 *M.* unter sich zu theilen. A soll so oft 2 *M.* erhalten, als B 3. Wie viel entfällt auf jeden? Antwort: Auf A 30 *M.*, auf B 45 *M.*

Aufl. Von den 75 *M.* nimmt A 2 *M.*, B 3 *M.* weg. Nun sind 2 + 3 oder 5 *M.* vertheilt. Setzen A und B diese Art zu theilen fort, bis die Summe erschöpft ist; so hat dann A so vielmal 2 *M.* und B so vielmal 3 *M.*, als 5 *M.* in 75 *M.* enthalten sind. Ausr.!

4) 1200 *M.* sind so zu theilen, daß B 3mal so viel bekommt als A. Wie viel jeder? Antwort: A 300, B 900 *M.*

Aufl. B soll 3mal so viel als A erhalten. Bekommt A 1 Theil, so muß B 3 × 1 Theil oder 3 Theile erhalten. Die 1200 *M.* sind daher in 1 + 3 oder 4 gleiche Theile zu theilen. Der 4. Theil von 1200 *M.* = 300 *M.* So viel erhält A; B erhält 3 × 300 oder 900 *M.*

5) Von 245 *M.* soll B $2^1/_2$mal so viel als A bekommen. Wie viel jeder? Antw.: A 70, B 175 *M.*

Aufl. B soll $2^1/_2$mal so viel als A bekommen. Gibt man dem A also 1 Theil, so muß B $2^1/_2$ × 1 Theil = $2^1/_2$ Theil erhalten; gibt man dem A 2 Theile, so muß B $2^1/_2$ × 2 = 5 Theile bekommen ꝛc. Am einfachsten wird die Theilung, wenn man dem A 2 Theile gibt; denn in diesem Falle erhält B gerade 5. Die 245 *M.* sind daher in 2 + 5 oder 7 gleiche Theile zu theilen.

6) A und B sollen 423 *M.* so unter sich theilen, daß sich der Antheil des A zu dem Antheile des B verhalte, wie $^4/_7$ zu $^5/_7$; wie viel muß jeder bekommen? Antw.: A 188, B 235 *M.*

Aufl. Der Bruch $^4/_7$ enthält 4 Theile, wie der Bruch $^5/_7$ 5 Theile hat; A soll also 4 Theile erhalten, wie B 5; die 423 *M.* sind daher in

4 + 5 oder 9 gleiche Theile zu theilen. $^1/_9$ von 423 ℳ = 47 ℳ; A erhält 4 × 47 und B 5 × 47 ℳ.

7) Zwei Dörfer, A und B, haben 75 Hektar Weideplatz unter sich so zu vertheilen, daß sich ihre Antheile wie 5 zu 3 verhalten. Wie viel wird jedem Dorfe zufallen? (A 46,8750, B 28,1250 ha.)

Aufl. Wie verhält sich 5 zu 3? Antwort: 5 = 5 × 1, und 3 = 3 × 1; die Zahl 5 enthält also 5 Theile, wie die Zahl 3 deren 3 hat. Also ist der Ausdruck: die Antheile von A und B sollen sich wie 5 zu 3 verhalten = A soll 5 solche Theile erhalten, wie B 3. Die ganze Fläche ist daher in 5 + 3 oder 8 gleiche Theile zu theilen. Ausr.!

8) Unter B und C sind 105 kg Waare so zu vertheilen, daß sich ihre Antheile wie $^1/_3$ und $^1/_4$ zu einander verhalten. (B 60, C 45 kg.)

Aufl. $^1/_3$ und $^1/_4$ verhalten sich zu einander wie $^4/_{12}$ und $^3/_{12}$. B soll also 4 solche Theile bekommen, wie C 3. Mithin sind die 105 kg in 4 + 3 oder 7 gleiche Theile zu theilen. Ausr.!

9) Von 180 ℳ soll A die Hälfte, B den 3. Theil und C den Rest erhalten. Wie viel jeder? (A 90, B 60, C 30 ℳ)

Aufl. A bekommt die Hälfte, B den 3. Theil vom Ganzen. Die Hälfte von 180 ℳ = 90 ℳ, und der 3. Theil von 180 ℳ = 60 ℳ. Das sind die Antheile des A und des B. 180 ℳ sind zu vertheilen; 90 + 60 oder 150 ℳ sind bereits vertheilt. Das Uebrige, also 180 — 150 oder 30 ℳ bekommt C.

10) A und B unternehmen einen Handel. A gibt 500 ℳ dazu, B 700 ℳ. Sie gewinnen 360 ℳ. Wie viel hat jeder davon anzusprechen? Antwort: A 150, B 210 ℳ.

Aufl. Die Einlagen der beiden Unternehmer betragen 500 + 700 oder 1200 ℳ. Mit diesen 1200 ℳ werden 360 ℳ gewonnen. Es fragt sich nun, wie viel hievon kommt auf die 500 ℳ Einlage des A? wie viel auf die 700 ℳ Einlage des B? Das findet sich, wenn wir wissen, wie viel von dem Gewinn auf 100 ℳ Einlage entfällt. Da auf 1200 ℳ Einlage 360 ℳ Gewinn kommen, so trifft auf 100 ℳ $^1/_{12}$ von 360 = 30 ℳ. Folglich erhält A mit 500 ℳ 5 × 30 oder 150 ℳ, und B mit 700 ℳ Einlage 7 × 30 oder 210 ℳ. Dadurch ist der ganze Gewinn erschöpft. Denn 150 + 210 ℳ = 360 ℳ.

Oder: Sowie sich die Einlagen zu einander verhalten, so auch die Antheile an dem Gewinn. Nun verhalten sich 500 ℳ zu 700 ℳ wie 5 : 7. A hat daher 5 Theile anzusprechen, wie B 7; die 360 ℳ Gewinn sind also in 5 + 7 oder 12 gleiche Theile zu theilen u. s. w.

B. Schriftlich.

§. 367.

Beisp. 1. Die 3 Besitzer eines Waldes schlagen in diesem einmal 116 Klafter Scheitholz; davon kommen auf A 3 Theile, auf B 4 und auf C 5; wie viel also?

	a.	c.		b.	
Ausr.	A 3 Theile	$= 3 \times 9\frac{2}{3}$ Klftr. $= 29$ Klftr.	12	116	$9\frac{2}{3}$
	B 4 „	$= 4 \times 9\frac{2}{3}$ „ $= 38\frac{2}{3}$ „		108	
	C 5 „	$= 5 \times 9\frac{2}{3}$ „ $= 48\frac{1}{3}$ „		8	
	12 Theile	$= 116$ Klftr.			

Beisp. 2. Zwei Webergesellen A und B fertigen in einer gewissen Zeit 375 m, wie viel jeder, wenn B 8 m wirkt bis A 7?

Ausr. A 7 m; 25×7 m $= 175$ m	15	375	25
B 8 „ 25×8 „ $= 200$ „		30	
15 m — 375 m		75	

So oft $8 + 7$ oder 15 m in 375 m enthalten sind, so vielmal 7 m macht A, so vielmal 8 m macht B.

Beisp. 3. 3 Dampfmaschinen verbrauchen miteinander 847 Ctr. Steinkohlen; wie viel jede, wenn sie sich hinsichtlich ihres Kohlenverbrauchs verhalten wie 5, 7, 9?

Ausr. A 5 Theile $= 5 \times 40\frac{1}{3} = 201\frac{2}{3}$ Ctr.	21	847	$40\frac{1}{3}$
B 7 „ $= 7 \times 40\frac{1}{3} = 282\frac{1}{3}$ „		84	
C 9 „ $= 9 \times 40\frac{1}{3} = 363$ „		7	
21 Theile $= 847$ Ctr.			

Die Maschinen verhalten sich hinsichtlich des Kohlenverbrauchs wie 5, 7, 9, d. h. von $5 + 7 + 9$ oder 21 Theilen Kohle verbraucht die Maschine A in derselben Zeit 5, in der B 7 und C 9 verbrauchen. Da nun 1 Theil, nämlich $\frac{1}{21}$ von 847 Ctr. $= 40\frac{1}{3}$ Ctr., so kommt auf A $5 \times 40\frac{1}{3}$ Ctr. &c.

Beisp. 4. Von 1280 M. erhält A $\frac{1}{3}$, B $\frac{2}{5}$, C den Rest; wie viel also jeder? (A $426\frac{2}{3}$ M., B 512 M., C $341\frac{1}{3}$ M.)

Ausr.	3 | 1280 M.	5 | 1280 M.	A $426\frac{2}{4}$ M.	1280 M.
	A $426\frac{2}{3}$ M.	256×2	B 512 M.	$-938\frac{2}{3}$ M.
		B 512 M.	$938\frac{2}{3}$	C $341\frac{1}{3}$ M.

Die Theile $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$ beziehen sich auf's Ganze, d. i. auf 1280 M. A erhält also von dieser Summe den 3. Theil, B 2mal den 5. Theil, C erhält das, was nach Abzug der Antheile des A und B im Reste bleibt.

Beisp. 5. A, B und C haben sich in 2400 M. so zu theilen, daß sich ihre Antheile zu einander verhalten, wie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$. Wie viel macht's für den Einzelnen? (Mit Korrektur gekürzt: Für A 972,07 M.; B 778,38 M.; C 648,65 M.)

	60
A $\frac{1}{4}$	15 Theile.
B $\frac{1}{5}$	12 „
C $\frac{1}{6}$	10 „
	37 Theile.

Man vergleiche diese Aufgabe mit der vorstehenden. Dort bezeichnen die Zahlen das Verhältniß der Antheile zum Ganzen, hier das Verhältniß des einen Antheils zum andern. Dort konnten die Antheile aus dem Ganzen sogleich herausgezogen werden; hier muß man die Bruchzahlen, um das Verhältniß der Antheile zu ein-

ander zu erkennen, erst gleichnamig machen, und dann, um zu wissen, in wie viele gleiche Theile die Summe zu theilen ist, zusammenzählen. Nachdem dieß geschehen ist, heißt es: 37 Theile = 2400 ℳ; wie viel betragen die 15 Theile für A, die 12 Theile für B und die 10 Theile für C? Die Ausrechnung ist bekannt.

Beisp. 6. 3600 ℳ sind so zu theilen, daß die Theile A, B und C im Verhältniß zu einander stehen, wie die Zahlen $^{2}/_{3}$, $1^{1}/_{2}$ und 2; wie viel machts für jeden? (Für A 576, B 1296, C 1728 ℳ)

	6		
A $^{2}/_{3}$	4 × 144 = 576 ℳ	25 | 3600 ℳ | 144 ℳ	
B $1^{1}/_{2}$	9 × 144 = 1296 „		
C 2	12 × 144 = 1728 „		
	25 — 3600 ℳ		

Die Antheile verhalten sich wie 4 : 9 : 12. A erhält 4 Theile, wie B 9 und C 12. Die 3600 ℳ sind also in 4 + 9 + 12 oder 25 gleiche Theile zu theilen. 1 Theil = 144 ℳ A erhält 4 × 144 ℳ, B 9 × 144 ℳ rc.

Beisp. 7. A und B liefern in Akkord eine Partie Holz zum Eisenbahnbau. A gibt zum Ankaufe desselben 3500 ℳ, B 4000 ℳ Ihr Gewinn beträgt 875 ℳ; wie viel kommt davon auf jeden?

Ausr. A 3500 ℳ
B 4000 „
Ganze Einlage 7500 ℳ

A. 7500 ℳ Einl. 875 ℳ Gew.	7500 : 3500 = 875 ℳ : x
3500 „ „ ?	A $408^{1}/_{3}$ ℳ
B. 7500 ℳ Einl. 875 ℳ Gew.	7500 : 4000 = 875 ℳ : x
4000 „ „ ?	B $466^{2}/_{3}$ ℳ

Bei der Schlußrechnung heißt es: Auf 7500 ℳ Einlage kommen 875 ℳ Gewinn, wie viel auf 3500 ℳ? u. s. w. Bei der Proportion: So wie sich die ganze Einlage zur Einlage des Einzelnen verhält, so verhält sich der ganze Gewinn zum Gewinn des Einzelnen.

Da der Gewinn in demselben Verhältniß vertheilt wird, in welchem die beiden Einlagen zu einander stehen; so kann man diese auch als reine Verhältnißzahlen betrachten und durch Kürzung auf den möglichst kleinsten Ausdruck bringen.

A 35~~00~~	7 × $58^{1}/_{3}$ ℳ = $408^{1}/_{3}$ ℳ	15 | 875 | $58^{1}/_{3}$
B 40~~00~~	8 × $58^{1}/_{3}$ „ = $466^{2}/_{3}$ „	125
	15 Theile — 875 ℳ	5

Die beiden Einlagen verhalten sich zu einander, wie 3500 : 4000 = 35 : 40 = 7 : 8. Also erhält A vom Gewinne 7 Theile, wie B 8. Der Gewinn ist daher in 7 + 8 oder 15 gleiche Theile zu theilen. 1 Theil beträgt $^{1}/_{15}$ von 875 ℳ = $58^{1}/_{3}$ ℳ A erhält dieß 7mal, B 8mal.

2. Das Verhältniß der Theile ist arithmetisch bestimmt.

Mündlich.

§. 368.

1) Die Zahl 70 ist in 2 Theile zu theilen, welche sich um 14 von einander unterscheiden.

a. Ich theile 70 zuerst in 2 gleiche Theile. 70 = 2 × 35. Wie bilde ich nun aus 35 + 35 zwei Zahlen, die sich, ohne daß ihre Summe sich verändert, um 14 von einander unterscheiden? Welche Zahlen entstehen, wenn ich von der einen Hälfte 1 nehme und es der andern zulege? (34 + 36.) Und um wie viel unterscheiden sie sich von einander? Wie aber, wenn ich von der einen Hälfte 2 nehme und der andern zulege? — Um also aus 35 + 35 2 Zahlen zu erhalten, die sich um 14 von einander unterscheiden, so muß ich von der einen 35 7 nehmen und der andern 35 7 zulegen. Die eine Zahl beträgt dann 35 — 7 oder 28, und die andere 35 + 7 oder 42.

b. Ich suche zuerst die Zahl, welche das Doppelte ist von dem kleineren der beiden Theile. Dieselbe ist 70 — 14 = 56. Die Hälfte von 56 = 28. Das ist der kleinere Theil; der größere Theil ist 28 + 14 oder 42.

c. Ich suche zuerst die Zahl, welche das Doppelte ist von dem größeren der beiden Theile. Dieselbe beträgt 70 + 14 oder 84. Die Hälfte von 84 = 42. Das ist der größere Theil; der kleinere ist 42 — 14 oder 28.

2) Theilt nun eben so 200 ℳ. in zwei Theile, welche sich um 40 ℳ. von einander unterscheiden! (200 ℳ. = 80 + 120 ℳ.)

3) Zwei Personen haben 425 Liter Wein zu theilen; wie viel bekommt jede davon, wenn A 45 l mehr erhalten soll, als B? (A 235, B 190 l.)

Aufl. Die 45 l, welche A mehr bekommt, als B, geben wir ihm voraus. Dann sind noch 425 — 45 = 380 l zu vertheilen. Hievon bekommt jeder die Hälfte, nämlich 190 l. Da A schon 45 l erhalten hat, so beträgt sein Antheil 190 + 45 = 235 Liter.

4) 1200 ℳ. sind unter 3 Brüder so zu theilen, daß B 50 ℳ. mehr als A, und C wieder 50 ℳ. mehr als B erhält.

Aufl. Wir geben dem B 50 ℳ., dem C 50 mehr, also 50 + 50 oder 100 ℳ. voraus und theilen das Uebrige in 3 gleiche Theile. Zunächst gehen also für B und C 50 + 100 oder 150 ℳ. von 1200 ℳ. ab; 1200 — 150 = 1050 ℳ.; $^1/_3$ hievon = 350 ℳ. Das ist der Antheil des A. Der Antheil des B beträgt 350 + 50 oder 400 ℳ., und der des C 350 + 100 oder 450 ℳ.

5) Von 750 ℳ. soll B 50 ℳ. weniger erhalten, als A; wie haben sie diese Summe unter sich zu theilen? (A 400, B 350 ℳ.)

Aufl. B soll 50 ℳ. weniger erhalten als A, folglich A 50 ℳ. mehr als B; A nimmt daher 50 ℳ. voraus weg und theilt die übrigen

700 ℳ mit B gleichheitlich. Oder B legt aus seiner Tasche 50 ℳ zu und theilt dann mit A gleichheitlich. Die zu vertheilende Summe beträgt nun 750 + 50 oder 800, und hievon erhält jeder 400 ℳ Da unter den 400 ℳ des B 50 ℳ seines eigenen Geldes enthalten sind, so beträgt sein Antheil nur 400 — 50 = 350 ℳ

6) Von einer Erbschaft, welche 1500 ℳ beträgt, soll B 100 ℳ weniger als A und C wieder 100 ℳ weniger als B erhalten. Wie viel jeder? (A 600, B 500, C 400 ℳ)

Aufl. B soll 100, C 100 + 100 oder 200 ℳ weniger als A erhalten. Um mit A gleichheitlich theilen zu können, legt B 100, B 200 ℳ aus seiner Tasche zu. Die zu vertheilende Summe erhöht sich dadurch um 100 + 200 oder 300 ℳ und beträgt nun 1500 + 300 oder 1800 ℳ Hievon erhält jeder den 3. Theil, also 600 ℳ So viel beträgt aber in Wirklichkeit nur der Antheil des A. Die Antheile des B und C betragen um eben so viel weniger, als jeder zugelegt hat. Der Antheil des B ist daher nur 600 — 100 oder 500 und der des C nur 600 — 200 oder 400 ℳ

Schriftlich.

§. 369.

Beisp. 1. A, B und C haben 2100 ℳ so unter sich zu theilen, daß B 75 ℳ mehr als A, und C wieder 75 ℳ mehr als B erhält; wie viel bekommt jeder von ihnen?

Ausr. A 1 Theil
B 1 „ + 75 ℳ
C 1 „ + 150 „ (= 75 + 75 ℳ)
Die 3 Theile + 225 ℳ = 2100 ℳ

Was B und C über 1 Theil, also mehr denn A bekommen, nehmen sie sich voraus weg. Das Uebrige theilen sie mit A gleichheitlich.

2100 ℳ
—225 „ Voraus
3 | 1875 | 625 ℳ

Also erhält A . . . . . . 625 ℳ
B 625 + 75 = 700 „
C 625 + 150 = 775 „

Beisp. 2. Von 4800 ℳ soll B 240 ℳ weniger als A, und C 120 ℳ weniger als B erhalten; wie viel kommt auf jeden?

a. A 1 Theil
B 1 „ — 240 ℳ
C 1 „ — 360 „ näml. 1 Th. — (240 + 120 ℳ)
Die 3 Theile — 600 ℳ = 4800 ℳ

b. 4800 ℳ
+ 600 „
3 | 5400 ℳ | 1800 ℳ

c. A erhält also . . 1800 ℳ
B 1800 — 240 = 1560 „
C 1800 — 360 = 1440 „

Wollen B und C zwei volle Theile erhalten, mit A also gleichheitlich theilen; so müssen sie zuvor 240 + 360 oder 600 ℳ von ihrem eigenen Gelde zulegen. Die zu vertheilende Summe beträgt dann 4800 + 600 oder 5400 ℳ Davon bekommt jeder 1/3 = 1800 ℳ So viel

erhält in der That aber nur A. Die wirklichen Antheile des B und C betragen eben so viel weniger als 1800 ℳ, so viel beide vorher zugelegt haben.

Beisp. 3. Wie vertheilen sich 1800 ℳ, wenn B 150 ℳ mehr als A, C 240 ℳ weniger als A, und D 60 ℳ mehr als B erhalten soll?

a. A 1 Theil
B 1 „ + 150 ℳ
C 1 „ − 240 „
D 1 „ + 210 „ (= 150 + 60 ℳ)
4 Theile + 120 ℳ = 1800 ℳ

b. B + 150 ℳ
D + 120 „
+ 360 ℳ
C − 240 „
+ 120 ℳ

c. 1800 ℳ
−120 „
4 | 1680 ℳ | 420 ℳ

d. A erhält also . . 420 ℳ
B 420 + 150 = 570 „
C 420 − 240 = 180 „
D 420 + 210 = 630 „
1800 ℳ

B und D sollen 150 + 210 oder 360 ℳ mehr erhalten als 2 Theile, C dagegen 240 ℳ weniger als 1 Theil. B und D dürfen daher miteinander 360 ℳ voraus wegnehmen und dann noch mit A gleichheitlich theilen; C aber muß, um mit den andern gleichheitlich theilen zu dürfen, 240 ℳ zulegen. Was geschieht nun einfach? C gibt seine 240 ℳ an B und D, und diese nehmen dafür von der Summe nur noch 360 − 240 oder 120 ℳ weg. Den Rest theilen sie dann in 4 gleiche Theile.

3. Zusammengesetzte Aufgaben.

§. 370.

Beisp. 1. 464 Kilo Waare werden von A, B und C unter sich in der Art getheilt, daß B $1^1/_2$mal so viel als A, und C $^3/_4$mal so viel als B erhält; wie viel kommt auf jeden?

Antwort: Auf A 128 Kilo, B 192 Kilo, C 144 Kilo.

		8
A	1 Th.	8 Theile
B	$1^1/_2$ „	12 „
C	$1^1/_8$ „	9 „
		29 Theile

Den Antheil des A bezeichnen wir mit 1. Der Antheil des B ist $1^1/_2$mal so groß; er beträgt also $1^1/_2 \times 1 = 1^1/_2$. Der Antheil des C ist $^3/_4$mal so groß als der des B; er beträgt daher $^3/_4 \times 1^1/_2 = 1^1/_8$.

2) Bei einem Baue hat A 8 Arbeiter 20 Tg., B 10 Arbeiter 18 Tg., C 12 Arbeiter 25 Tg. beschäftigt. Die 3 Theilnehmer erhalten im Ganzen 2880 ℳ; wie viel gebührt jedem? (720; 810; 1350 ℳ)

a. A 8 Arb. 20 Tg. = 160 Arb. 1 Tg.
B 10 „ 18 „ = 180 „ 1 „
C 12 „ 25 „ = 300 „ 1 „
A, B, C stellten also 640 Arb. 1 Tg.

b. 8 × 90 = 720 ℳ
9 × 90 = 810 ℳ
15 × 90 = 1350 ℳ
32 | 2880 ℳ = 90 ℳ

a. 8 Arb. arbeiten und verdienen in 20 Tg. so viel, wie 20 × 8 oder 160 Arb. in 1 Tag u. s. w. Es ist also so viel, als wenn A 160, B 180, C 300 Arbeiter auf 1 Tag gestellt hätte. Und die Aufgabe heißt jetzt: Auf 640 Arbeiter kommen 2880 ℳ; wie viel a. auf

160, b. auf 180, c. auf 300 Arbeiter? Zur Ausrechnung wendet man den Zweisatz an, oder man sucht, wie viel Lohn auf 1 Arbeiter kommt, und nimmt denselben für A 160mal, für B 180mal, für C 300mal.

b. Da die Zahlen 160, 180, 300 zugleich das Verhältniß bezeichnen, nach welchem die Summe zu vertheilen ist; so kann man sie kürzen und die Ausrechnung hierdurch vereinfachen.

3) A gibt 200 ℳ auf 4 Jahre, B 240 ℳ auf 3 Jahre und C 400 ℳ auf $1^1/_2$ Jahr in den Handel. Gewinn 424 ℳ. Wie viel hat jeder zu beanspruchen? (160, 144, 120 ℳ)

a. A 200 ℳ	4 Jahre	= 800 ℳ	1 J.	b.	20 × 8	= 160 ℳ
B 240 „	3 „	= 720 „	1 „		18 × 8	= 144 „
C 400 „	$1^1/_2$ „	= 600 „	1 „		15 × 8	= 120 „
A, B, C legten	also	2120 ℳ	1 J.		53|424 ℳ	= 8 ℳ.

a. 200 ℳ werfen in 4 Jahren eben so viel Gewinn ab, wie 4 × 200 oder 800 ℳ in 1 Jahre u. s. w. Die zusammengesetzte Aufgabe ist nun in eine einfache verwandelt. Diese heißt: Mit 2120 ℳ werden 424 ℳ gewonnen; wie viel mit 800, mit 720, mit 600 ℳ?

b. Vereinfacht wird die Ausrechnung auch hier wieder, wenn man 800, 720 und 600 als die Verhältnißzahlen betrachtet und sie durch gleichmäßiges Heben auf den kürzesten Ausdruck bringt.

Beisp. 4. A beginnt ein Geschäft mit 3000 ℳ. Nach 4 Mon. tritt B mit 2000 ℳ dazu, und nach weiteren 3 Monaten C mit 4000 ℳ. Am Schlusse des Jahrs beträgt ihr Gewinn 2400 ℳ; wie viel gebührt jedem? (A 1200 ℳ, B $533^1/_3$ ℳ, C $666^2/_3$ ℳ)

Aufl. A hat 3000 ℳ 12 Mon., B 2000 ℳ 12 — 4 = 8 Mon., C 4000 ℳ 8 — 3 = 5 Mon. in dem Geschäfte. Das Uebrige ist bekannt.

5) A, B und C haben 175 Stück einer Waare in folgender Weise unter sich zu theilen: So oft A 2 nimmt, darf B 3 nehmen, und so oft B 4 nimmt, darf C 5 nehmen. (A 40, B 60, C 75.)

Ausr. a.

A	B	C
2	3	
	4	5
8 +	12 +	15 = 35

So oft A 2 Stücke nimmt, so oft darf B 3 nehmen; nimmt A 4 × 2 oder 8 Stücke, so darf B auch 4 × 3 oder 12 nehmen. So oft B 4 Stücke nimmt, so oft darf C 5 nehmen; nimmt B 12 oder 3 × 4 Stücke, so darf C auch 3 × 5 oder 15 nehmen. Wenn also A 8 Stücke nimmt, so darf B 12 nehmen, und wenn B 12 nimmt, so darf C 15 nehmen. So oft demnach 8 + 12 + 15 oder 35 Stücke in 175 enthalten sind, so vielmal 8 Stücke erhält A, so vielmal 12 erhält B, und so vielmal 15 erhält C.

Ausr. b. Wir nehmen die Aufgabe so: der Antheil des A hat sich zu dem des B wie 2 : 3, und der Antheil des B hat sich zu dem des C wie 4 : 5 zu verhalten. Nach dieser Auffassung setzen wir;

A	B	C			A	8 Theile	
2 :	3				B	12 „	
	4 :	5			C	15 „	
8 :	12 :	15			35 Theile	= 175 Stück.	

Zahlenverhältnisse lassen sich, wie Brüche, kürzen und erweitern. Das Verhältniß 12 : 18 durch 6 gekürzt = 2 : 3, und das Verhältniß 2 : 3 durch 6 erweitert = 12 : 18.

Mit welcher Zahl werden wir nun aber das Verhältniß 2 : 3 und mit welcher das Verhältniß 4 : 5 erweitern müssen, damit sich für B das eine, wie das andere Mal die nämliche Zahl als Produkt ergibt? Da 4 × 3 = 3 × 4, so multipliciren wir die 2 Glieder des ersten Verhältnisses durch 4 und die des andern durch 3. So wie sich 2 zu 3 verhält, so verhält sich 8 : 12, und so wie sich 4 zu 5 verhält, so verhält sich 12 : 15.

Beisp. 5. Drei Gemeinden haben zusammen 1420 ℳ. aufzubringen. Die Steuern der Gemeinden A und B verhalten sich wie $^1/_2$ zu $^3/_5$, und die von B und C wie $^2/_3$ zu $^3/_4$. Wie viel trifft auf jede Gemeinde? (Auf A 400 ℳ., B 480 ℳ., C 540 ℳ.)

A : B = $^1/_2$: $^3/_5$ = $^5/_{10}$: $^6/_{10}$ = 5 : 6
B : C = $^2/_3$: $^3/_4$ = $^8/_{12}$: $^9/_{12}$ = 8 : 9

A	B	C	A 20 × 20 =	400 ℳ.
5 :	6		B 24 × 20 =	480 „
	8 :	9	C 27 × 20 =	540 „
40 :	48 :	54	71 Theile =	1420 ℳ.
2) 20 :	24 :	27	1 Theil =	20 ℳ.

Beisp. 6. Vier Personen haben 1695 ℳ. unter sich zu theilen. Der Antheil des A soll sich zu dem des B verhalten wie 4 : 5, B : C wie 3 : 2, C : D wie 7 : 8.

Ausr.	A :	B :	C :	D	A 84 × 5 =	420 ℳ.
	4 :	5			B 105 × 5 =	525 „
		3 :	2		C 70 × 5 =	350 „
	12 :	15 :	10		D 80 × 5 =	400 „
			7 :	8	339 Theile =	1695 ℳ.
	84 :	105 :	70 :	80	1 Theil =	5 ℳ.

Beisp. 7. Die Summe von 5720 ℳ. soll unter drei Kinder im umgekehrten Verhältniß ihres Alters getheilt werden. Wenn nun das erste Kind 5, das zweite 7 und das dritte 9 Jahre alt ist, wie viel bekommt jedes? (A 2520, B 1800, C 1400 ℳ.)

Aufl. Das gerade Verhältniß zwischen dem ersten und zweiten Kinde ist wie 5 : 7, das umgekehrte wie 7 : 5; das gerade Verhältniß zwischen dem zweiten und dritten Kinde ist wie 7 : 9, das umgekehrte wie 9 : 7.

Die Aufgabe gestaltet sich nun so: 5720 ℳ. sind unter A, B und C so zu vertheilen, daß sich der Antheil des A zu dem des B wie 7 : 5, der Antheil des B zu dem des C wie 9 : 7 verhalte. Wie viel jeder?

$$\begin{array}{ccccc} 7 & : & 5 & & \\ & & 9 & : & 7 \\ \hline 63 & : & 45 & : & 35 \end{array}$$

Oder: Wir erinnern uns, daß sich Brüche mit dem Zähler 1 umgekehrt wie ihre Nenner verhalten. Demnach verhalten sich die Zahlen 5, 7, 9 umgekehrt wie

$1/_5 : 1/_7 : 1/_9 = 63/_{315} : 45/_{315} : 35/_{315} = 63 : 45 : 35.$

A erhält 63 Theile, wie B 45 und C 35; das Ganze wird also in 63 + 45 + 35 oder 143 gleiche Theile getheilt.

Beisp. 8. An eine Hinterlassenschaft von 1420 ℳ. hat A eine Forderung von 100 ℳ., B von 150 ℳ., C von 130 ℳ. zu machen. Das Uebrige theilen sie in dem Verhältniß $1/_2 : 1/_3 : 1/_4$. Wie viel erhält jeder? (A 580, B 470, C 370 ℳ.)

Zunächst bekommt jeder vom Ganzen seine Forderung; das Uebrige theilen sie dann in dem Verhältniß $1/_2 : 1/_3 : 1/_4 = 6 : 4 : 3$.

Beisp. 9. Von einer gewissen Summe erhält A $2/_5$ und 148 ℳ., B $3/_8$ und 95 ℳ., C den Rest im Betrage zu 720 ℳ. Wie groß war die Summe und wie viel bekommt jeder davon?

	40
A $2/_5$	16
B $3/_8$	15
	$31/_{40}$

$31/_{40}$ + 720 ℳ. + 95 ℳ. + 148 ℳ. bilden das Ganze. Die Summe von 720 + 95 + 148 ℳ. = 963 ℳ. beträgt $9/_{40}$ des Ganzen; $1/_{40}$ = 107 ℳ.; die vertheilte Summe = 40 × 107 = 4280 ℳ.; A erhält 1860, B 1700, C 720 ℳ.

Mischungs-Rechnung.

§. 371. Vorbemerkung.

Ein Gastwirth hat zweierlei Sorten Wein, das Liter zu 60 Pfennig und zu 90. Ergeben sich einmal von beiden Sorten Reste, so gießt er diese zusammen. Dabei entsteht für ihn die Frage: Wie muß ich das Liter schenken, damit ich aus dem Mischling eben so viel löse, als ich aus den unvermischten Sorten gelöst haben würde? Es ist also aus dem Preise der vermischten Sorten der Preis der Mischung, der Mittel- oder Durchschnittspreis, zu bestimmen. Oder es ist der Fall, daß manchem der Gäste der Wein zu 60 Pfg. zu gering, der zu 90 Pfg. zu theuer ist. Man wünscht eine Mittelsorte, das Liter zu 75 Pfg. Diesem Wunsche kann der Wirth entsprechen, indem er aus beiden Sorten eine Mittelsorte zu diesem Preise bildet. Nur fragt es sich, wie viel er von jeder Sorte nehmen müsse, damit weder er selbst zu kurz komme, noch der Gast. Es ist also die Quantität der zu mischenden Sorten zu bestimmen. Dieß sind die beiden Hauptarten von Mischungsrechnungen.

Außerdem kann noch zu berechnen sein, welche Sorte, oder wie viel von einer Sorte zu einer nach Preis und Quantität bestimmten andern zu nehmen ist, um eine gewisse Mischung zu erhalten.

Da die Preise der Sorten sich nach der Güte oder Qualität derselben richten, so gilt die Preisbezeichnung zugleich auch als Bezeichnung der Qualität. Die Quantität wird durch das Maß oder Gewicht bestimmt.

Die verschiedenen Fälle ordnen sich, wie folgt: Man sucht

1. die Qualität der Mischung,
2. die Qualität einer Sorte,
3. die Quantität einer Sorte,
4. die Quantität aller Sorten.

Die Gegenstände, bei welchen eine Mischung stattfindet, sind theils trockene, als: Kaffee, Tabak, Getreide, Mehl u. s. w.; theils flüssige, als: Wein, Weingeist oder Spiritus, Branntwein, Milch ꝛc.; theils Metalle, welche, wenn sie gemischt oder legirt werden sollen, flüssig gemacht werden müssen.

1. Die Qualität der Mischung, den Mittel- oder Durchschnittspreis zu finden.

Trockene und flüssige Dinge.

§. 372.

1) Welchen Werth hat 1 l der Mischung, wenn man zusammenmischt

a. 1 l Wein zu 80 ₰. und 1 l zu 40 ₰.? 1 l und 1 l geben zusammen 2 l Mischung. Diese kosten 80 + 40 oder 120 ₰.; folglich kommt 1 l der Mischung auf die Hälfte von 120 ₰. = 60 ₰.

Vergleicht den Preis des Mischlings mit dem der beiden gemischten Sorten! (Er fällt zwischen beide und zwar genau in die Mitte.)

b. 2 l Wein à 50 ₰. und 2 l à 90 ₰.? 2 l + 2 l geben zusammen 4 l Mischung. Die 2 l à 50 ₰. kosten 2 × 50 oder 100 ₰., und die 2 l à 90 ₰. kosten 2 × 90 oder 180 ₰.; die 4 l der Mischung haben also einen Werth von 100 + 180 oder 280 ₰.; 1 l davon kommt den 4. Theil von 280 ₰. = 70 ₰. (Vergleicht diesen Preis mit dem der beiden Sorten!)

c. 3 l à 60 ₰. und 3 l à 70 ₰.? Antwort: 65 ₰.

d. 4 l à 70 ₰. und 4 l à 80 ₰.? Antwort: 75 ₰.

Nun folgende Fragen: Warum kann der Preis des Mischlings nie den Preis der besseren Sorte erreichen? Warum nie so tief bis zu dem der geringeren Sorte sich berechnen? Warum fiel er bei den berechneten Aufgaben immer genau in die Mitte? (Weil von den gemischten Sorten stets gleichviel genommen wurde.) Wie viel wird man also von 2 Sorten nehmen müssen, wenn der Preis der Mischung gerade in die Mitte fallen soll?

2) A mischt 3 Sorten Kaffee, das Pfd. zu 90 ₰., zu 1 *M.* 20 ₰. und zu 1 *M.* 50 ₰.; wie viel ist 1 Pfd. der Mischung werth, wenn er von jeder Sorte gleichviel nimmt?

Ausr. 90 + 120 + 150 = 360 ₰.; die 3 Pfd. Mischung kosten zusammen 360 ₰.; 1 Pfd. kostet also $^1/_3$ von 360 ₰. = 1 *M.* 20 ₰.

3) Ein Kaufmann mengt zusammen 2 Pfd. Tabak à 80 ₰. und 3 Pfd. à 1 *M.* 30 ₰.; wie hoch kommt das Pfd.?

Ausr. 2 + 3 Pfd. Tabak zusammengemengt, gibt 5 Pfd. Die 2 Pfund à 80 ₰. machen 160 ₰., und die 3 Pfd. à 130 ₰. machen 390 ₰.;

die 5 Pfd. haben also einen Werth von 160 Pfg. + 390 Pfg. = 550 ₰. Das Pfund kommt sonach auf $^1/_5$ von 550 = 110 ₰. = 1 ℳ. 10 ₰.

Vergleicht 1,10 ℳ. mit 80 ₰. und mit 1,30 ℳ.! Warum steht hier der Preis der Mischung dem Preise der besseren Sorte näher, als dem der geringeren Sorte?

4) B mischt 7 Kilo einer Waare, das Kilo zu 6 ℳ., mit 3 Kilo à 8 ℳ.; welchen Werth hat 1 Kilo der Mischung?

Ausr. 7 Kilo + 3 Kilo geben zusammen 10 Kilo Mischung. Die 7 Kilo à 6 ℳ. haben einen Werth von 7 × 6 oder 42 ℳ., und die 3 Kilo à 8 ℳ. von 3 × 8 oder 24 ℳ.; 42 ℳ. + 24 ℳ. = 66 ℳ.; die 10 Kilo der Mischung haben also einen Werth von 66 ℳ.; 1 Kilo kommt auf den 10. Theil davon; $^1/_{10}$ von 66 ℳ. = 6,6 ℳ.

Vergleicht 6,6 ℳ. mit 6 ℳ. und mit 8 ℳ.! Warum steht hier der Preis der Mischung dem Preise der geringeren Sorte näher, als dem der besseren Sorte? Was geht nun aus allen bisher behandelten Fällen hervor? (Nimmt man von jeder Sorte gleichviel, so fällt der Preis der Mischung genau in die Mitte. Nimmt man von der besseren Sorte mehr als von der geringeren, so nähert sich der Preis mehr dem der höheren Sorte u. s. w.)

5) Jemand mischt unter 5 l Wein à 60 ₰. 1 l Wasser; welchen Werth hat 1 l von der Mischung?

Aufl. 5 l Wein und 1 l Wasser zusammengemischt geben 6 l. Die 5 l Wein machen 5 × 60 Pfg. = 3 ℳ. Denselben Werth haben auch die 6 l Mischung. Mithin kommt 1 l auf $^1/_6$ von 3 ℳ. = 50 ₰.

6) A mischt 2 Sorten Spiritus untereinander, nämlich 20 l zu 75 Grad und 30 l zu 60 Grad; welchen Gehalt hat die Mischung?

Aufl. Der Spiritus hat 75 Grad, wenn unter 100 Raumtheilen 75 Theile reiner Weingeist (Alkohol) und 25 Theile Wasser sind. 20 + 30 l = 50 l. 1 l zu 75 Grad enthält 75 Theile Weingeist, 20 l enthalten also 20 × 75 oder 1500 Theile. 30 lt zu 60 Grad enthalten 30 × 60 oder 1800 Theile. Die 50 l enthalten also 1500 + 1800 oder 3300 Theile Weingeist. Auf 1 Liter kommt $^1/_{50}$ davon; $^1/_{50}$ von 3300 = 66. Die Mischung hat also einen Gehalt von 66 Grad.

7) Man mengt $^1/_2$ Ctr. Mehl, den Ctr. zu 24 ℳ., und $^3/_4$ Ctr. zu 20 ℳ. untereinander; wie berechnet sich 1 Ctr. der Mischung?

Ausr. $^1/_2$ + $^3/_4$ Ctr. = $1^1/_4$ Ctr. Nun suche ich, was diese werth sind. Der Ctr. zu 24 ℳ. macht für den halben Ctr. 12 ℳ.; und der Ctr. zu 20 ℳ. beträgt für $^3/_4$ Ctr. 15 ℳ. Die $1^1/_4$ Ctr. kosten also 12 + 15 ℳ. = 27 ℳ. Mithin kommt $^1/_4$ Ctr. auf den 5ten Theil von 27 ℳ. = 5,40 ℳ. und der Ctr. auf 4 × 5,40 ℳ. = 21,60 ℳ.

Schriftlich.

1) Wie hoch kommt 1 Kilo, wenn 7 Kilo Tabak à 2,30 ℳ. unter 9 Kilo à 2,80 ℳ. gemengt werden?

Ausr. 7 kg à 2,30 ℳ = 16,10 ℳ. 16 | 41,30 | 2,58..
9 hg à 2,80 ℳ = 25,20 ℳ. 9,3
16 kg Mischung = 41,30 ℳ. 130
1 kg Mischung = 2,58 ℳ. 2

2) Wie berechnen sich 24 Pfd., wenn man untereinander mischt $2^1/_2$ Ctr. à 120 ℳ und $3^1/_4$ Ctr. à 140 ℳ?

Ausr. $2^1/_2$ Ctr. à 120 ℳ = $2^1/_2 \times 120$ ℳ = 300 ℳ.
$3^1/_4$ Ctr. à 140 „ = $3^1/_4 \times 140$ „ = 455 „
$5^3/_4$ Ctr. Mischung = 755 ℳ.
575 Pfd. 755 ℳ. 575 Pfd. : 24 Pfd. = 755 ℳ : x
24 Pfd. ? x = 31 ℳ 51,1.. ₰.

3) A kauft 4,5 hl Wein à 36 ℳ und 7,8 hl à 48 ℳ und mischt dieß zusammen. Wie muß er das Liter ausschenken, um 40 % zu gewinnen?

Ausr. 4,5 hl à 36 ℳ = $4,5 \times 36$ ℳ = 162 ℳ.
7,8 hl à 48 „ = $7,8 \times 48$ „ = 374,4 „
12,3 hl Mischung = 536,4 ℳ.
Der Einkaufspreis per Liter ist 536,4 ℳ : 1230 = 0,435.. ℳ.
Hieraus 40 % oder $^4/_{10}$ Gewinn . . = 0,174 „
Somit beträgt der Verkaufspreis . . . 0,609 = 0,61 ℳ.

Gold und Silber.

§. 373. Die bisherige und die neue Gehaltsbezeichnung.

Sind Gold und Silber ohne allen Zusatz, so heißen sie fein, und in diesem Falle wird auch das Gewicht des Metalles ein feines genannt. Ein feines Kilogramm oder ein Kilogramm fein ist also ein Kilogr. Silber oder Gold ohne allen Zusatz. Das Gewicht des gemischten oder legirten Metalles dagegen heißt ein rauhes; ein rauhes Kilogr. oder ein Kilogr. rauh ist demnach ein Kilogr. legirtes Gold oder Silber.

Bisher wurde der Feingehalt der edlen Metalle nach der kölnischen Mark (= 233,8 gr) bestimmt und diese beim Silber in 16 Loth à 18 Grän, beim Gold in 24 Karat à 12 Grän eingetheilt. Feines Silber wurde als 16löthig, feines Gold als 24karatig bezeichnet. 13löthiges Silber hieß eine Silberlegirung, wenn die Mark 13 Loth feines Silber und 3 Loth Zusatz enthielt, und 16karatiges Gold hieß eine Goldlegirung, wenn die Mark 16 Karat feines Gold und 8 Karat Zusatz enthielt.

In Folge der Einführung des Kilo als allgemeiner Gewichtseinheit tritt für die bisher übliche Bezeichnungsweise des Feingehaltes die tausendtheilige Gehaltsangabe ein. Feines Gold und Silber wird hiernach mit $^{1000}/_{1000}$ = 1,000 bezeichnet.

Eine Gold- und Silberlegirung von 0,650 Feingehalt ist eine solche, welche in tausend Theilen 650 Theile feines Gold oder Silber enthält. Die tausend Theile beziehen sich jedoch auf kein bestimmtes, sondern auf jedes Gewicht, auf jede Quantität. Enthält eine Legirung 725 Tausendtheile feines Metall, so befinden sich in 1 Kilogramm derselben 0,725

Kilogramm, in 1 Pfund 0,725 Pfund, in 1 Gramm 0,725 gr feines Gold oder Silber*).

Der Kürze wegen läßt man gewöhnlich den Ausdruck „Tausendtheile" ganz weg und sagt z. B. statt 725 Tausendtheile bloß 725theilig, oder auch 725 fein.

Die Berechnung der bisherigen Gehaltsbezeichnung in die neue und dieser in jene ist sehr einfach.

Bei dem Silber ist 16löthig = 1000theilig, bei dem Golde ist 24karatig = 1000theilig. 14löthig oder 14 Loth fein = $^{14}/_{16}$ = $^{7}/_{8}$ = 0,875; also ist 14löthiges Silber = 875theiliges. 14karatig oder 14 Karat fein = $^{14}/_{24}$ = $^{7}/_{12}$ = 0,583...; also ist 14karatiges Gold = 583 fein. Will man die neue Bezeichnung, z. B. 640 Tausendtheile, in der alten ausdrücken; so heißt es beim Silber: 1000 Theile = 16 Loth; was machen 640 Theile? Antwort: 10,24 Loth; also ist 640theiliges Silber = 10,24löthiges Silber. Beim Golde heißt es: 1000 Theile = 24 Karat; was machen 640 Theile? Antwort: 15,36 Karat; also ist 640theiliges Gold = 15,36karatiges Gold.

§. 374. Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Wie viel feines Metall ist enthalten in 3 kg 785theiligen Silbers? 1 kg enthält 0,785 kg f. S.; 3 kg enthalten also 3 × 0,785 = 2,355 kg = 2 kg 355 g. Oder:

Da 0,785 kg = 785 g, so kann man auch rechnen: Enthält 1 kg Mischung 785 g fein, so enthalten 3 kg Mischung 3 × 785 = 2355 g = 2 kg 355 g fein.

2) Wie viel feines Metall ist enthalten in 725 g 535theiligen Goldes? 1 g enthält 0,535 g fein; 725 g enthalten 725 × 0,535 g fein. Oder: Da 0,535 g = 635 mg; so kann man auch rechnen: Enthält 1 g Mischung 535 mg f., so enthalten 725 g Mischung 725 × 535 mg f.

0,535 g × 725	Oder: 535 mg × 725
2675	2675
1070	1070
3745	3745
387,875 g f. G.	387875 mg = 387 g 875 mg.

3) Welchen Goldwerth hat ein Gefäß, welches 14karatig ist und 120 g wiegt, wenn das Pfund fein 1395 *M.* kostet?

Ausr. 14karatig = $^{14}/_{24}$ = $^{7}/_{12}$. Das feine Gold beträgt $^{7}/_{12}$ des Gewichts, also $^{7}/_{12}$ von 120 g = 70 g. Nun heißt es: das Pfund oder 500 g f. G. kosten 1395 *M.*; wie berechnen sich 70 g? (195,3 *M.*)

4) Von welchem Gehalte wird die Mischung, wenn man $3^{1}/_{2}$ kg 750theiliges und $2^{1}/_{5}$ kg 680theiliges Silber legirt?

*) Hier ist es am Platze, dem Schüler zu bemerken, daß das Gramm wieder in 10 Decigramm, das Decigr. in 10 Centigramm und das Centigr. in 10 Milligramm eingetheilt wird, wonach 1 g = 10 dg = 100 cg = 1000 mg.

Ausr. 3,5 kg = 3,5 × 0,750 kg = 2,625 kg f. S.
2,2 kg = 2,2 × 0,680 kg = 1,496 kg f. S.

5,7 kg Mischung enthalten 4,121 kg f. Silber.

Wie viel feines Silber enthält nun 1 kg? Antwort: 4,121 : 5,7 = 0,7229 .., nahe 0,723 kg. Die Mischung ist 0,723 fein.

5) Wie vieltheilig ist die Legirung, welche aus 1,28 kg 900theiligen, 2,55 kg 872theiligen und 4,80 kg 333theiligen Goldes gebildet wird?

Ausr. 1,28 kg = 1,28 × 0,900 kg = 1,152 kg f. G.
2,55 kg = 2,55 × 0,872 kg = 2,2236 „ „ „
4,80 kg = 4,80 × 0,333 kg = 1,5984 „ „ „

8,63 kg Mischung enthalten 4,974 kg f. G.

Wie viel f. Gold kommt auf 1 kg? Antwort:
4,974 : 8,63 = 0,5763 kg; die Mischung wird also 576theilig.

2. Die Qualität (den Preis) einer Sorte zu finden.

§. 375.

1) Zu 30 l Essig werden 10 l Wasser gegossen, und nun hat das Liter einen Werth von 18 ₰; welchen Werth hatte das Liter des unvermischten Essigs?

Ausr. Die Mischung beträgt 30 + 10 oder 40 l; hievon hat das Liter einen Werth von 10 ₰.; die 40 l kosten also 40 × 18 = 720 ₰. Denselben Werth hatten die 30 l Essig vor ihrer Vermischung mit Wasser; mithin kam das Liter auf den 30. Theil von 720 ₰. = 24 ₰. (30 × 24 ₰. = 40 × 18 ₰.)

2) A will eine Mischung von 60 l Wein à 80 ₰. bilden und verwendet hiezu 40 l à 90 ₰.; welchen Werth muß das Liter der andern Weinsorte haben?

Ausr. Die 60 l Mischung à 80 ₰. betragen 60 × 80 ₰. oder 48 ℳ.; die 40 l à 90 ₰. machen 40 × 90 ₰. oder 36 ℳ. Mithin müssen die übrigen 20 l noch einen Werth von 48—36 oder 12 ℳ. haben. Sie sind daher von einer Sorte zu nehmen, von welcher das Liter den 20. Theil von 12 ℳ. oder 60 ₰. kostet. (60 × 80 ₰. = 40 × 90 ₰. + 20 × 60 ₰.)

3) Wenn man 80 kg à 1,40 ℳ., 70 kg à 2 ℳ. und 50 kg von einer dritten Sorte mischt und hierdurch das Kilo zu 1,86 ℳ. erhält, wie theuer ist das Kilo der dritten Sorte?

Ausr. Die Mischung beträgt 80 + 70 + 50 = 200 kg à 1,86 ℳ.

200 kg à 1,86 ℳ. = 372 ℳ.

80 kg à 1,40 ℳ. = 112 ℳ.
70 kg à 2 ℳ. = 140 ℳ.

150 kg = 252 ℳ.

50 kg = 120 ℳ.
1 kg = 2,40 ℳ.

Die 200 kg der Mischung haben einen Werth von 372 ℳ., die 80 und 70 oder 150 kg der ersten und zweiten Sorte zusammen von 252 ℳ.

die 50 kg der dritten Sorte müssen also einen Werth von 372 — 252 = 120 ℳ. haben. Das Kilo derselben berechnet sich hieraus auf 2,40 ℳ.

3. Die Quantität einer Sorte zu finden.

§. 376.

1) A will aus 25 l Wein à 90 ₰. eine Sorte zu 80 ₰. bilden. Wie viel muß er von der Sorte dazu nehmen, welche 70 ₰. kostet?

Ausr. Die bessere Sorte kostet 90 ₰., die geringere 70. Die Mischung, welche 80 ₰. kosten soll, steht genau in der Mitte zwischen beiden. Was 1 l der besseren Sorte über 80 ₰. kostet, das kostet 1 l der geringeren S. unter 80 ₰. A muß daher von einer Sorte so viel, wie von der andern, zu den 25 l der besseren S. also auch 25 l von der geringeren nehmen. Oder:

An 1 l der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 10 ₰., an den 25 l also ein solcher von 25 × 10 oder 250 ₰. An 1 l der geringeren Sorte ergibt sich im Preise ein Mangel von 10 ₰. Um den Ueberschuß auszugleichen, sind so viel Liter von der geringeren S. erforderlich, als 10 ₰. in 250 ₰. enthalten sind = 25 × 1 l oder 25 l.

2) Zu einer Mischung, von welcher das Kilo 44 ₰. kosten soll, will man 25 Kilo à 50 ₰. verwenden. Wie viel Kilo à 39 ₰. sind beizumischen?

Ausr. An 1 Kilo der besseren Sorte (à 50 ₰.) ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 6 ₰., an den 25 Kilo also ein solcher von 25 × 6 oder 150 ₰. An 1 Kilo der geringeren Sorte (à 39 ₰.) ergibt sich im Preise ein Mangel von 5 ₰.; 5 ₰. sind in 150 ₰. 30mal enthalten. Zu 25 Kilo à 50 ₰. sind also 30 Kilo à 39 ₰. zu mischen.

3) Aus 8 hl Wein à 75 ℳ. soll eine Mischung im Preise zu 90 ℳ. gebildet werden. Wie viel von der Sorte zu 100 ℳ. ist beizumischen?

Ausr. Das Hektoliter der Mischung soll 90 ℳ. kosten. An 8 hl à 75 ℳ. ergibt sich im Preise ein Mangel von 8 × 15 oder 120 ℳ. An 1 hl zu 100 ℳ. ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 10 ℳ. Da 120 = 12 × 10, so sind von der bessern S. 12 hl beizumischen.

Eine andere Weise. Man ermittelt das Mischungsverhältniß und aus diesem die zu bestimmende Quantität.

4) Aus 2 Sorten Mehl, zu 40 und 30 ₰. das Pfd., wird eine Mittelsorte zu 36 ₰. gebildet. Von der besseren Sorte nimmt man 75 Pfd.; wie viel von der geringeren?

Mündlich.

a. Wir suchen zuerst, wie viel von beiden Sorten zu nehmen ist, damit sich 1 ₰. Ueberschuß bei der einen und 1 ₰. Mangel bei der andern ergibt. — Die Mischung soll einen Werth von 36 ₰. haben. An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 4 ₰., an 1 Pfd. der geringeren Sorte ein Mangel von 6 ₰. Es gehört also zu 1 ₰. Ueberschuß $^1/_4$ Pfd. der besseren und zu 1 ₰. Mangel $^1/_6$ Pfd. der geringeren Sorte. Sonach hat sich die Quantität der besseren S. zu der der geringeren wie

$^1/_4$ zu $^1/_6$ = $^3/_{12}$: $^2/_{12}$ = 3 : 2 zu verhalten. Die Aufgabe ist nun: 3 Theile der Mischung betragen 75 Pfd.; wie viel 2 Theile derselben? (50 Pfd.)

b. Wir suchen zuerst, wie viel Pfund von beiden Sorten erforderlich sind, damit 4 ₰. Ueberschuß und 6 ₰. Mangel in einem ihrer Vielfachen zusammenfallen, und setzen als solches das Produkt aus 4 × 6 oder 24. Es fragt sich nun also: Bei wie viel Pfund à 40 ₰. ergeben sich 24 ₰. Ueberschuß? (24 : 4 = 6). Bei wie viel Pfund à 30 ₰. ergeben sich 24 ₰. Mangel? (24 : 6 = 4). Aus der Beantwortung beider Fragen geht hervor, daß die Quantität der besseren S. zu der der geringeren sich wie 6 : 4 oder wie 3 : 2 zu verhalten hat.

Schriftlich.

a.

Bessere Sorte 40	36	+ 4	$^1/_4$	$^3/_{12}$	3 Th. = 75 Pfd
Geringere Sorte 30	36	— 6	$^1/_6$	$^2/_{12}$	2 „ = ?

An dem Pfunde der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 ₰., an dem Pfunde der geringeren Sorte ein Mangel von 6 ₰. Ich nehme daher $^1/_4$ Pfund von jener und $^1/_6$ Pfd. von dieser. So macht's 1 ₰. Ueberschuß und 1 ₰. Mangel, welche sich gegenseitig decken. $^1/_4 + ^1/_6 = ^3/_{12} + ^2/_{12}$. Die Mischung verlangt also 3 Th. von der besseren Sorte und 2 Theile von der geringeren.

b.

Bessere Sorte	40 ₰.	+ 4 ₰.	6 Tl.	3 Tl. oder Theile.
Mischung	(36)			
Geringere Sorte	30	— 6 ₰.	4 Tl.	2 Tl. oder Theile.

An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 4 ₰, an 1 Pfd. der geringeren Sorte ein Mangel von 6 ₰. Der Ueberschuß und der Mangel von je Einem Pfunde der beiden Sorten decken sich also nicht. Nehme ich aber von der besseren Sorte 6 Pfd., wodurch sich ein Ueberschuß von 6 × 4 ₰, und von der geringeren Sorte 4 Pfd., wodurch sich ein Mangel von 4 × 6 ₰. ergibt, so heben sich, da 6 × 4 = 4 × 6, Ueberschuß und Mangel gegenseitig auf. Die Quantität der besseren Sorte verhält sich sonach zur Quantität der geringeren Sorte wie 6 : 4 oder, durch 2 gekürzt, wie 3 : 2.

5) Es hat Jemand 12 l Branntwein à 80 ₰.; wie viel Wasser muß er hinzusetzen, um eine Mischung zu erhalten, wovon das Liter 50 ₰. werth ist?

Berechnung.

Die 12 l Branntwein à 80 ₰. haben einen Werth von 12 × 80 ₰. oder 9 ℳ 60 ₰. Denselben Werth muß auch die Mischung haben. Es fragt sich daher: Wie viel Ltr. à 50 ₰. thun 9 ℳ 60 ₰.? Antwort: So vielmal 1 l, als 50 Pfg. in 9 ℳ 60 ₰. enthalten sind = $19^1/_5$ × 1 l oder $19^1/_5$ l. Die ganze Mischung beträgt $19^1/_5$ l; also sind $19^1/_5 - 12 = 7^1/_5$ l Wasser beizumischen.

Oder: An 1 l Branntwein ergibt sich ein Ueberschuß von 80 — 50 = 30 ₰., an 12 l von 12 × 30 oder 360 ₰. An 1 l Wasser ergibt sich im Preise ein Mangel von 50 — 0 = 50 ₰. Man muß also, um den Ueberschuß auszugleichen, 360 : 50 = $7^1/_5$ l Wasser zusetzen.

Eine dritte Weise ist die nachstehende für das Zifferrechnen:

Branntw. 80 ₰.	+ 30 ₰.	50 lt	5 lt oder Theile.
(50)			
Wasser 0 ₰.	— 50 ₰.	30 lt	3 lt " "

30 Pfg. Ueberschuß 50mal genommen, und 50 ₰. Mangel 30mal genommen, heben sich gegenseitig auf. Also sind zu 50 lt Branntwein 30 lt Wasser, oder, was dasselbe ist, zu 5 Theilen Branntwein 3 Theile Wasser zu nehmen.

Zweisatz.		Proportion:
5 Theile	12 l	5 : 3 = 12 lt : x
3 "	?	x = $7^1/_4$ lt Wasser.

4. Die Quantität der zu mischenden Sorten zu finden.

A. Mit zwei Sorten.

§. 377.

1) Aus 2 Sorten Wein, das Liter zu 60 und zu 96 ₰., sollen 45 l zu 72 ₰. gebildet werden. Wie viel ist von jeder Sorte zu nehmen?

Aufl. Zuerst bestimmen wir das Mischungsverhältniß. An 1 l der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 96 — 72 = 24 ₰., an 1 l der geringeren Sorte ein Mangel von 72 — 60 = 12 ₰. Um den Ueberschuß von 24 ₰. aufzuheben, sind 24 oder 2 × 12 ₰. Mangel, also 2 × 1 l von der geringeren S. erforderlich. Mithin sind zu 1 l der besseren Sorte 2 l von der geringeren zu nehmen. Die bessere S. bildet 1 Theil, wie die geringere 2, und die Mischung bildet 1 + 2 oder 3 gleiche Theile. Nun heißt die Aufgabe: 3 Theile = 45 l; wie viel beträgt 1 Theil? wie viel betragen 2 Theile? (15 l à 96 ₰., 30 l à 60 ₰.)

2) Ein Melber hat das Kilo Mehl zu 48 ₰. und zu 72 ₰.; wie muß er mischen, um 100 Kilo à 64 ₰. zu erhalten?

Aufl. Die Mischung soll 64 ₰. kosten. An 1 kg zu 48 ₰ ergibt sich im Preise ein Mangel von 16 ₰., an dem Kilo zu 72 ₰. ein Ueberschuß von 8 ₰. Um den Mangel von 16 ₰. zu decken, sind 16 oder 2 × 8 ₰. Ueberschuß, also 2 × 1 Kilo von der besseren S. erforderlich. Demnach verhält sich die Quantität der geringeren Sorte zu der der besseren wie 1 : 2. Nun heißt es: 1 + 2 oder 3 gleiche Theile = 100 Kilo u. s. w. ($33^1/_3$ kg à 48 ₰., $66^2/_3$ kg à 72 ₰.)

3) A will aus 2 Sorten Wein, das Hektoliter zu 150 ℳ. und zu 100 ℳ., 24 hl à 120 ℳ. bilden. Wie muß er mischen?

Aufl. An 1 hl zu 150 ℳ. ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 150 — 120 = 30 ℳ., an 1 hl zu 100 ℳ. ein Mangel von 120 — 100 = 20 ℳ. Um den Ueberschuß von 30 ℳ. auszugleichen, sind 30 oder $1^1/_2$ × 20 ℳ. Mangel, also $1^1/_2$ hl von der geringeren S. er-

forderlich. Die Quantität der besseren S. verhält sich sonach zu der der geringeren wie 1 : $1^1/_2$ = 2 : 3. Nun heißt es: 2 + 3 oder 5 gleiche Theile = 24 hl; wie viel hievon kommt a. auf die 2 Theile der besseren, b. auf die 3 Theile der geringeren Sorte? (9,60 hl à 150 ℳ.; 14,40 hl à 100 ℳ.)

Schriftlich.	150 ℳ.	+ 30 ℳ.	20 hl	2 Theile
	(120)			
	100 ℳ.	— 20 ℳ.	30 hl	3 „
				5 Theile.

Ein Hektoliter der besseren Sorte gibt im Preise 30 ℳ. Ueberschuß, 1 hl der geringeren Sorte 20 ℳ. Mangel. Ich setze 20 hl der besseren Sorte, das gibt 20 × 30 oder 600 ℳ. Ueberschuß, und 30 hl der geringeren Sorte, das gibt 30 × 20 oder 600 ℳ. Mangel. So gleicht sich's aus. Von der besseren Sorte werden also 20 Theile genommen, wie von der geringeren 30, oder von jener 2, wie von dieser 3. Die ganze Mischung besteht also aus 2 + 3 oder 5 gleichen Theilen.

a. 5 Theile 24 hl a. 5 : 2 = 24 hl : x
2 „ ? x = 9,60 hl

b. 5 Theile 24 hl b. 5 : 3 = 24 hl : x
3 „ ? x = 14,40 hl.

4) Man will aus 800 und 650theiligem Silber 9 kg 700theiliges legiren; wie viel ist von beiden Sorten zu nehmen?

800	+ 100	50	1 Theil = 1 × 3 = 3 kg
(700)			
650	— 50	100	2 Theile = 2 × 3 = 6 „
			3 Theile = 9 kg.

Wir nehmen ein bestimmtes Gewicht an, am besten das Kilogramm. Das Kilogramm der neuen Mischung soll 700 g feines Gold enthalten. Das Kilo der **besseren** Sorte enthält 800 g f. G.; also ergibt sich hier ein **Ueberschuß** von 100 g. Das Kilo der **geringeren** Sorte enthält 650 g f. G.; hier ergiebt sich ein **Mangel** von 50 g. Wir nehmen daher von der besseren Sorte 50 kg und von der geringeren 100 kg. So erhalten wir dort einen **Ueberschuß** von 50 × 100 g, hier einen **Mangel** von 100 × 50 g. Ueberschuß und Mangel decken sich. Von der bessern Sorte werden also 50 Theile genommen, wie von der geringeren 100, oder von jener 1 Theil, wie von dieser 2.

5) A hat Weingeist von 80 Grad und von 50 Grad; wie viel von beiden Sorten muß er zusammenmischen, um 180 l zu 72 Grad zu bekommen?

Ausr.	80°	+ 8°	22 l	11 Theile = 11 × 12 = 132 l
	(72)			
	50°	— 22°	8 l	4 „ = 4 × 12 = 48 l
				15 Th. = 180 l
				1 „ = 12 l

B. Mit mehr als zwei Sorten.

§. 378.

Beisp. 1. Aus 3 Sorten Wein, A zu 25 ℳ, B zu 18 ℳ und C zu 12 ℳ, will man eine Sorte zu 16 ℳ mischen; wie kann dieß geschehen?

Berechnung.

A 25	+9	11	4 Theile.
B 18	+2		4
(16)			
C 11	−4		11
			19

Ein Hltr. von A gibt 9 ℳ Ueberschuß, 1 hl von B gibt 2 ℳ Ueberschuß, 1 hl von C gibt 4 ℳ Mangel. Somit ergeben sich 9 + 2 oder 11 ℳ Ueberschuß u. 4 ℳ Mangel. Um Ueberschuß und Mangel auszugleichen, so setzen wir den Ueberschuß 4mal und den Mangel 11mal. Wir nehmen also 4 hl von A, 4 hl von B und 11 hl von C. ($4 \times 9 + 4 \times 2 = 4 \times 11 = 11 \times 4$.)

Anm. Das ist die gewöhnliche Weise. Man könnte aber auch erst aus A und B eine Mischung zu 19 ℳ machen und dann aus der neuen Sorte mit C die verlangte Mischung bilden. Ebenso könnte man zuerst aus A und B eine Mischung zu 20, oder zu 21, zu 22, zu 23, zu 24 ℳ machen und die neue Sorte mit C zusammensetzen. Ferner könnte man zuerst aus A und C oder aus B und C Mittelsorten von 13, 14 und 15 ℳ bilden und diese dann mit der dritten Sorte vermischen. Nimmt man hierzu noch, daß sich bei der einen oder anderen Sorte für 1 Hektoliter eine andere Hektoliterzahl setzen und dem entsprechend Ueberschuß gegen Mangel ausgleichen läßt; so ergibt sich, daß die Lösung einer einzigen Aufgabe dieser Art ins Unendliche geht, ohne daß je zwei Resultate nothwendig zusammenfallen.

Beisp. 2. Man will aus 4 Sorten Tabak, A zu 2,40 ℳ, B zu 2 ℳ, C zu 1,50 ℳ und D zu 1 ℳ eine Mischung zu 1,60 ℳ machen; wie kann das geschehen?

Berechnung.

A 240	+ 80	120	70	7
B 200	+ 40		70	7
(160)				
C 150	− 10	70	120	12
D 100	− 60		120	12
				38

1 Pfd. von A gibt 80 ₰ Ueberschuß, 1 Pfd. von B 40 ₰ Ueberschuß, 1 Pfd. von C 10 ₰ Mangel, 1 Pfd. von D 60 ₰ Mangel. Somit ergibt sich ein Ueberschuß von 80 + 40 = 120, und ein Mangel von 10 + 60 = 70. Wir nehmen den Ueberschuß 70mal, den Mangel 120mal. So gleicht sichs aus. Wird durch 10 gehoben, so haben wir dann 7 Pfd. von A, 7 Pfd. von B, 12 Pfd. von C und 12 Pfd. von D. ($7 \times 80 + 7 \times 40 = 12 \times 10 + 12 \times 60$.)

Beisp. 3. Aus 5 Sorten einer Waare zu 24, 21, 18, 16 und 14 ℳ soll eine Mittelsorte zu 20 ℳ gemischt werden; wie kann es geschehen?

Mehrfache Lösung.

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
A 24	+ 4	2+4	4+6	2+6	6	2	4	5	12
B 21	+ 1	6	2	4	2+4	4+6	2+6		12
(20)									
C 18	— 2	4	1	4	1	4	1		5
D 16	— 4	4	4	1	1	1	4	12	5
E 14	— 6	1	4	4	4	1	1		5
		21	21	21	18	18	18		

So wird gemischt

I. A mit C + D, und B mit E.
II. A mit D + E, und B mit C.
III. A mit C + E, und B mit D; dann
IV. B mit C + D, und A mit E.
V. B mit D + E, und A mit C.
VI. B mit C + E, und A mit D; zuletzt
VII. A + B mit C + D + E, wie in den vorigen Beispielen.

Siebenter Cursus.

I. Flächenberechnung.

§. 379. Vorbemerkung.

Da sich nur aus der klaren Anschauung der äußeren Dinge klare Begriffe in uns erzeugen, und nur klare Begriffe ein klares Denken möglich machen, die Raumlehre aber ganz besonders geeignet ist, das Anschauungsvermögen auszubilden; so springt die Wichtigkeit derselben in die Augen. Auch für das praktische Leben ist sie von großem Werthe. Der Unterricht in der Raumrechnung wird jedoch nur dann recht fruchtbar sein, wenn er wirklich anschaulich betrieben wird, d. h. wenn der Lehrer die verschiedenen Längen-, Flächen- und Körpermaße in ihrer wahren Größe zur Betrachtung vorführt; wenn er die Dinge in der nächsten Umgebung als: Tische, Bänke, Wand- und Schiefertafeln, Schulzimmer, Schulhaus, Gärten ꝛc. messen und berechnen läßt, andere Gegenstände aber theils an die Wandtafel zeichnet, theils in der Vorstellung veranschaulicht und dabei gerade so behandelt, als ob sie in Wirklichkeit gegenwärtig seien.

§. 380. Die Längenmaße und das Messen.

Um die Länge eines Weges, die Höhe eines Baumes, die Länge und Breite eines Brettes, die Länge, Breite und Höhe eines Zimmers ꝛc. zu bestimmen; so müssen besagte Gegenstände nach diesen Richtungen hin gemessen werden. Dieß geschieht mittelst der uns schon bekannten Längenmaße: Meter, Decimeter, Centimeter und Millimeter.

Die Schüler werden nun über die Herleitung des Meters (nach §. 187) belehrt; das System der Längenmaße wird nochmal entwickelt und auch auf das Dekameter (= 10 m) und das Kilometer (= 1000 m) ausgedehnt.

Dann geht es an das Messen, wobei der Lehrer Veranlassung nimmt, Folgendes zur Einsicht zu bringen.

a. Die wahre Entfernung zweier Punkte von einander, der beiden Enden einer Fläche oder eines Körpers, wird nur durch eine gerade Linie und daher auch nur durch das Messen in gerader Richtung bestimmt.

b. Die Höhe wird durch das Messen einer geraden Senkrechten gefunden.

c. Ist eine Fläche nicht überall oder gar nicht zugänglich, wie z. B. eine Wand, an welcher ein Ofen oder ein Schrank steht, oder wie die Zimmerdecke; so wird dafür eine ihr gleichlaufende (Parallel-) Linie von derselben Länge gemessen.

d. Hat eine Fläche, deren Umfang bestimmt werden soll, lauter gleiche Seiten, so braucht bloß eine derselben gemessen zu werden; die Länge einer Seite, mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, gibt den ganzen Umfang. Sind bei einem Vierecke nur die zwei einander gegenüberstehenden Seiten von gleicher Länge, so hat man zwei Seiten von verschiedener Länge zu messen; der ganze Umfang ist dann zweimal so groß, als beide zusammen genommen. Ist keine Seite der anderen gleich, so müssen sie alle gemessen und die Ergebnisse durch Addition vereinigt werden.

Gegenstand des Messens sind die Dimensionen des Schulzimmers und der Dinge in und an demselben.

§. 381. Der Winkel.

Ich ziehe eine gerade Linie. Setze ich nun an den Endpunkt eine andere Linie, so heißt das ein Winkel. Ein Winkel entsteht also, wo sich zwei Linien in einem Punkte vereinigen. Die beiden Linien nennt man Schenkel, den Punkt, wo die Linien sich treffen, Scheitelpunkt. — Ich nehme einen Zirkel; die beiden Arme desselben sind die Schenkel des Winkels, und je nachdem ich den Zirkel erweitere oder zusammenziehe, wird der Winkel größer oder kleiner. Steht ein Schenkel senkrecht auf dem andern, so heißt der Winkel ein rechter (Fig. 1). Ist ein Winkel kleiner als ein rechter, so ist er ein spitziger (Fig. 2); ist er größer als ein rechter, so ist er ein stumpfer (Fig. 3).

§. 382. Flächenmaße.

Unter Fläche versteht man das Aeußere oder die Grenze eines Körpers. Dieselbe ist nicht dick, sondern nur lang und breit, oder lang und hoch. Will man die Größe einer Fläche genau bestimmen, so muß man suchen, wie vielmal so groß sie ist, als eine andere Fläche von bekannter Größe. Daher können als Maße für die Flächen nur wieder Flächen genommen werden. Als solche dienen die Quadrate, d. i. Flächen, welche von vier gleichen Seiten eingeschlossen sind und 4 gleiche, nämlich 4 rechte Winkel haben.

Der Lehrer zeichnet Figur 4, 5 und 6 an die Wandtafel, und fordert die Schüler auf, anzugeben, welche derselben ein Quadrat sei, welche nicht, und warum?

Da die Quadrate (hinsichtlich ihrer Größe) von unendlicher Verschiedenheit sein können, so sind diejenigen Quadrate, welche als Flächenmaße dienen sollen, näher zu bestimmen. Es sind dieß solche, deren eine (also jede) Seite genau ein Meter, oder ein Dekameter, oder ein Hekto-

meter (= 100 m), oder auch ein Decimeter, oder ein Centimeter, oder ein Millimeter lang ist.

Beträgt eine Seite des Quadrats ein Meter, so ist es ein Quadratmeter; beträgt sie ein Dekameter, so ist es ein Ar; beträgt sie ein Hektometer, so ist es ein Hektar; beträgt eine Seite ein Decimeter, so ist es ein Quadratdecimeter u. s. w.

Was ist also ein Quadratmeter? ein Ar? ein Hektar, ein Quadrat-Decimeter, ein Q.-Kilometer? eine Q.-Meile?

Das Hektar, Ar und Quadratmeter dienen als Feldmaße, das Quadratmeter, Quadratdecim., Quadratcentimeter und Quadratmillimeter zur Bestimmung kleinerer Flächen.

Von den ersteren muß der Schüler auf dem freien Felde, von den letzteren in der Schule durch Anschauung eine klare Vorstellung erhalten.

Die beste Veranschaulichung des Quadratmeters und seiner Unterabtheilungen bietet die unter §. 189 und §. 208 beschriebene Zeichnung, weil sie später auch zur Wiederholung und Auffrischung, sowie zur Lösung von Aufgaben aus der Flächenberechnung immer zu Gebote steht. Ein auf die Rückseite einer Landkarte gezeichnetes Quadratmeter wird in Quadratdecimeter, eines hievon in Quadratcentimeter und von diesen eines in Quadratmillim. abgetheilt. Zugleich zeichnen sich auch die Schüler auf Papier ein Quadratdecimeter und theilen eines derselben in Quadratcentim., sowie eines von diesen wieder in Q.-Millimeter ab.

I. Resolviren und Reduciren.

§. 383. Das Quadratmeter und seine Unterabtheilungen.

a. Mit ganzen Zahlen.

1) Verwandle dieß (an die Wandtafel gezeichnete) Quadratmeter in Quadratdecimeter! Verwandle 1 Quadratdecim. hievon in Quadratcentim.! — Thut Letzteres auf euren Schiefertafeln! Zerlegt nun auch ein Quadratcentim. in Quadratmillim.!

1 qm = 10 × 10 oder 100 qdm
1 qdm = 10 × 10 oder 100 qcm
1 qcm = 10 × 10 oder 100 qmm

Also ist

1 qm = 100 qdm = 10000 qcm = 1000000 qmm
1 qdm = 100 qcm = 10000 qmm
1 qcm = 100 qmm.

2) 3 qm 48 qdm 75 qcm 64 qmm = ? qmm.

Ausr. 1 qm = 100 qdm; 3 qm = 3 × 100 oder 300 qdm; 300 qdm + 48 qdm = 348 qdm.

1 qdm = 100 qcm; 348 qdm = 348 × 100 oder 34800 qcm; 34800 qcm + 75 qcm = 34875 qcm.

1 qcm = 100 qmm; 34875 qcm = 34875 × 100 = 3487500 qmm; und 64 qmm dazu = 3487564 qmm.

Mithin sind 3 qm 48 qdm 75 qcm 64 qmm
= 348 qdm 75 qcm 64 qmm
= 34875 qcm 64 qmm
= 3487564 qmm.

Man verwandelt also die Quadratmeter zuerst, indem man sie mit 100 multiplicirt, in Quadratdecim. und addirt die Anzahl der Quadratdecim. dazu; dann verwandelt man die Quadratdecim., indem man sie mit 100 multiplicirt, in Quadratcentim. und zählt die Quadratcentim. dazu u. s. f.

Jede Benennung nach dem Quadratmeter nimmt zwei Stellen ein. Kommt es vor, daß die Zahl einer solchen nur einstellig ist, so wird ihr eine Null vorgesetzt. Z. B.

3) 4 qm 9 qdm 7 qcm = ? Quadratcentim.

Ausr. 4 qm + 9 qdm = 4 × 100 + 9 = 409 qdm; 409 qdm + 7 qcm = 409 × 100 + 7 = 40907 qcm.

4) 7540689 qmm, wie viel Quadratcentim., Quadratdecim. ꝛc.?

Ausr. 100 qmm = 1 qcm; 100 qcm = 1 qdm, und 100 qdm = 1 qm. So oft also 100 qmm in 7540689 qmm enthalten sind, so viele Quadratcentim. gibt es; so oft in diesen wieder 100 qcm enthalten sind, so viele Quadratdecim. gibt's. Man dividirt also wiederholt durch 100, und das geschieht, wenn man von der Rechten gegen die Linke immer 2 Stellen ablöst.

7540689 qmm = 75406 qcm 89 qmm
= 754 qdm 6 qcm 89 qmm
= 7 qm 54 qdm 6 qcm 89 qmm.

b. Mit Decimalbrüchen.

Sowie das Meter die Einheit für die Längenmaße ist, so bildet das Quadratmeter die Einheit für die Flächenmaße. Die Quadratdecim., Quadratcentim. und Quadratmillim. werden daher auch als Theile des Quadratmeters betrachtet.

1 qm =	100 qdm;	also ist	1 qdm =	0,01 qm
			24 qdm =	0,24 qm
1 qm =	10000 qcm;	also ist	1 qcm =	0,0001 qm
			36 qcm =	0,0036 qm
1 qm =	1000000 qmm;	also ist	1 qmm =	0,000001 qm
			45 qmm =	0,000045 qm

Für jede Unterabtheilung des Quadratmeters gehören also 2 Decimalstellen.

Die Quadratdecimeter stehen in der 1. und 2. Decimalstelle,
die Quadratcentimeter " " " 3. " 4. "
die Quadratmillimeter " " " 5. " 6. "

Fr. Wo stehen die Quadratdecim.? die Quadratcentim.? die Quadratmillim.? Was bedeuten die Ziffern in der 1. und 2. Decimalstelle ꝛc.?

Fehlende Stellen werden durch Nullen vertreten.

Wie schreibt man nun in Decimalbruchform

1) 37 qdm 25 qcm? (0,3725 qm)

2) 4 qm 9 qdm 65 qcm? (4,0965 qm)
3) 72 qdm 45 qcm 85 qmm? (0,724585 qm)
4) 7 qm 96 qcm 8 qmm? (7,009608 qm)
5) 2 qm 7 qdm 6 qcm 4 qmm? (2,070604 qm.)

Um einen solchen Decimalbruch zu lesen, so nimmt man die Stellen vom Komma aus nach rechts immer paarweise. Das erste Paar drückt die Quadratdecim., das zweite Paar die Quadratcentim., das dritte Paar die Quadratmillim. aus. Bleibt am Ende eine Stelle, so wird eine Null beigefügt.

4,7584 qm = 4 qm 75 qdm 84 qcm
0,976 qm = 97 qdm 60 qcm
0,543218 qm = 54 qdm 32 qcm 18 qmm
7,0805 qm = 7 qm 8 qdm 5 qcm
0,00456789 qm = 45 qcm 67,89 qmm, gekürzt: 45 qcm 68 qmm.

Ein Quadrat-Decimalbruch wird mit Korrektur gekürzt, indem man die Theile von 0,01 — 0,49 wegwirft, die Theile von 0,50 — 0,99 als Ganzes rechnet und dieses der nächsten Stelle links zuzählt. Für 67,89 qmm setzt man also 68 qmm.

§. 384. Das Hektar und seine Unterabtheilungen.

1) 1 ha = 100 a = 10000 qm
1 a = 100 qm

2) 5 ha 84 a 36 qm
= 584 a 36 qm
= 58436 qm

3) 87142 qm
= 871 a 42 qm
= 8 ha 71 a 42 qm

4) 1 ha = 100 a; also ist 1 a = 0,01 ha
36 a = 0,36 „
1 ha = 10000 qm; also ist 1 qm = 0,0001 „
75 qm = 0,0075 „

5) 8,72 ha = 8 ha 72 a
3,9685 ha = 3 ha 96 a 85 qm
5,0460 ha = 5 ha 4 a 60 qm.

I. Flächen zu berechnen.

§. 385. Einleitendes.

Will man den Quadrat-Inhalt, d. i. die Anzahl der Quadratmeter, der Quadratdecimeter ꝛc. einer Fläche finden, so wendet man bei dem Messen derselben nicht die Quadratmaße selbst an, sondern man sucht mittelst der Längenmaße, wie lang und breit sie ist. Aus der gefundenen Länge und Breite wird dann der Flächen- oder Quadratinhalt berechnet. Wie dieß geschieht, läßt sich aus der Anschauung erkennen.

Für den Lehrer sei bemerkt, daß die Veranschaulichung zuerst nicht durch bereits fertige, sondern durch solche Figuren zu bewerkstelligen ist,

welche unter seiner Hand vor den Augen der Schüler entstehen. Das Werdende erregt das Interesse in höherem Grade und prägt sich eben darum auch tiefer ein, als das Fertige. Ist z. B. der Quadratinhalt von einer Fläche zu bestimmen, welche, wie Figur 7 der Tafel in verkleinertem Maßstabe zeigt, 5 dm lang und 3 dm breit ist; so zieht man zuerst (wie bei Figur 8) in der Länge von Decimeter zu Decimeter gerade Linien. Dadurch entstehen so viele Streifen, als die Fläche Decimeter breit ist, nämlich 3. Nun werden auch in der Breite (wie bei Figur 9) von Decimeter zu Decimeter gerade Linien gezogen. Hierdurch bildet sich aus jedem Streifen eine Reihe von so viel Quadratdecimetern, als die Fläche Decimeter lang ist, nämlich 5. Mithin ist dieselbe 3 $\times$ 5 oder 15 Quadratdecimeter groß.

§. 386. Das Quadrat.

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite a. 2 dm, b. 3 dm, c. 4 dm ꝛc. lang ist?

Auflösung: Ein Quadrat, dessen Seite 2 Decimeter lang ist, ist eine Fläche von 2 dm Länge und 2 dm Breite. Dasselbe enthält zwei Reihen von je 2 qdm und ist daher 2 $\times$ 2 oder 4 qdm groß. — Ein Quadrat, dessen Seite 3 dm mißt, gibt 3 Reihen von je 3 qdm, ist also 3 $\times$ 3 oder 9 qdm groß u. s. w.

2) Welches ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite a. 2 cm, b. 5 cm, c. 8 cm, d. 12 cm lang ist?

3) Wie viel beträgt der Flächeninhalt eines Quadrats, welches a. 4 mm, b. 7 mm, c. 10 mm lang und breit ist?

Die Veranschaulichung wird von den Schülern auf Papier oder Schiefer ausgeführt.

4) Ein Garten hat die Form eines Quadrats und mißt an jeder Seite 15 m. Wie groß ist sein Flächeninhalt? (225 qm.)

Da bei dem Quadrate Länge und Breite einander gleich sind, so kann man auch sagen, daß die Größe desselben gefunden werde, wenn man eine seiner Seiten mit sich selbst multiplicirt.

§. 387. Das längliche Rechteck (Parallelogramm).

a. Die Ausdehnungen sind durch gleichbenannte ganze Zahlen bestimmt.

1) Ein (an die Wand gezeichnetes) Rechteck ist 3 m lang und 2 m breit. Wie groß ist sein Quadratinhalt?

Aufl. Man theilt die 4 Seiten von Meter zu Meter ab und verbindet dann die einander gegenüber liegenden Theilungspunkte durch gleichlaufende Linien. So bilden sich 2 Reihen von je 3 Quadratmeter; der Inhalt des Rechtecks ist also = 2 $\times$ 3 oder 6 Quadratmeter.

2) Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck, welches a. 9 dm lang und 6 dm breit? b. 8 dm lang und 7 dm breit ist?

Aufl. Da sowohl die Länge als die Breite der an die Wandtafel gezeichneten Fläche in Decimetern besteht; so theilt man die 4 Seiten

auch in Decimeter ab. Werden dann die Theilungspunkte, wie bekannt, verbunden; so entstehen lauter Quadratdecimeter und zwar 6 Reihen von je 9 qdm, im Ganzen also 6 × 9 oder 54 qdm.

3) Ein (auf die Schiefertafeln gezeichnetes) Rechteck ist 8 cm lang und 5 cm breit; wie viel beträgt sein Quadrat-Inhalt?

Aufl. Man theilt jede Seite von Centimeter zu Centimeter ab und zieht dann die Verbindungslinien. So bilden sich Quadratcentimeter und zwar 5 Reihen von je 8 qcm; das Rechteck enthält also 5 × 8 oder 40 qcm.

Die Zahl, welche die Breite angibt, bezeichnet die Anzahl der Reihen, und die Zahl, welche die Länge bezeichnet, sagt, wie viele Quadrate jede Reihe enthält. Darum geben Länge und Breite, mit einander multiplicirt, den Quadratinhalt der Fläche.

4) Ein Grundstück in der Form eines Rechtecks ist 64 m lang und 48 m breit. Welches ist sein Flächeninhalt?

Aufl. Denkt man sich die Fläche in Quadratmeter abgetheilt, so gibt es 48 Reihen von je 64 qm. Der Inhalt beträgt also

```
48 × 64 qm
-----------
     512
    256
-----------
    3072 qm = 30 a 72 qm.
```

b. Die Ausdehnungen sind durch gleichnamige Decimalzahlen bestimmt.

1) Die Grundlinie einer rechtw. Fläche ist 0,6 m, die Höhe derselben 0,5 m. Welches ist ihr Quadratinhalt? (Anschaulich!)

Aufl. 0,1 m lang und 0,1 m breit = 0,01 qm
0,6 m „ „ 0,1 m „ = 0,06 „
0,6 m „ „ 0,5 m „ = 5 × 6 = 0,30 qm.

2) Ein Rechteck ist 1,4 m breit und 1,8 m lang.

Aufl. 1,4 = 14 z, und 1,8 = 18 z.
0,1 m breit und 0,1 m lang = 0,1 × 0,1 qm = 0,01 qm.
1,4 m „ „ 1,8 m „ = 1,4 × 1,8 qm = 2,52 qm.

3) Eine rechtw. Fläche ist 0,12 m breit u. 0,15 m lang. (Anschaulich!)

Aufl. 0,01 m br. u. 0,01 m lg. = 0,01 × 0,01 = 0,0001 qm
0,01 m „ „ 0,15 m „ = 0,01 × 0,15 = 0,0015 „
0,12 m „ „ 0,15 m „ = 0,12 × 0,15 = 0,0180 „

4) Ein rechtw. Viereck ist 1,23 m breit und 1,46 m lang.

Aufl. 1,23 = 123 Hundertel, und 1,46 = 146 Hundertel.
0,01 m br. u. 0,01 m lg. = 0,01 × 0,01 qm
1,23 m „ „ 1,46 m „ = 1,23 × 1,46 qm.

```
Ausr.   1,46 m        =    146 qcm
        1,23 m             123 „
       -------            -----
         438               438
        292               292
       146               146
      ---------          -------
      1,7958 qm          17958 qcm = 1,7958 qm
```

c. Die Ausdehnungen sind durch ungleichnamige Zahlen bestimmt.

Wenn man eine Fläche in Quadratmeter zerlegen soll, so wird der Forderung entsprochen, indem man die Länge und Breite in Meter abtheilt und die Theilungspunkte verbindet. Soll eine Fläche in Quadratdecimeter zerlegt werden, so muß man ihre Länge und Breite in Decimeter abtheilen u. s. w. Hieraus ergibt sich das Verfahren für die Berechnung: man verwandelt die ungleichbenannten Zahlen, welche die Länge und Breite bezeichnen, in gleichbenannte. Dieß kann, wie wir wissen, auf zweierlei Weise geschehen: durch Resolution und durch Reduktion. Entweder löst man die höheren Einheiten in die niederste der gegebenen auf, oder man drückt die niederen Einheiten durch einen Decimalbruch in Meter aus.

1) Eine rechtwinkliche Fläche ist 6 m lang und 45 cm breit.

a. 6 m = 600 cm. In Quadratcentimeter zerlegt, enthält die Fläche 45 Reihen von je 600 qcm, im Ganzen also

$$\frac{45 \times 600 \text{ qcm}}{27000 \text{ qcm} = 2{,}70 \text{ qm.}}$$

b. 45 cm = 0,45 m; 1 m lang und 0,45 m breit = 0,45 qm; 6 m lang und 0,45 m breit = 6 × 0,45 qm = 2,70 qm.

2) Eine Wand ist 7,54 m lang und 2,8 m hoch; wie viel beträgt ihr Flächeninhalt?

754 cm	=	7,54 m
280 cm	=	2,8 m
6032		6032
1508		1508
211120 qcm		21,112 qm

= 21 qm 11 qdm 20 qcm.

§. 388. Das verschobene Rechteck.

Daß das verschobene Rechteck a b c d (Fig. 10) dem rechtwinkeligen e f c d an Größe gleich ist, ist auch ohne mathematischen Beweis leicht einzusehen. Die beste Veranschaulichung ist: man schneidet ein Blatt Papier so zurecht, daß es ein verschobenes Viereck bildet, schneidet dann die hervorstehende Spitze auf der einen Seite ab und setzt sie auf der andern Seite so an, daß die Figur die Form eines Rechtecks annimmt. Die Grundlinie bleibt sich gleich und die Höhe bleibt sich gleich. Also wird der Quadratinhalt des verschobenen Vierecks eben so gefunden, wie der eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe: man sucht die Länge a b und die Breite oder Höhe d e und multiplicirt dann beide miteinander.

Aufgabe. Die Grundlinie a b sei = 8 dm und die Höhe d e = 7 dm; wie groß ist der Quadrat-Inhalt? (56 qdm.)

§. 388. Das Viereck mit zwei gleichlaufenden Seiten (Paralleltrapez). (Fig. 11.)

Wenn man über der Grundlinie a b und dieser parallel eine gleichlange Linie zieht, welche die Linie c d bei e schräg schneidet, so wird von

der Figur auf der einen Seite gerade so viel weggeschnitten, als auf der andern fehlt, um ein Rechteck zu bilden. Es lehrt also der Augenschein, daß ein Paralleltrapez genau so groß ist, als ein Rechteck, welches dieselbe Grundlinie und die mittlere Höhe hat. Um daher den Quadratinhalt einer solchen Fläche zu erhalten, so mißt man deren Länge und mittlere Breite und multiplicirt dann beide mit einander.

Die mittlere Breite ergibt sich auch, wenn man die kleinere und die größere Breite mißt und die Hälfte von deren Summe nimmt.

Aufgabe 1. Es sei die Länge ab = 8,6 m, die kleinere Breite ad = 2,4 m und die größere Breite bc = 5,7 m. Wie groß ist der Quadrat-Inhalt?

Berechnung.

ad = 2,4 m	4,0 5 × 8,6
bc = 5,7 m	2 4 3 0
ad + bc = 8,1 m	3 2 4 0
Mittlere Br. = 4,05 m	3 4,8 3 0 qm

Aufgabe 2. Ein Grundstück ist 98 m 5 dm lang und auf der einen Seite 42 m 5 dm, auf der andern 37 m 3 dm breit. Wie viele Ar (= 100 qm) ist dasselbe groß?

Antwort: 3930,15 qm = 39 Ar 30,15 qm.

§. 389. Berechnung der Dreiecke.

Wie sich aus der Anschauung (Figur 12 und 13) ergibt, so ist das Dreieck immer die Hälfte eines Vierecks von gleicher Grundlinie und Höhe. Der Inhalt eines Dreiecks wird daher gefunden, wenn man seine Grundlinie (ab) und seine senkrechte Höhe (ac oder ce) mit einander multiplicirt und hernach das Produkt halbirt.

Aufgabe 1. Es sei die Grundlinie ab = 8 dm und die Höhe ac = 6 dm. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Antwort: 6 × 8 Quadratdecim., getheilt durch 2 = 24 Quadratdecim.

Dasselbe Ergebniß entspringt, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die halbe Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Aufgabe 2. Der Giebel eines Hauses ist 15 Meter 6 Decimeter breit und 12 Meter 5 Decimeter hoch. Wie viel beträgt der Quadrat-Inhalt seiner Außenseite? Antwort: 97,5 Quadratmeter.

§. 390. Das ungleichseitige Viereck (Trapez).

(Fig. 14.)

Um den Quadratinhalt eines ungleichseitigen Vierecks zu finden, so zerlegt man es durch eine Diagonale, d. i. durch eine gerade Linie, welche man von einem Winkel zu dem ihm gegenüber liegenden zieht, in 2 Dreiecke, berechnet diese einzeln und zählt die Ergebnisse zusammen.

Aufgabe: Von einem Vierecke sei die Diagonale (die gemeinschaftliche Grundlinie der beiden Dreiecke) = 32 cm, die Höhe des einen Dreiecks = 10 cm, die des andern = 12 cm. Wie viel beträgt sein Quadratinhalt?

Ausr. Erstes Dreieck: 10 × 32 : 2 = 160 qcm
Zweites „ 12 × 32 : 2 = 192 „

Der Inhalt des Vierecks = 352 qcm.

§. 391. Berechnung der Vielecke.

Alle geradlinigen Figuren, welche mehr als 4 Seiten haben, werden vielseitige oder vieleckige genannt. Sind bei einer vieleckigen Figur alle Seiten (und Winkel) einander gleich, so ist sie ein regelmäßiges Vieleck (Fig. 16); wenn nicht, so ein unregelmäßiges (Fig. 15).

Um den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vielecks zu finden, so zerlegt man dasselbe, indem man von einem Eck zum andern Linien zieht, in Dreiecke, berechnet dann diese einzeln und zählt die Ergebnisse zusammen.

Aufgabe: Von dem Fünfecke (Fig. 15) sei ac = 24 Mtr.; bf = 9 Mtr.; dg. = 10 Mtr.; ad = 21 Mtr.; eh = 12 Mtr.; wie groß ist sein Quadratinhalt?

Auflösung: Durch die Linien ac und ad werden 3 Dreiecke gebildet: I. abc., II. acd. und III. ade.

I. Die Grundlinie ac = 24 Mtr.; die Höhe bf = 9 Mtr.
9 × 24 : 2 = 108 qm.

II. Die Grundlinie ac = 24 Mtr.; die Höhe dg = 10 Mtr.
10 × 24 : 2 = 120 qm.

III. Die Grundlinie ad = 21 Mtr.; die Höhe eh = 12 Mtr.
12 × 21 : 2 = 126 qm.

Das ganze Fünfeck enthält also 108 + 120 + 126 = 354 Quadratmeter.

Wie das unregelmäßige Vieleck, so läßt sich auch das regelmäßige behandeln. Einfacher ist es aber, wenn man von den Ecken aus Linien auf den Mittelpunkt desselben zieht, wodurch so viele gleiche Dreiecke entstehen, als die Figur Seiten hat. Dann berechnet man eines derselben und nimmt das Ergebniß so oft mal, als Seiten oder Dreiecke vorhanden sind.

Aufgabe. Es sei bei Figur 16 die Grundlinie ab = 4 Meter; und die Höhe cd = 5 Meter; wie viele Quadratmeter enthält das Sechseck?

Aufl.: 4 × 5 = 20; die Hälfte davon ist 10. Das Dreieck abc ist also 10 Quadratmeter groß. Von derselben Größe sind auch alle übrigen Dreiecke. Folglich enthält das ganze Sechseck 6 × 10 oder 60 Quadratmeter.

Um auf die Berechnung der Kreisfläche vorzubereiten, so lasse man vorstehende Aufgabe auch auf folgende Weise lösen.

$$1 \text{ Dreieck} = \frac{4 \,.\, 5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ qm}$$

$$2 \text{ Dreiecke} = \frac{4 \,.\, 5}{2} + \frac{4 \,.\, 5}{2} = \frac{8 \,.\, 5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ qm}$$

$$3 \text{ Dreiecke} = \frac{4 \,.\, 5}{2} + \frac{4 \,.\, 5}{2} + \frac{4 \,.\, 5}{2} = \frac{12 \,.\, 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ qm}$$

u. s. w.

Haben also zwei oder mehrere Dreiecke gleiche Höhe, so wird der Inhalt derselben auch gefunden, wenn man ihre Grundlinien in eine Summe vereinigt, diese dann mit der gemeinschaftlichen Höhe multiplicirt und das Produkt halbirt.

§. 392. Berechnung der Kreisfläche.

(Fig. 17.)

Der Kreis wird durch einen Zirkel mit gleicher Oeffnung beschrieben. Daher ist die Kreislinie oder der Umkreis von dem Mittelpunkte überall gleichweit entfernt, und daher sind auch die Halbmesser eines Kreises — die geraden Linien von dem Mittelpunkte bis zum Umkreis — alle einander gleich. Eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht und mit ihren beiden Enden die Kreislinie berührt, wird der Durchmesser genannt. Der Umfang eines Kreises verhält sich zum Durchmesser desselben wie 314 zu 100, d. i. der Umfang enthält stets 314 solche Theile, wie der Durchmesser deren 100 hat. Er ist also $3^{14}/_{100}$ (= 3,14 oder genauer 3,1416) mal so groß, als dieser.

Fragen: Wie verhält sich der Durchmesser eines Kreises zum Halbmesser desselben? der Halbmesser zum Durchmesser? Wie findest du aus dem gegebenen Durchmesser der Kreisumfang und umgekehrt? Wie aus dem Halbmesser und umgekehrt?

Der Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von (unzählig) vielen Seiten angesehen werden. Denkt man sich nun vom Mittelpunkte aus nach allen Ecken Halbmesser gezogen, so entstehen (unendlich) viele Dreiecke. Die gemeinschaftliche Höhe derselben ist der Halbmesser, und ihre Grundlinien bilden, zusammen genommen, den Kreisumfang. Der Inhalt aller Dreiecke und somit auch der Inhalt des ganzen Kreises wird daher gefunden, wenn man Umfang und Halbmesser mit einander multiplicirt und das Produkt halbirt, oder wenn man Umfang und Durchmesser mit einander multiplicirt und das Produkt durch 4 theilt.

Beispiel. Der Umfang eines Kreises = 22 m, sein Halbmesser = 3,5 m; wie groß ist seine Fläche?

Antwort: 3,5 × 22, getheilt durch 2 = 38,5 qm.

Gewöhnlich ist nur ein Stück gegeben: entweder nur der Halbmesser, oder der Durchmesser, oder der Umfang. Ist der Halb- oder der Durchmesser gegeben, so ist nach dem Obigen zunächst der Umfang zu suchen, dieser dann mit dem Halbmesser zu multipliciren und das Produkt zu halbiren. Zeigen wir diese Operationen bloß an, so entwickelt sich eine sehr einfache Formel.

Der Durchmesser sei 8 m;
der Umfang ist also 8 m × 3,14;
der Halbmesser = 4.

$$\text{Also ist die Kreisfläche} = \frac{4 \times 8 \times 3{,}14 \text{ qm}}{2}$$

2 gegen 8 gehoben = 4 × 4 × 3,14 qm.

Man multiplicirt den Halbmesser mit sich selbst und das Produkt mit 3,14.

Ist der Umfang gegeben, so wird zuerst der Durchmesser gesucht. Man findet diesen, indem man, wie schon bekannt, den Umfang durch 3,14 dividirt.

Wie viel beträgt der Flächeninhalt
1) einer kreisr. Scheibe von 6 dm im Halbm.? (113,04 qdm)
2) eines Kreises von 5,6 m im Durchm.? (24,6176 qm)
3) eines kreisrunden See's von 1413 m Umfang?
(158962,5 qm = 15 Hektar 89 Ar 62,5 qm.)

§. 393. **Aus dem Flächeninhalte eines Rechtecks und einer Ausdehnung desselben die andere zu finden.**

Der Flächeninhalt ist das unmittelbare Produkt aus Länge und Breite. Ist daher die Größe der Fläche und die eine Ausdehnung derselben (die Länge oder Breite) bekannt; so findet man die andere, indem man den Flächeninhalt durch die gegebene Ausdehnung dividirt.

Eine Fläche ist 24 qdm groß; in ihrer Breite mißt sie 4 dm; wie viel beträgt ihre Länge?

Aufl. Ist eine Fläche 4 dm breit und 1 dm lang, so enthält sie 4 qdm; ist sie 2 dm lang, so enthält sie 2 × 4 qdm u. s. f. So vielmal 1 dm Länge, so vielmal 4 qdm Inhalt. Folglich auch: so vielmal 4 qdm Inhalt, so vielmal 1 dm Länge. Die gegebene Fläche enthält 24 qdm. So oft daher 4 qdm in 24 qdm enthalten sind, so vielmal 1 dm beträgt ihre Länge, nämlich 6 × 1 dm oder 6 dm.

II. Körperberechnung.

§. 394. **Die Körpermaße.**

Eine (mathematische oder gedachte) Linie ist nur lang; eine Fläche ist lang und breit; ein Körper aber ist lang, breit und hoch (tief oder dick). Als Maß für die Körper dient der Würfel oder Kubus. Ein solcher wird vorgezeigt und beschrieben. Es ist ein achteckiger, von 6 gleichen Quadratflächen umschlossener Körper. Seine 12 Kanten — die scharfen Erhebungen, welche durch das Zusammenstoßen der Flächen entstehen — sind alle einander gleich. Er ist daher eben so hoch, als lang und breit.

Sowie man die Linien nach Meter, Deci-, Centi- und Millimeter, und die Flächen nach Quadratmeter, Quadratdecimeter ꝛc. bestimmt; so sucht man bei den Körpern, wie viele Würfelmeter, Würfeldecimeter ꝛc. sie enthalten.

Vorgezeigt und nach ihren Ausdehnungen gemessen werden ein Kubikdecimeter (§. 190) und ein Kubikcentimeter.

Ein Kubikdecimeter ist ein Würfel, welcher 1 dm lang, 1 dm breit und 1 dm hoch ist; ein Kubikcentimeter ist ein Würfel, welcher ꝛc.

Was ist nun ein Kubikmillimeter? ein Kubikmeter? ein Kubikdekameter? ein Kubikkilometer? eine Kubikmeile?

§. 395. Resolviren und Reduciren.

Zur Veranschaulichung dient ein aus Holz gefertigtes, mit weißem Papier überzogenes Kubikdecimeter. Rings um dasselbe zieht man von Centimeter zu Centimeter Parallellinien. Das Kubikdecimeter erscheint so in 10 gleiche Platten zerlegt. Hierauf theilt man eine besondere Platte von gleicher Form und Größe, also 10 cm lang, 10 cm breit und 1 cm dick, auf allen 6 Seiten in Quadratcentimeter ein. So springt in die Augen, daß in einer Reihe 10 Kubikcentimeter neben einander liegen, daß die Platte aus 10 × 10 oder 100 und das ganze Kubikdecimeter aus 10 × 100 oder 1000 Kubikcentimeter besteht.

Eben so denkt man sich ein Kubikcentimeter in 10 × 10 × 10 oder 1000 Kubikmillimeter und ein nach seinen Umrissen bezeichnetes Kubikmeter in 10 × 10 × 10 oder 1000 Kubikdecimeter zerlegt. Also ist

1 Kubikmeter (cbm) = 1000 Kubikdecimeter (cdm),
1 Kubikdecimeter = 1000 Kubikcentimeter (ccm),
1 Kubikcentimeter = 1000 Kubikmillimeter (cmm).

Eine Einheit höherer Benennung macht bei den Längenmaßen 10, bei den Flächenmaßen 100, bei den Körpermaßen 1000 Einheiten der nächstniederen Benennung. — Die Unterabtheilungen des Meters werden daher auch einstellige Zahlen, die des Quadratmeters durch zweistellige, die des Kubikmeters durch dreistellige Zahlen bezeichnet.

1) 4 cbm 856 cdm 785 ccm =? ccm.

Ausrechnung.

4 cbm 856 cdm = 4 × 1000 + 856 cdm = 4856 cdm
4856 cdm 785 ccm = 4856 × 1000 + 785 = 4856785 ccm.
Kurz: 4 cbm 856 cdm 785 ccm = 4856 cdm 785 ccm
= 4856785 ccm.

Fehlende Stellen werden durch Nullen vertreten.

2) 8 cbm 75 cdm 8 ccm = 8075 cdm 8 ccm
= 8075008 ccm.

3) 57934682 ccm, wie viel cbm, cdm und ccm?

Ausr. 1000 Einheiten einer niederen Benennung geben eine Einheit der nächsthöheren. Man dividirt also durch 1000, d. i. man löst von der Rechten gegen die Linke je drei Stellen ab.

57|934|682 ccm = 57 cbm 934 cdm 682 ccm.

b. In Decimalbrüchen.

Die Grundeinheit für die Längenmaße ist das Meter, für die Flächenmaße das Quadratmeter, für die Körpermaße das Kubikmeter.

1 cbm = 1000 cdm; also 1 cdm = 0,001 cbm
24 „ = 0,024 „
375 „ = 0,375 „

1 cbm = 1000000 ccm; also	1 ccm	=	0,000001 cbm		
	36 "	=	0,000036 "		
	748 "	=	0,000748 "		

Die Kubikdecimeter stehen in der 1., 2. und 3. Decimalstelle, die Kubikcentimeter stehen in der 4., 5. und 6. Decimalstelle.

Wo stehen die Kubikmeter? wo die Kubikdecimeter? die Kubikcentimeter?

Um einen Decimalbruch, welcher Körpermaße bezeichnet, zu lesen, so nimmt man vom Komma aus nach rechts immer drei Stellen zusammen. Die ersten drei Stellen enthalten die Kubikdecimeter, die folgenden drei Stellen die Kubikcentimeter. Bleibt am Ende nur eine Ziffer, so werden zwei Nullen beigefügt; bleiben 2 Ziffern, so wird nur noch für die dritte eine Null gesetzt.

5,738.962 cbm	=	5 cbm	738 cdm	962 ccm
72,073.8 "	=	72 "	73 "	800 "
359,450.73 "	=	359 "	450 "	730 "

§. 396. Der Würfel.

a. Berechnung der Oberfläche. Da der Würfel von 6 gleichen Quadratflächen umschlossen ist, so wird seine Oberfläche gefunden, wenn man eines der Quadrate berechnet und das Ergebniß mit 6 multiplicirt.

b. Berechnung des Kubikinhaltes. Ist ein Würfel 2 dm lang (folglich auch breit und hoch), so beträgt seine Grundfläche 2 × 2 oder 4 qdm. Auf jedes Q.-Decimeter kann ein Kubikdecimeter gesetzt werden. Auf der Grundfläche von 4 qdm können somit 4 cdm neben einander stehen. Sie bilden eine Schicht von 1 dm Höhe. Da der Würfel 2 dm hoch ist, so enthält er zwei dergleichen Schichten. Er ist also 2 × 4 oder 8 Kubikdecimeter groß.

Ist ein Würfel 3 dm lang, so enthält er 3 Schichten von je 3 × 3 oder 9 cdm. Er ist also 3 × 3 × 3 oder 27 cdm groß.

Bei 4 dm Länge enthält ein Würfel 4 Schichten von je 4 × 4 oder 16 cdm; sein Rauminhalt ist also = 4 × 4 × 4 = 64 cdm u. s. w.

Das Produkt aus Länge und Breite bezeichnet zunächst den Quadratinhalt der Grundfläche, dann aber auch die Anzahl der Würfel, welche zusammen eine Schicht bilden. Die Zahl, welche die Höhe bestimmt, sagt, wie viele dergleichen Schichten der ganze Körper enthält. Darum gibt das Produkt aus der Länge, Breite und Höhe den Kubikinhalt. Da beim Würfel alle Seiten einander gleich sind, so wird, um dessen Inhalt zu finden, die Zahl, welche die Länge des Würfels bezeichnet, mit sich selbst und das Produkt wieder mit derselben Zahl multiplicirt.

Aufg. Welches ist der Kubikinhalt einer Grube, welche a. 4 m, b. 2,7 m lang, breit und hoch ist?

Auflösung.

a. Eine Grube, welche 4 m lang, breit und hoch ist, hat eine Grundfläche von 4 × 4 oder 16 qm und 4 Schichten von je 4 × 4 oder 16 cbm; ihr Kubikinhalt ist also 4 × 4 × 4 oder 4 × 16 = 64 cbm.

b. Der Kubikinhalt eines Raumes, welcher 2,7 m lang, breit und hoch ist, läßt sich auf zweierlei Weise berechnen.

Erstens: 2,7 m = 27 dm. Die Grundfläche beträgt 27 × 27 oder 729 qdm und der Kubikinhalt 27 × 27 × 27 oder 27 × 729 cdm, nämlich 19683 cdm oder 19 cbm 683 cdm.

Zweitens: 2,7 = 27 z. Hiernach hat die Grundfläche 2,7 × 2,7 qm und der Rauminhalt = 2,7 × 2,7 × 2,7 cbm, d. i. 19,683 cbm oder 19 cbm 683 cdm.

§. 397. Das Prisma und der Cylinder.

Das Prisma (Fig. 18, 19, 20) ist ein Körper, welcher zwei gleiche Drei-, oder Vier- oder Vielecke als Grundflächen und drei oder mehrere ebene Seitenflächen hat. Der Cylinder (die Rolle oder Walze (Fig. 21) hat zwei ebene kreisrunde Grundflächen und eine gewölbte Seitenfläche. Beide (Prisma und Cylinder) sind überall gleich dick.

a. Berechnung der Oberfläche.

Rollt man ein Blatt Papier von der Form eines Rechtecks so zusammen, daß die beiden Seitenlinien aneinander stoßen, so entsteht ein hohler Cylinder. Die Länge des Rechtecks bildet den Umfang des Cylinders, die Höhe des Rechtecks die Höhe des Cylinders. Hieraus folgt, daß die krumme Oberfläche eines Cylinders oder einer Walze gefunden wird, wenn man den Umfang mit der Höhe multiplicirt. Um die ganze Oberfläche zu erhalten, so werden die beiden Endflächen dazu addirt. — Auf gleiche Weise läßt sich auch die Oberfläche von dem Prisma berechnen und das Verfahren auf ähnliche Weise sich auch veranschaulichen.

b. Berechnung des Kubikinhaltes.

1) Ein rechtwinkelig behauener Quaderstein ist 1,37 m lang, 85 cm breit und 86 cm hoch. Wie viel beträgt sein Kubikinhalt?

a. 137 × 85 × 86 = 1001470 ccm.

b. 1,37 × 0,85 × 0,86 = 1,001470 cbm.
= 1 cbm 1 cdm 470 ccm.

2) Wie groß ist der Kubikinhalt eines dreiseitigen 3,7 m hohen Körpers, dessen zwei Endflächen Dreiecke sind von 84 cm Breite und 73 cm Höhe?

Aufl. Die Grundfläche beträgt 0,84 × 0,73 : 2 = 0,3066 qm. Von der Grundfläche bis zu 1 m Höhe beträgt der Inhalt 0,3066 cbm, bis zu 3,7 m Höhe 3,7 × 0,3066 cbm = 1,13442 cbm = 1 cbm 134 cdm 420 ccm.

3) Ein Cylinder hat 0,678 m im Durchmesser und ist 4,2 m hoch. Wie groß ist sein Kubikinhalt?

Aufl. Zuerst berechne ich die Grundfläche. Diese ist ein Kreis von 0,678 m im Durchmesser. Der Halbmesser = 0,339 m; die Kreisfläche also = 0,339 × 0,339 × 3,14 = 0,36085194 qm.

Nun suche ich den Kubikinhalt. Wäre der Cylinder 1 m hoch, so würde sein Inhalt so viel Kubikmeter betragen, als seine Grundfläche

Quadratmeter hat. Da er 4,2 m hoch ist, so beträgt sein Inhalt 4,2 $\times$ 0,36085194 cbm, nämlich 1,515578148 cbm = 1 cbm 515 cdm 578 ccm 148 cmm.

4) Ein viereckiges Gefäß ist 1,625 m lang und breit und 1,64 m tief. a. Wie viel beträgt sein Kubikinhalt? b. Wie viel Liter Wasser faßt es? c. Welches Gewicht hat dieses?

Aufl. a. Die Grundfläche = 1,625 $\times$ 1,625 = 2,640625 qm. Der Kubikinhalt = 1,64 $\times$ 2,640625 = 4,330625 cbm.

b. 1 cdm = 1 Liter; 4,330625 cbm = 4330,625 cdm, also auch eben so viel Liter.

c. 1 Liter Wasser ist dem Gewichte nach = 1 Kilogramm; also wiegen 4330,625 l Wasser eben so viel kg, nämlich 4330 kg 625 g = 4 Tonnen 330 kg 625 g.

§. 398. Die Pyramide und der Kegel.

Die Pyramide (Fig. 22, 23, 24) hat, wie das Prisma, entweder ein Dreieck oder ein Viereck, oder ein Vieleck als Grundfläche; der Kegel (Fig. 25) hat, wie der Cylinder, als Grundfläche einen Kreis. Beide nehmen gegen ihre Höhe an Dicke verhältnißmäßig ab und endigen in einer Spitze.

a. Berechnung der Oberfläche.

Die Seitenfläche oder der Mantel einer Pyramide besteht aus so viel Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat. Ist die Pyramide eine senkrechte, so sind die Dreiecke gleichschenkelig, und man findet den Quadratinhalt des Mantels, wenn man seine Höhe mit dem Umfang der Grundfläche multiplicirt und das Produkt durch 2 theilt. Addirt man hiezu den Inhalt der Grundfläche, so erhält man den Quadratinhalt der ganzen Oberfläche.

Da sich der Kegel als eine Pyramide mit unendlich vielen Seiten denken läßt, so berechnet man den Quadratinhalt seiner Oberfläche wie den der Pyramide.

b. Berechnung des Kubikinhaltes.

Ein Pyramide ist genau $^1/_3$ von einem Prisma, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Dasselbe Verhältniß besteht zwischen Kegel und Cylinder.

So lehrt die Stereometrie. Um den Schüler davon zu überzeugen, so fertige man einen Cylinder und einen Kegel von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe, beide hohl. Mit derselben Masse Sand, welche der Cylinder auf einmal faßt, läßt sich der Kegel dreimal füllen.

Der Rauminhalt einer Pyramide und eines Kegels wird daher gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe vervielfacht und das Ergebniß durch 3 theilt, oder wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt.

Aufgabe 1. Eine vierseitige Pyramide ist 4 m breit und tief und 12 m hoch; wie groß ist ihr Kubikinhalt?

Aufl. Die Grundfläche = 4 × 4 = 16 qm; der Kubikinhalt = 12 × 16, getheilt durch 3, oder 4 × 16 = 64 cbm.

Aufg. 2. Ein Kegel hat 8 dm Durchmesser und 1,6 m Höhe; wie viel beträgt sein Rauminhalt?

Aufl. Die Grundfläche = 0,4 × 0,4 × 3,14 = 0,5024 qm; der Rauminhalt = 1,6 × 0,5024 cbm, durch 3 getheilt = 0,267956 . . cbm = 267 cdm 946 ccm.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Kubikinhalt einer 4seitigen Pyramide von 12 m Breite und Tiefe von 45 m Höhe? (2160 cbm.)

Aufgabe 4. Ein Kegel hat 6 m Durchmesser und 20 m Höhe; was ist sein Rauminhalt? Antwort: 188,4 Kubikmeter.

§. 399. Der abgestumpfte Kegel.

Ein abgestumpfter Kegel entsteht, wenn die Spitze eines Kegels abgeschnitten wird. Dieß kann auf zweierlei Weise geschehen: so, daß die obere Fläche mit der Grundfläche gleichlaufend ist, und so, daß sie mit dieser nicht gleichlaufend ist. Wir ziehen nur den ersteren Fall in Betracht. Ein abgestumpfter Kegel, dessen obere Fläche mit der Grundfläche gleichlaufend ist, läßt sich als eine Walze ansehen, deren Durchmesser gleich ist dem mittleren Durchmesser des abgestumpften Kegels. Man addirt also den obern und untern Durchmesser und nimmt von der Summe die Hälfte; aus dem so gefundenen mittleren Durchmesser berechnet man die Grundfläche, und diese, mit der Höhe multiplicirt, gibt nahezu den kubischen Inhalt.

1) Der untere Durchmesser sei 6 m, der obere 4 m, die Höhe 12 m; welches ist der Kubikinhalt?

Ausr.: 6 + 4 = 10; die Hälfte von 10 = 5. Der mittlere Durchmesser ist also 5 m. Die Kreisfläche des mittleren Durchschnitts = 5 × 5 × 3,14 getheilt durch 4 = 19,625 qm; der kubische Inhalt = 12 × 19,625 = 235,5 Kubikmeter.

2) Ein abgesägter Baumstamm ist 15 m lang; sein Stammende hat 0,9 m, sein Kopfende 0,7 m im Durchmesser; wie viel beträgt sein Kubikinhalt?

Ausr. Der mittlere Durchmesser = 0,9 + 0,7 m, getheilt durch 2 = 0,8 m; der Halbmesser = 0,4 m; die Kreisfläche = 0,4 × 0,4 × 3,14 = 0,5024 qm; der Kubikinhalt = 15 × 0,5024 = 7,536 cbm = 7 cbm 536 cdm.

§. 400. Die Kugel.

Die Kugel hat nur eine einzige vollkommen runde Fläche, welche in allen Punkten gleichweit von dem Mittelpunkte entfernt ist.

Eine Kugel hat dieselbe Oberfläche, wie ein Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich sind. Demnach wird die Oberfläche einer Kugel gefunden, wenn man den Kugelumfang mit dem Kugeldurchmesser multiplicirt. Bei näherer Be-

trachtung ergibt sich, daß dieß eben so viel ist, als wenn man den Kugeldurchmesser mit sich selbst und das Produkt mit 3,14 multiplicirt.

1) Der Durchmesser einer Kugel ist 0,8 m; wie groß ist ihre Oberfläche? Antwort: Ist der Durchmesser = 0,8 m, so ist der Umfang = 3,14 × 0,8; mithin ist die Kugeloberfläche = 3,14 × 0,8 × 0,8 = 3,14 × 0,64 = 2,0096 qm = 2 qm 96 qcm.

2) Der Umfang einer Kugel ist 2,67 m; wie groß ist ihre Oberfläche? Aufl. Der Durchmesser = 2,67 m dividirt durch 3,14 = 0,85 m; die Oberfläche also = 2,67 × 0,85 = 2,2695 qm.

Denkt man sich eine Kugel aus lauter Pyramidchen zusammengesetzt, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammentreffen; so bilden die Grundflächen derselben zusammengenommen die Kugeloberfläche, und die Höhe einer Pyramide gibt den Halbmesser der Kugel. Man findet also den Kubikinhalt einer Kugel, wenn man ihre Oberfläche mit ihrem Halbmesser multiplicirt und das Produkt durch 3 theilt.

3) Eine Kugel hat 3 dm Durchmesser; wie groß ist a. ihre Oberfläche? b. ihr Rauminhalt?

Aufl. a. Die Oberfläche der Kugel = 3 × 3 × 3,14 = 9 × 3,14 = 28,26 qdm. b. Der Halbmesser = $^1/_2$ × 3 dm = 1,5 dm; der Rauminhalt der Kugel ist also $^1/_3$ von 1,5 × 28,26 = 0,5 × 28,26 = 14,13 Kubikdezimeter.

4) Eine Kugel hat 2,4 m Durchmesser, was macht ihr Rauminhalt? Antwort: 7,23456 cm.

5) Durch theilweise Messung hat man gefunden, daß der Umfang der Erdkugel 5400 Meilen beträgt. Wie groß ist a. der Durchmesser, b. der Halbmesser, c. die Oberfläche, d. der Kubikinhalt derselben?

Antwort: Der Erddurchmesser = 1719,7 und der Erdhalbmesser = 859,8 Meilen, die Erdoberfläche = 9282060 Quadratmeilen, der Rauminhalt der Erde = 2659310190 Kubikmeilen.

§. 401. **Aus dem Kubikinhalte eines rechtwinkligen Körpers und zweien Ausdehnungen desselben die dritte zu finden.**

Ich multiplicire drei Zahlen mit einander und erhalte 60 als Produkt. Von den 3 Zahlen heißt die eine 3 und die andere 4. Wie heißt die dritte? (3 × 4 = 12; 12 in 60 = 5; die dritte Zahl heißt 5.)

Der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Körpers ist das Produkt aus Länge, Breite und Höhe. Wie werde ich nun eine von den drei Ausdehnungen finden, wenn die beiden andern und der Kubikinhalt gegeben sind? (Ich dividire den Kubikinhalt durch das Produkt der gegebenen Ausdehnungen.)

Aufg. Ein rechtwinkliges Gefäß soll 720 Kubikdecimeter (Liter) halten und inwendig 10 dm lang und 9 dm breit sein; welche Höhe muß es bekommen?

Ausr. a. 10 × 9 = 90; 720 getheilt durch 90 = 8; also 8 dm.

b. Da die Länge = 10 dm, die Breite = 9 dm, so ist die Grundfläche = 10 × 9 oder 90 qdm, und 1 Schichte von 1 dm Höhe =

90 cdm. So vielmal 90 cdm das Gefäß halten soll, eben so vielmal 1 dm hoch muß es gemacht werden. Die Höhe muß daher so viele Decimeter betragen, als 90 cdm in 720 cdm enthalten sind, nämlich 8.

§. 402. Rauminhalt und Gewicht.

Ein rechtwinklig behauener Sandsteinquader ist 1,25 m lang, 0,64 m breit und 0,42 m hoch; wie viel wiegt derselbe, wenn sein specifisches Gewicht = 2,45?

Aufl. Der Rauminhalt = 1,25 × 0,64 × 0,42 = 0,336 cdm. Ein Kubikdecimeter Wasser wiegt 1 kg, 1 cdm Sandstein 2,45mal so viel, also 2,45 kg; mithin wiegen 336 cdm Sandstein 336 × 2,45 kg = 823,20 kg.

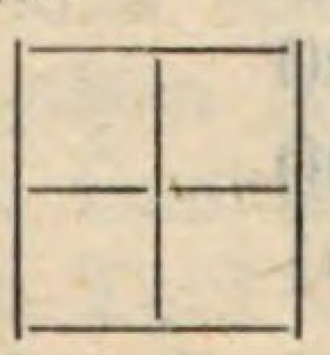
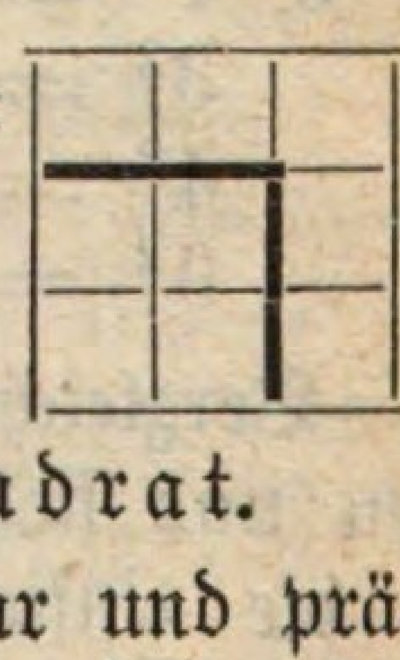
III. Die Quadratzahlen und ihre Wurzeln.

§. 403. Entwicklung.

a. Eine Quadratzahl entsteht, wenn man irgend eine Zahl mit sich selbst multiplicirt. So ist 2.2 oder 4 die Quadratzahl von 2, 3.3 oder 9 die Quadratzahl von 3 ꝛc. Die Quadratzahl ist also das Produkt aus zwei gleichen Faktoren. Statt 2 . 2 setzt man aber 2^2, und statt 3 . 3 setzt man 3^2 ꝛc. Man setzt also den Faktor nur einmal und hängt ihm, um anzuzeigen, daß er zweimal zu stehen habe, die kleine Ziffer ^{2} an. Demnach ist $1^2 = 1 . 1$ oder 1, $2^2 = 2 . 2$ oder 4, $3^2 = 3 . 3$ oder 9 ꝛc.

Den Faktor nennt man Grundzahl, wenn man von ihm die Quadratzahl sucht, und Quadratwurzel, wenn man ihn aus einer Quadratzahl bestimmt. Das Verfahren, die Quadratwurzel, d. i. einen der zwei gleichen Faktoren, von einer Zahl zu finden, heißt das Ausziehen der Quadratwurzel. Das Zeichen für diese Operation ist $\sqrt[2]{}$ oder bloß $\sqrt{}$. Bei $7^2 =$ = 49 ist 7 die Grundzahl und 49 die Quadratzahl davon; bei $\sqrt{}$ (49 = 7) ist von 49 7 die Quadratwurzel.

Die Benennung Quadratzahl kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer solchen Zahl in Form von einem Quadrate oder durch ein Quadrat dastellen läßt.

$2^2 = 4 =$ • • / • • =  $3^2 = 9 =$ • • • / • • • / • • • = .

Man sagt deßhalb statt Quadratzahl auch bloß Quadrat.

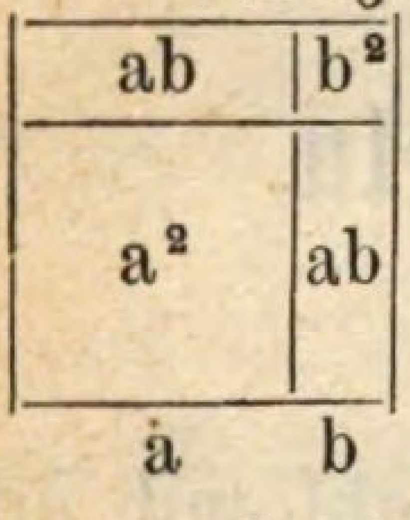
Stelle so die Quadratzahl der Zahlen von 1—10 dar und präge sie dir ein! Die Quadratzahlen von 20, 30 . . . . . 90 aber bilde frei im Kopfe! Eben so die Quadratzahlen von 11, 12, 13 . . . . . 19.

b. $23^2 = ?$ Da $23 = 20 + 3$, so ist 23^2 oder $23 \times 23 =$

	Besser:
$20 + 3$	$20 + 3$
$\times\ 20 + 3$	$\times\ 20 + 3$
9	$20 \,.\, 20 = 400 = 20^2$
60	$20 \,.\, 3 = 60$
60	$3 \,.\, 20 = 60$ } $= 2\,(20 \,.\, 3)$
400	$3 \,.\, 3 = 9 = 3^2$
$23^2 = 529$	$23^2 = 529$

Es ist also $23^2 = 20^2 + 2(20.3) + 3^2$. Nennt man die Zehner den ersten und die Einer den zweiten Theil der in's Quadrat erhobenen Zahl, so besteht die Quadratzahl einer zweitheiligen Zahl
aus dem Quadrate des ersten Theils,
aus dem doppelten Produkte des 1. und 2. Theils und
aus dem Quadrate des zweiten Theils.

Dazu führt auch folgende Anschauung:

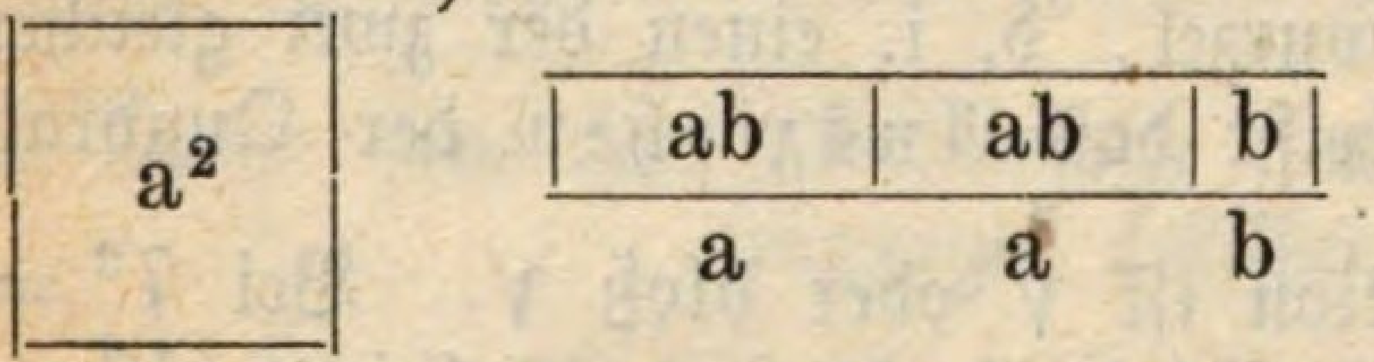


Wie vorhin die Zahl 23 in Zehner und Einer, so ist hier die Grundlinie des ganzen Quadrats und zugleich jede andere Seite desselben in die zwei ungleichen Theile a und b abgetheilt. Der Flächeninhalt des ganzen Quadrats zerfällt hiernach durch Ziehung der entsprechenden Linien
in das Quadrat des größeren Theils ($= a^2$),
in 2 Rechtecke, von denen jedes den größeren Theil als eine und den kleineren Theil als andere Ausdehnung hat ($= 2\ ab$), und
in das Quadrat des kleineren Theils ($= b^2$), mithin in

$$a^2 + 2ab + b^2$$

und das ist die Formel für das Ausziehen der Quadratwurzel.

Löst man bei obiger Figur die 2 Rechtecke und das Quadrat des kleineren Theils ab und legt diese 3 Stücke in einer Richtung nebeneinander wie hier:



so zeigt sich, daß die Quadratzahl oder das Quadrat einer 2theiligen Größe auch besteht:

1. aus der Quadratzahl (oder dem Quadrate) des 1 Theils und
2. aus dem Produkte (oder Rechtecke), welches den doppelten ersten Theil und den zweiten Theil $(2a + b)$ als einen Faktor (als Länge) und den zweiten Theil (b) als anderen Faktor (als Breite) hat.

c. $1^2 = 1$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10000$
$3^2 = 9$	$30^2 = 900$	$300^2 = 90000$
$4^2 = 16$	$40^2 = 1600$	$400^2 = 160000$
$9^2 = 81$	$99^2 = 9801$	$999^2 = 998001$

Vergleicht man an Vorstehendem die Grundzahlen mit ihren Quadratzahlen und sieht dabei auf die Anzahl ihrer Stellen, so ergibt sich Folgendes: die einstelligen Grundzahlen (1—9) geben ein- und zweistellige Quadratzahlen; die zweistelligen Grundzahlen (10—99) geben drei- und vierstellige Quadratzahlen; die dreistelligen Grundzahlen (100—999)

geben fünf= und sechsstellige Quadratzahlen. Die Quadratzahl enthält also entweder doppelt so viel Stellen als ihre Grundzahl, oder doppelt so viel Stellen weniger eine.

Hieraus folgt umgekehrt, daß eine ein= oder zweistellige Quadratzahl nur eine einstellige Wurzel, eine drei= oder vierstellige Quadratzahl nur eine zweistellige Wurzel, eine fünf= oder sechsstellige Quadratzahl nur eine dreistellige Wurzel haben kann ꝛc. Man theilt daher beim Ausziehen der Quadratwurzel die Quadratzahl von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu 2 Stellen, wie: 5|29, 40|96, 1|51|29, 98|80|01. So viele Klassen die Quadratzahl hat, so viele Stellen hat ihre Wurzel.

§. 404. **Das Ausziehen der Wurzel aus vollkommenen Quadratzahlen.**

Zunächst wird Folgendes eingeübt:

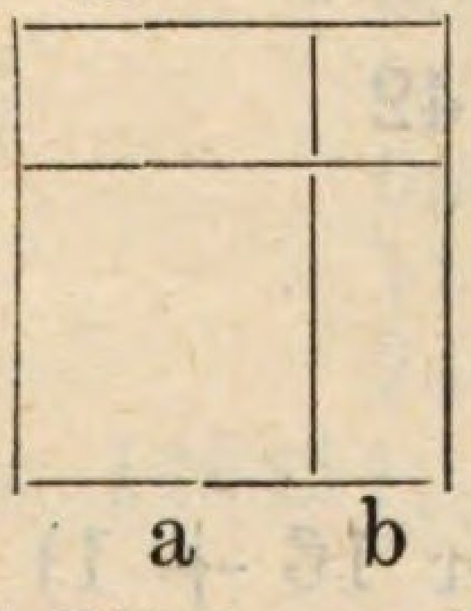
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{36.00} = 60$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{49.00} = 70$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{900} = 30$	$\sqrt{64.00} = 80$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{1600} = 40$	$\sqrt{81.00} = 90$
$\sqrt{25} = 5$		$\sqrt{2500} = 50$	

Die Quadratwurzel von 1 ist 1; denn 1 . 1 ist 1. Die Q.=Wurzel von 4 ist 2; denn 2 . 2 ist 4 ꝛc. Die Q.=Wurzel von 1600 (16 Hundert) in 40; denn 40 . 40 ist 1600 ꝛc.

Nun wird zum schriftlichen Verfahren übergegangen.

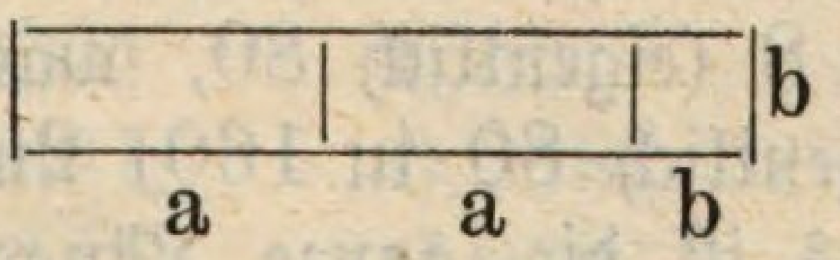
Beispiel 1. $\sqrt{529} = ?$

Da 5|29 zwei Klassen gibt, so wissen wir voraus, daß die Wurzel eine zweitheilige, d. i. eine aus Zehnern und Einern bestehende Zahl ist. Daher stellt sich die Aufgabe auch so:

Das Quadrat 

enthält 529 qdm; wie groß ist die Seite a + b?

Verfahren: $\sqrt{5|29} = 20 + 3 = 23$
400   a   b
2 . 20 = 40 | 129
3 . 43 | 129



Erkl. Zuerst sucht man den ersten Theil (a) oder die Zehner der Wurzel. Die Quadratzahlen der Zehner sind 100, 400, 900 ꝛc.; 500 ist nicht dabei. Die nächste Quadratzahl unter ihr ist 400. Die Wurzel von 400 ist 20. Der erste Theil oder a ist also 20; $20^2 = 20 . 20$ oder 400. Von den 529 □ des ganzen Quadrats bilden also 400 das Quadrat von a, und 529—400 oder 129 kommen auf das abgelöste Rechteck $2ab + b^2$.

Nun suchen wir den 2. Theil (b) oder die Einer der Wurzel. Der 2. Theil ist gleich der Breite des Rechtecks, dessen Quadratinhalt =

129 und dessen Länge = 2a + b. Wie wir wissen, wird die Breite eines Rechtecks gefunden, wenn man seinen Quadratinhalt durch seine Länge dividirt. Die Länge unseres Rechtecks ist nun zwar nicht vollständig, doch nahezu bekannt. Denn da a = 20, so ist 2a = 2 . 20 oder 40. Es fehlt also zur ganzen Länge nur noch der Theil b, welcher der Breite gleich und noch unbekannt ist. Wir müssen daher jetzt eben so verfahren wie beim Dividiren überhaupt, wenn z. B. gesucht werden soll, wie oft 41, oder 42, oder 43 ꝛc. in 129 enthalten ist. Wir sehen von den Einern ab und suchen, wie oft 40 in 120 liegt.

40 in 120 liegt 3mal. Die Breite des Rechtecks oder b ist also = 3. Mithin ist die ganze Länge desselben = 40 + 3 oder 43, und sein Quadratinhalt = 3 . 43 oder 129; 129 von 129 geht auf. Die Wurzel von 529 oder die Seite a + b des ganzen Quadrats ist also 20 + 3 oder 23.

Beispiel 2. $\sqrt{46|24} = 60 + 8 = 68$

	3600
2 . 60 = 120	1024
8 . 128	1024

Erkl. Die Wurzel aus 46 (= 36 + 10) ist 6, aus 46.00 also 60 (= a); 60.60 = 3600 (= a^2); 3600 von 4624 bleibt 1024; das ist der Inhalt für das Rechteck, dessen Länge = 2a + b. Da a = 60, so ist 2a = 2.60 oder 120; 120 in 1020 oder 12 in 102 = 8 (= b); die ganze Länge des Rechtecks ist also 120 + 8 = 128, und der Inhalt desselben = 8.128 oder 1024. Geht auf. Die Wurzel aus 4624 ist also 60 + 8 oder 68.

Auf gleiche Weise wird die Wurzel gesucht von 625; 1296; 2025; 2916; 5184; 7569; 9604; dann wird zum kürzeren Verfahren übergegangen.

Beispiel 3. $\sqrt{17|64} = 42$

	16
8 .	164
82	164

Erkl. Die Wurzel aus 17 (oder 16 + 1) ist 4 (= a), eigentlich 40; 4 . 4 = 16 (eigentlich 40.40 = 1600 = a^2); 16 von 17 bleibt 1; dazu die folgende Klasse macht für 2ab + b^2 zusammen 164. Da a = 4, so ist 2a = 8 (eigentlich 80, was durch den Punkt angezeigt ist); 8 liegt in 16 (eigentlich 80 in 160) 2mal (= b). Diese 2 der 8 angehängt, macht 82. Das ist die ganze Länge des Rechtecks. 2.82 = 164. Die Wurzel aus 1764 ist also 42.

Beisp. 4. $\sqrt{11|90|25} = \overset{a}{3}\,\overset{b}{4}\,5$ (a b c) Kürzer: $\sqrt{11|90|25} = 345$

	9		9
6 .	290	64	290
64	256		256
68 .	3425	685	3425
685	3425		3425

Erkl. Die Quadratzahl hat 3 Klassen, die Wurzel also 3 Stellen. Man sucht zuerst die Wurzeltheile aus der ersten und zweiten Klasse, d. i. aus 1190, und steht dabei von der folgenden Klasse ganz ab.

Die Wurzel aus 11 ist 3 (= a), eigentlich 30; 3 . 3 = 9 (eigentlich 30 . 30 = 900 = a^2); 9 von 11 bleibt 2; dazu die folgende Klasse, macht für 2ab + b^2 zusammen 290. Ist a = 3 (30), so ist 2a = 6 (60); 6 liegt in 29 (nämlich 60 in 290) 4mal (= b). Diese 4 der 6 angehängt, macht 64; 4 . 64 = 256; 256 von 290 = 34; hiezu die letzte Klasse, gibt 3425.

Nun sieht man die zwei gefundenen Wurzeltheile a + b oder 34 wieder als ersten Theil, als a, an und bestimmt hiezu den zweiten Theil b (eigentlich c).

Also ist jetzt a = 34 (eigentlich 340); 2a = 2 . 34 oder 68 (eigentlich 2 . 340 oder 680); 68 in 342 (eigentlich 680 in 3420) = 5; diese 5 der 68 angehängt, gibt 685; 5 . 685 = 3425. Die Wurzel ist also 345.

Noch einige Beispiele.

```
 √51|84|00 = 720            √36|48|16 = 604
  49                          36
 142 | 284                  12 .  |4816
       284                  1204  |4816
       00
```

```
√55|77|10|24 = 7468
 49
 144   | 677
         576
 1486  | 10110
          8916
 14928 | 119424
         119424
```

Die Wurzel aus 55 ist 7; 7.7 oder 49 von 55 ab, läßt 6; dazu die nächste Kl., macht 677; a = 7, 2a = 14; 14 in 67 liegt 4mal; 4 . 144 = 576, von 677 ab, läßt 101; dazu die nächste Kl., gibt 10110; a = 74, 2a = 148; 140 in 1011 liegt 6mal; 6 . 1486 = 8916, abgezogen, läßt 1194; dazu die letzte Kl., ist 119424; a = 746, 2a = 1492; 1492 in 11942 liegt 8mal; 8 . 14928 = 119424, geht auf. Also ist die Wurzel aus 55771024 = 7468.

§. 405. Das Ausziehen der Wurzel aus Decimalbrüchen.

$0{,}1^2 = 0{,}01$	$0{,}01^2 = 0{,}0001$	$0{,}001^2 = 0{,}000001$
$0{,}3^2 = 0{,}09$	$0{,}09^2 = 0{,}0081$	$0{,}008^2 = 0{,}000064$
$0{,}4^2 = 0{,}16$	$0{,}25^2 = 0{,}0625$	$0{,}012^2 = 0{,}000144$
$0{,}9^2 = 0{,}81$	$0{,}99^2 = 0{,}9801$	$0{,}999^2 = 0{,}968001$

Hiernach sind die Quadratzahlen der Zehntel Hundertel, die der Hundertel Zehntausendtel und die der Tausendtel Milliontel. Die Quadratzahl eines Decimalbruchs hat also immer doppelt so viel Stellen, als dieser. Darum ist auch der Decimalbruch, aus welchem die Wurzel zu ziehen ist, in Klassen zu 2 Stellen abzutheilen. Fehlt eine Stelle, so wird eine Null, oder, wenn der Bruch ein periodischer ist, die treffende Stelle der Periode beigefügt. Das Verfahren bei dem Ausziehen der Wurzel ist das bisherige.

$\sqrt{0,12|96} = 0,36$
9
66 | 396
396

Die Wurzel aus 0 Ganzen = 0; die Wurzel aus 12 (Hunderteln) = 3 (Zehntel); das Quadrat derselben ab, läßt 3 (Hundertel). Dazu die nächste Klasse macht 396 (Zehntausendtel.) a = 3 (nämlich 30); also ist 2a = 6 (60); 6 in 39 (60 in 390) = 6; 6 . 66 = 396. Geht auf; also ꝛc.

$\sqrt{0,01|51|29} = 0,123$
1
22|51
44
243|729
729

$\sqrt{0,00|75|69} = 0,087$
64
167|1169
1169

Die Wurzel aus 0 Ganzen = 0 Ganze, und die Wurzel aus 00 Hunderteln = 0 Zehntel ꝛc.

$\sqrt{54,24|32|25} = 7,365$
49
143 | 524
429
1466 | 9532
8796
14725 | 73625
73625

$\sqrt{7|19,84|89} = 26,83$
4
46 | 319
276
528 | 4384
4224
5363 | 16089
16089

In den 2 letzten Beispielen, wo mit den Decimalen ganze Zahlen verbunden sind, wurde die Wurzel erst aus diesen bestimmt und zu dem Reste hievon die Klasse der Zehntel und Hundertel herunter geführt.

Aus dem letzten Beispiele ist auch zu ersehen, daß die Abtheilung in Klassen vom Decimalkomma aus geschieht, bei den ganzen Zahlen von rechts nach links, bei den Decimalen von links nach rechts.

§. 406. Das Ausziehen der Wurzel aus nicht vollkommenen (oder Irrational-) Zahlen.

$\sqrt{7} = ?$ Da 7 = 7,0000 . . ., so ist die $\sqrt{7} =$

$\sqrt{7,00|00|00} = 2,645\ldots$
4
46 | 300
276
524 | 2400
2096
5285 | 30400
26525
3975

Oder: $\sqrt{7} = 2,645\ldots$
4
46 | 300
276
524 | 2400
2096
5285 | 30400
26425
3975

Hierbei geht es nie auf. Die Wurzel läßt sich daher auch nicht ganz genau bestimmen. Sie wird aber um so vollständiger, je länger man die

Operation fortsetzt. Mithin kommt es darauf an, welcher Grad von Genauigkeit erreicht werden will. In den gewöhnlichen Fällen wird es genügen, die Wurzel auf 2 oder höchstens 3 Decimalstellen zu bestimmen.

$$\sqrt{0,24} = 0,489 \ldots \text{ (nahe 0,49.)}$$

```
 √0,24 = 0,489 . . .
   16    (nahe 0,49.)
 88 | 800
      704
969 | 9600
      8721
       879
```

$$\sqrt{48,50} = 6,96 \ldots$$

```
  √48,50 = 6,96 . .
    36
 129 | 1240
       1611
1386 | 8900
       8316
        585
```

§. 407. Das Ausziehen der Wurzel aus gemeinen Brüchen.

Da $^2/_3 \cdot {}^2/_3 = {}^4/_9$, so wird ein gemeiner Bruch in sein Quadrat erhoben, indem man sowohl den Zähler, als den Nenner mit sich selbst multiplicirt. Und da umgekehrt $\sqrt{^4/_9} = {}^2/_3$, so folgt, daß aus einem gemeinen Bruche die Wurzel gefunden wird, indem man diese sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner desselben zieht.

$$\sqrt{^{16}/_{25}} = {}^4/_5 \qquad \sqrt{6^1/_4} = \sqrt{^{25}/_4} = {}^5/_2 = 2^1/_2.$$
$$\sqrt{^{36}/_{49}} = {}^6/_7 \qquad \sqrt{3^6/_{25}} = \sqrt{^{81}/_{25}} = {}^9/_5 = 1^4/_5.$$

Sind Zähler und Nenner nicht vollkommene Quadratzahlen, so verwandelt man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und sucht aus diesem die Wurzel. $^{27}/_{32} = 0,84375$; also ist $\sqrt{^{27}/_{32}} = \sqrt{0,84|37|50} = 0,918 \ldots$

IV. Die Kubikzahlen und ihre Wurzeln.

§. 408. Entwicklung.

1. Eine Kubikzahl ist das Produkt aus drei gleichen Faktoren. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, die Kubikzahl von 2 ist 8. Umgekehrt ist $\sqrt[3]{8} = 2$, d. i. die Kubikwurzel von 8 ist 2.

Der Name Kubikzahl kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer solchen Zahl in Würfelform darstellen läßt, oder auch, weil der Rauminhalt eines Kubus gefunden wird, wenn man die Größe einer Kante desselben 3mal als Faktor setzt und das Produkt hieraus sucht.

2.

$1^3 = 1$	$5^3 = 125$	$10^3 = 1.000$	$100^3 = 1.000000$
$2^3 = 8$	$6^3 = 216$	$20^3 = 8.000$	$200^3 = 8.000000$
$3^3 = 27$	$7^3 = 343$	$30^3 = 27.000$	$300^3 = 27.000000$
$4^3 = 64$	$8^3 = 512$	$40^3 = 64.000$	$400^3 = 64.000000$
	$9^3 = 729$	u. s. w.	u. s. w.

Die Kubikzahlen der Grundzahlen 1 bis 9 werden vollständig eingeprägt. Die Kubikzahlen der reinen Zehner aber betragen eben so viel Tausender und die der Hunderter eben so viele Millionen, als jene Einer.

3. Nun suchen wir, welche Bestandtheile der Kubus einer zweitheiligen Grundzahl hat. $24 = 20 + 4$; also ist $24^3 = (20 + 4).(20 + 4).(20 + 4)$.

$$\begin{array}{l} 20 + 4 \\ \times\, 20 + 4 \\ \hline 20 \,.\, 20 + 20 \,.\, 4 + 20 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 \text{ (Quadrat)} \\ \times\, 20 + 4 \\ \hline 20.20.20 + 20 \,.\, 20 \,.\, 4 \\ \quad + 20 \,.\, 20 \,.\, 4 + 20 \,.\, 4 \,.\, 4 \\ \quad + 20 \,.\, 20 \,.\, 4 + 20 \,.\, 4 \,.\, 4 \\ \quad\quad + 20 \,.\, 4 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \\ \hline 20.20.20 + 3\,(20.20.4) + 3\,(20\,.\,4\,.\,4) + 4\,.\,4\,.\,4 = \end{array}$$

$= 20^3 + 3\,(20^2\,.\,4) + 3\,(20\,.\,4^2) + 4^3$; dieß ist, wenn man den 1. Theil durch a und den 2. durch b bezeichnet,

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Das ist die Formel für das Ausziehen der Kubikwurzel. Sie zeigt, daß der Kubus einer zweitheiligen Zahl besteht

a. aus der Kubikzahl des ersten Theils,

b. aus der 3fachen Quadratzahl des ersten Theils multiplicirt durch den zweiten Theil,

c. aus der 3fachen Quadratzahl des zweiten Theils multiplicirt durch den ersten Theil, und

d. aus der Kubikzahl des zweiten Theils.

4. $1^3 = 1$ | $10^3 = 1.000$ | $100^3 = 1.000.000$
$4^3 = 64$ | $43^3 = 79.507$ | $432^3 = 80.621.568$
$9^3 = 729$ | $99^3 = 970.299$ | $999^3 = 997.002.999$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Kubikzahlen der einstelligen Grundzahlen höchstens 3stellig, die der zweistelligen Grundzahlen höchstens 6stellig und die der dreistelligen Grundzahlen höchstens 9stellig sind. Und hierauf gründet sich für das Ausziehen der Kubikwurzel die Abtheilung der gegebenen Zahl von rechts nach links in Klassen zu 3 Stellen.

§. 409. Das Ausziehen der Wurzel aus vollkommenen Kubikzahlen.

$$\sqrt[3]{39|304} = \underset{a}{30} + \underset{b}{4} = 34$$

$$\begin{array}{rl} a^3 = 30^3 = & 27\,000 \\ \hline 3a^2 = 3\,.\,30^2 = & 2700|12\,304|4 \\ \hline 3a^2b = 3\,.\,30^2\,.\,4 = & 10\,800 \\ 3ab^2 = 3\,.\,30\,.\,4^2 = & 1\,440 \\ b^3 = 4^3 = & 64 \\ \hline & 12\,304 \end{array}$$

Die Wurzel aus 39 (oder 27 + 12) ist 3, aus 39000 also 30; $30^3 = 27000$; dieß abgezogen, läßt 12304. Ist $a = 30$, so ist $a^2 = 30^2$ und $3a^2 = 3\,.\,30^2$ oder 2700. Um b zu finden, wird gesucht, wie oft 2700 in 12304 enthalten ist. Geht 4mal; $b = 4$. Demnach ist $3a^2b = 3\,.\,30^2\,.\,4$ oder 10800, $3ab^2 = 3\,.\,30\,.\,4^2$ oder 1440, und

$b^3 = 4^3$ oder 64, zusammen 12304. Dieß von 12304 ab, geht auf. Die Wurzel ist also 30 + 4 oder 34.

$$\sqrt[3]{421|875} = 70 + 5 = 75.$$

$$\begin{array}{rrl}
70^3 = & 343 & \\
3 \,.\, 70^2 & |78\,875|5 & \\
3 \,.\, 70^2 \,.\, 5 = & 73\,500 & \\
3 \,.\, 70 \,.\, 5^2 = & 5\,250 & \\
5_3 = & 125 & \\
 & 78875 &
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{80|621|568} = \overset{a\ \ b}{\widehat{4\ 3}}\ 2 \quad \begin{matrix} a & b & c \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rr}
a^3 = 4^3 = & 64 \\
3a^2 = 3 \,.\, 40^2 & |16\,621|3 \\
3a^2b = 3 \,.\, 40^2 \,.\, 3 = & 14\,400 \\
3ab^2 = 3 \,.\, 40 \,.\, 3^2 = & 1\,080 \\
b^3 = 3^3 = & 27 \\
 & 15\,507 \\
3a^2 = 3 \,.\, 430^2 & |1\,114568|2 \\
3a^2b = 3 \,.\, 430^2 \,.\, 2 = & 1\,109400 \\
2ab^2 = 3 \,.\, 430 \,.\, 2^2 = & 5160 \\
b^3 = 2^3 = & 8 \\
 & 1\,114568
\end{array}$$

Die Kubikwurzel aus 80 ist 4; also ist $a^3 = 4^3 = 64$; 64 von 80 bleibt 16, dazu die nächste Klasse, macht 16621, und dieß ist für $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Da $a = 40$, so ist $a^2 = 1600$ und $3a^2 = 4800$; 4800 ist in 16621 3mal enthalten; $b = 3$. Demnach ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 15507$. Dieß von 16621 ab, läßt 1114, dazu die nächste Klasse, macht 1114568.

Wie beim Ausziehen der Quadratwurzel, wenn diese dreitheilig ist, so betrachten wir auch hier nun $a + b$ als a. Mithin ist $a = 430$, $a^2 = 430^2$, und $3a^2 = 3 \,.\, 430^2 = 554700$, welche Zahl in 1114568 nur 2mal liegt; $b = 2$. Demnach ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1114568$. Geht auf. Die Wurzel ist also 432.

$$\sqrt[3]{373|248|000} = 720.$$

$$\begin{array}{rr}
7^3 = & 343 \\
3 \,.\, 70^2 & |30\,248|2 \\
3 \,.\, 70^2 \,.\, 2 = & 29\,400 \\
3 \,.\, 70 \,.\, 2^2 = & 840 \\
2^3 = & 8 \\
 & 30248 \\
 & 000
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{220|348|864} = 604$$

$$\begin{array}{rr}
6^3 = & 216 \\
3 \,.\, 60^2 & |4\,348|0 \\
3 \,.\, 600^2 & |4\,348\,864|4 \\
3 \,.\, 600^2 \,.\, 4 = & 4\,320\,000 \\
3 \,.\, 600 \,.\, 4^2 = & 28\,800 \\
4^3 = & 64 \\
 & 4348\,864
\end{array}$$

§. 410. Das Ausziehen der Wurzel aus Decimalbrüchen.

$0{,}9^3 = 0{,}729$; $0{,}99^3 = 0{,}970299$, und $0{,}999^3 = 0{,}997002999$.

Die Kubikzahl eines Decimalbruchs hat also 3mal so viel Stellen als die Grundzahl; deßhalb muß man sie von links nach rechts in Klassen zu 3 Stellen abtheilen.

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{0{,}262|144} = 0{,}64 \\
 & 262 \\
60^3 = & 216 \\
3 \cdot 60^2 & |\ 46144|\ 4 \\
3 \cdot 60^2 \cdot 4 = & 43200 \\
3 \cdot 60 \cdot 4^2 = & 2880 \\
4^3 = & 64 \\
 & 46144
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{103{,}823} = 4{,}7 \\
4^3 = & 64 \\
3 \cdot 40^2 & |\ 39823|\ 7 \\
3 \cdot 40^2 \cdot 7 = & 33600 \\
3 \cdot 40 \cdot 7^2 = & 5880 \\
7^3 = & 343 \\
 & 39823
\end{array}$$

§. 411. Das Ausziehen der Wurzel aus Irrational-Zahlen.

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{12} = 2{,}28\ldots \\
2^3 = & 8 \\
3 \cdot 20^2 & |\ 4000|2 \\
3 \cdot 20^2 \cdot 2 = & 2400 \\
3 \cdot 20 \cdot 2^2 = & 240 \\
2^3 = & 8 \\
 & 2648 \\
3 \cdot 220^2 & |\ 1352000|8 \\
3 \cdot 220^2 \cdot 8 = & 1161600 \\
3 \cdot 220 \cdot 8^2 = & 42240 \\
8^3 = & 512 \\
 & 1204352 \\
 & 147648
\end{array}$$

V. Von dem Grundsteuer-Kataster.

§. 412.

Eine in Bayern im zweiten Viertel dieses Jahrhunderts durchgeführte sehr vortreffliche Einrichtung ist die Art und Weise, wie die Grundsteuer berechnet wird. Dieselbe ist nämlich nicht nur von der Größe eines Grundstückes, sondern zugleich auch von dessen Bodengüte abhängig gemacht. Deßhalb wurde das ganze Land in allen seinen einzelnen Parcellen neu vermessen und die Bodengüte der einzelnen Lagen möglichst genau bestimmt.

Als Grundeinheit des Maßes wurde das bayerische Tagwerk angenommen und in allen Regierungsbezirken (mit Ausnahme von Unterfranken)

in 100 Theile eingetheilt, welche kurzweg **Decimale** heißen. Unter einem Decimale versteht man also $^1/_{100}$ Tagwerk. 2 Tgw. 45 Decim. = 2,45 Tagw.

In **Unterfranken**, wo schon eine größere Zertheilung der Grundstücke Platz gegriffen, wurde das Tagwerk in 1000 Theile eingetheilt. Diese Theile heißen gleichfalls **Decimale**. Hier hat man sich also unter einem Decimale $^1/_{1000}$ von einem Tagwerk vorzustellen. 2 Tgw. 45 Decim. = 2,045 Tagw.

Die Umrechnung der bisherigen Feldmaße in Hektare und Are ist dem deutschen Reichsgesetze gemäß bereits erfolgt und zwar nach der Bestimmung, daß

1 Tagwerk = 34,0727 Ar = 3407,27 qm,
1 Decimale = 0,340727 „ = 34,0727 „
in Unterfranken:
1 Decimale = 0,0340727 Ar = 3,40727 qm.

Zur weiteren Berechnung dient indeß noch das bisherige Feldmaß.

Hinsichtlich der **Bodengüte** (Bonität) sind die einzelnen Grundstücke in Klassen gebracht, welche durch Ziffern bezeichnet werden. Je besser der Boden eines Feldes, desto höher seine Klassenziffer. Ein Grundstück mit der Klassenziffer 16 ist von **doppelter** Bodengüte als ein anderes mit der Klassenziffer 8.

Denken wir uns drei Aecker mit A, B, C bezeichnet.
A sei 2 Tagw. groß und habe die Bodenklasse 8.
B sei 2 Tagw. groß und habe die Bodenklasse 16.
C sei 4 Tagw. groß und habe die Bodenklasse 16.

Die Aecker A und B sind von gleicher Größe; jeder derselben ist 2 Tagwerk groß. Hinsichtlich ihrer Bodengüte aber sind sie verschieden. Die Bodenklasse B ist 2mal so hoch, als die des A; B wird daher, unter **gleichen** übrigen Umständen, 2mal so viel ertragen, als der Acker A.

Die Aecker B und C haben gleiche Bodengüte. Beide liegen in der 16. Bonitätsklasse. C ist jedoch 2mal so groß als B. Der Ertrag und dadurch auch der Werth des C besteht daher in dem **Doppelten** von dem des B, folglich in dem Vierfachen von dem des A.

Dieß **Ertrags- und Werths-Verhältniß** der drei Grundstücke zu einander wird auf das Genaueste durch das Produkt aus der Flächengröße und der Klassenziffer ausgedrückt. Dasselbe ist

von A = 2 × 8 = **16**
von B = 2 × 16 = **32**
von C = 4 × 16 = **64**.

Darum heißt man die Zahlen 16, 32 und 64 „**Verhältniß-zahlen**.“ Aus ihnen berechnet sich die Steuer. Die einfache Steuer — das Steuer-simplum — ist von A = 16 kr., von B = 32 kr., von C = 64 kr.

Wie vielmal die einfache Steuer jährlich zu erheben ist, wird durch die Staatsregierung mit Zuziehung der Stände des Reichs von 2 zu 2 Jahren bestimmt. Werden z. B. 2,8 Simpla bezahlt, so ist die Jahressteuer

von A = 2,8 × 16 kr. = 44,8 kr. = 44 kr. 6,4 hlr. = 44 kr. 6 hlr.
„ B = 2,8 × 32 kr. = 89,6 kr. = 89 kr. 4,6 hlr. = 89 kr. 5 hlr.
„ C = 2,8 × 64 kr. = 179,2 kr. = 179 kr. 1,6 hlr. = 179 kr. 2 hlr.

Der Lehrer nehme hierauf einige Steuerkatasterauszüge, welche jeder bayerische Grundbesitzer für sein Eigenthum in Händen hat, ausführlich mit den Schülern durch, damit sie solche in ihrer Einrichtung kennen und die Vortrefflichkeit derselben würdigen lernen. Dann zeichne er Folgendes mit Weglassung der Verhältnißzahl und Steuer an die Wandtafel und gebe den Schülern auf, die hiefür leer gelassenen Rubriken auszufüllen.

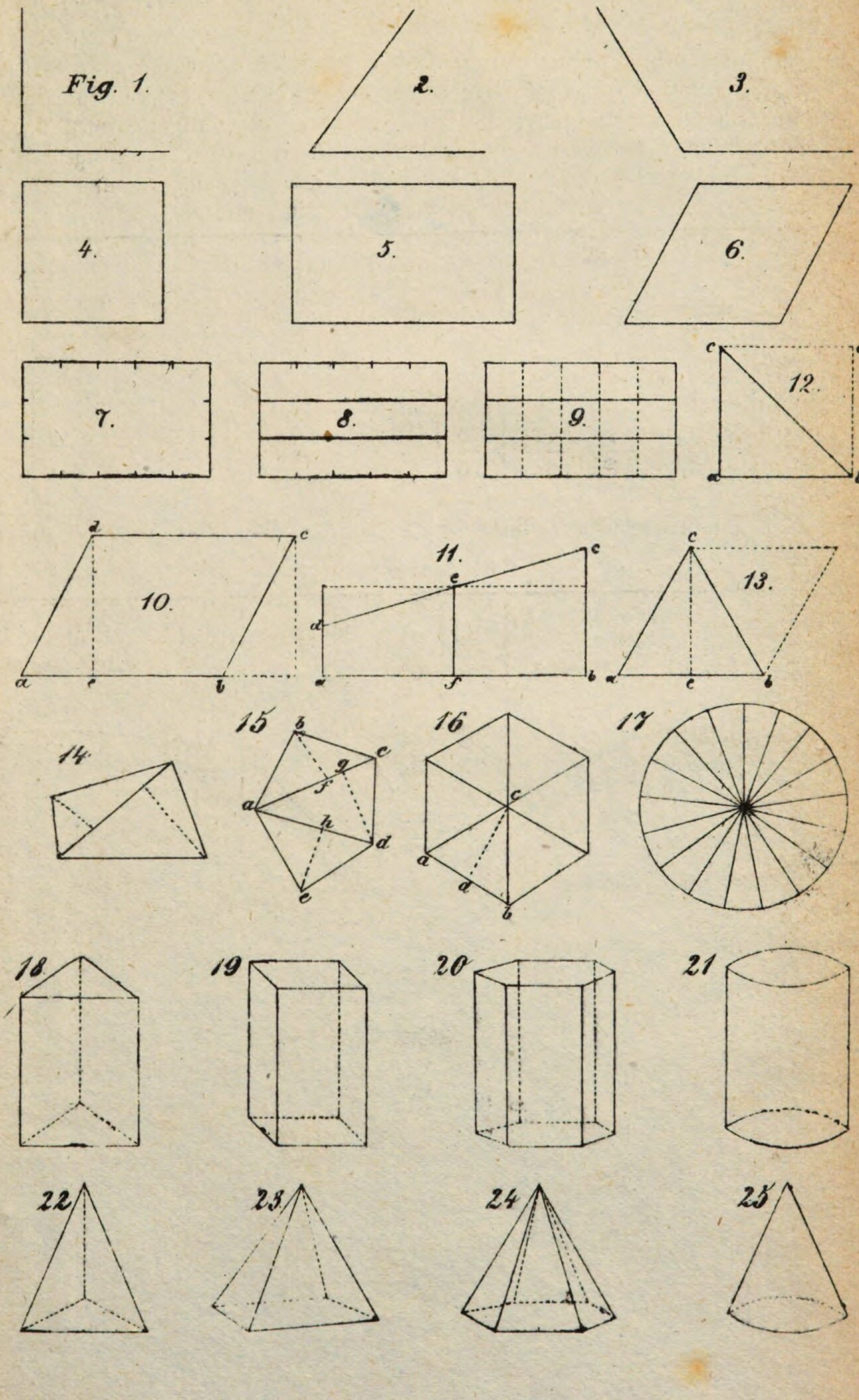
Pl.-Nr.	Bezeichnung des steuerbaren Objekts.	Tagw.	Decim.	Bonitäts-klasse.	Verhält-nißzahl.	Einfache Steuergröße.		
						fl.	kr.	hlr.
715	Hausleiten . . .	3	70	14	51,8	—	51	6
1235	Eggerten . . .	4	28	15	64,2	1	4	2
579	Breitenfeld . . .	8	42	16	134,7	2	14	6
	Summe	16	40	—	250,7	4	10	6

Die Jahressteuer: 250,7 kr. × 2,8 = 701,96 kr. = 20,06 *M.*

Für Unterfranken.

Pl.-Nr.	Bezeichnung des steuerbaren Objekts.	Tagw.	Decim.	Bonitäts-klasse.	Verhält-nißzahl.	Einfache Steuergröße.		
						fl.	kr.	hlr.
722	Hausleiten . . .	3	705	14	51,8	—	51	6
1257	Eggerten . . .	4	287	15	64,3	1	4	2
579	Breitenfeld . . .	8	420	16	134,7	2	14	6
	Summe	16	412	—	250,8	4	10	6

Die Jahressteuer: 250,8 kr. × 2,8 = 702,2 kr. = 20,06 *M.*


Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
12.
10.
11.
13.
14.
15
16
17
18.
19
20
21
22
23.
24
25

Ansbach. C. Brügel und Sohn.

Heuner, Johann F.

Lehrgang des Rechenunterrichtes in Volks-Schulen

Ansbach 1878